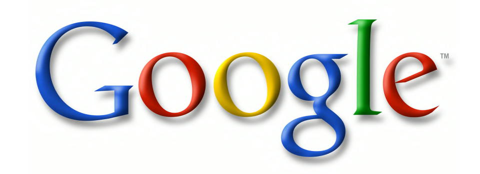
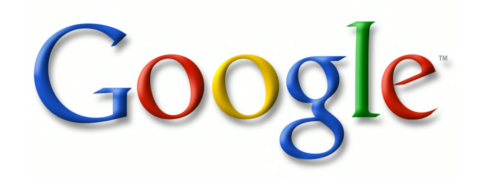
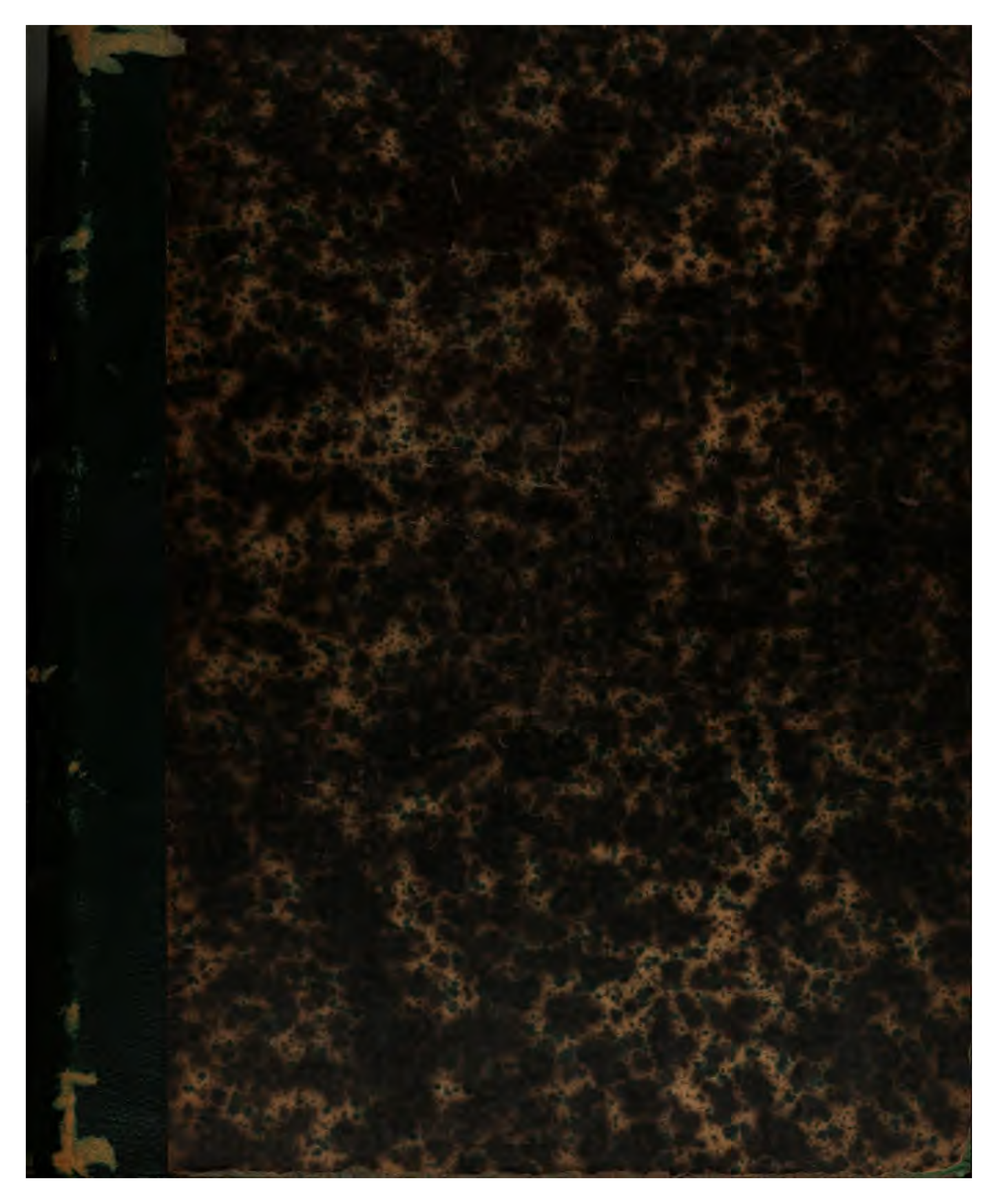
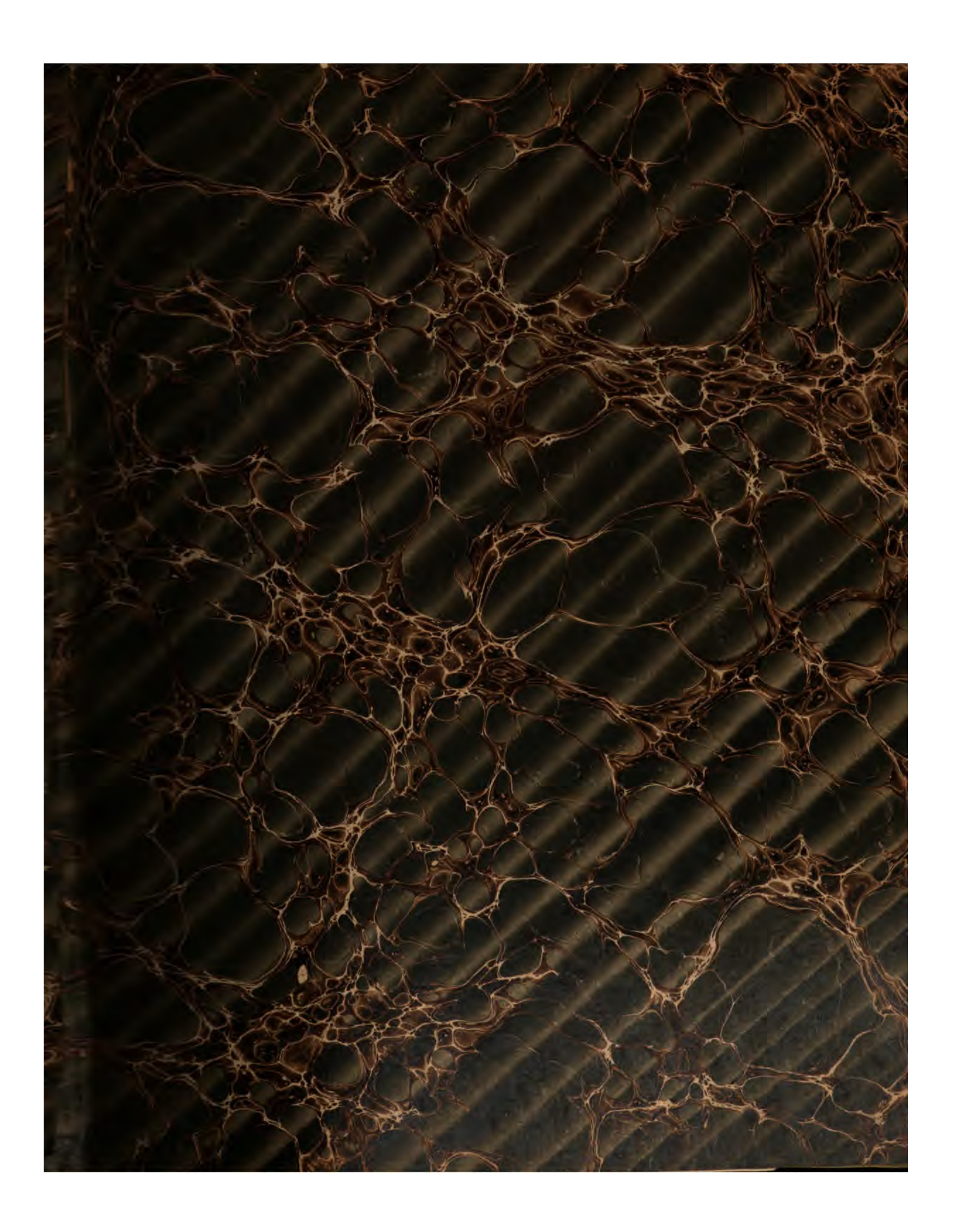




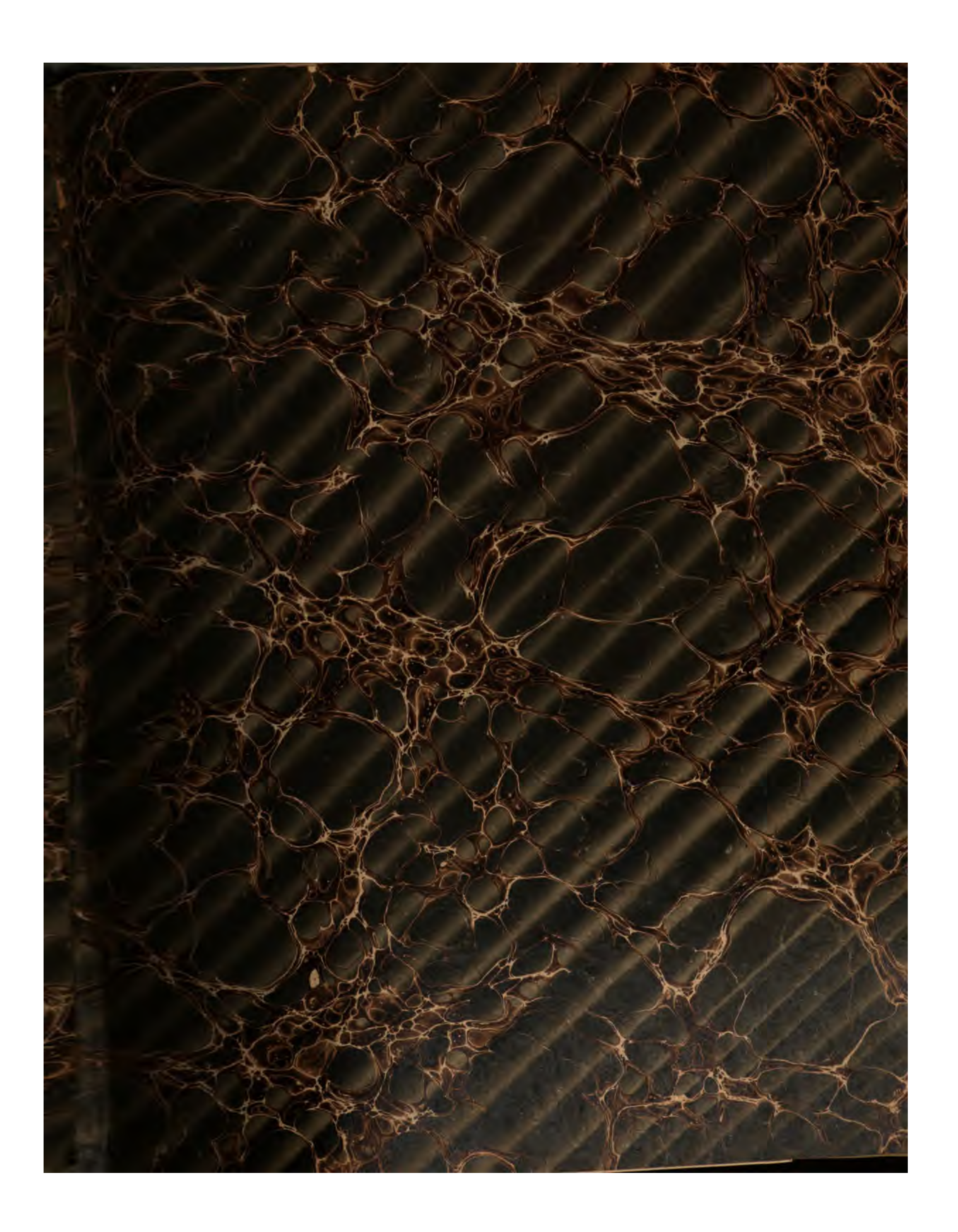




SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



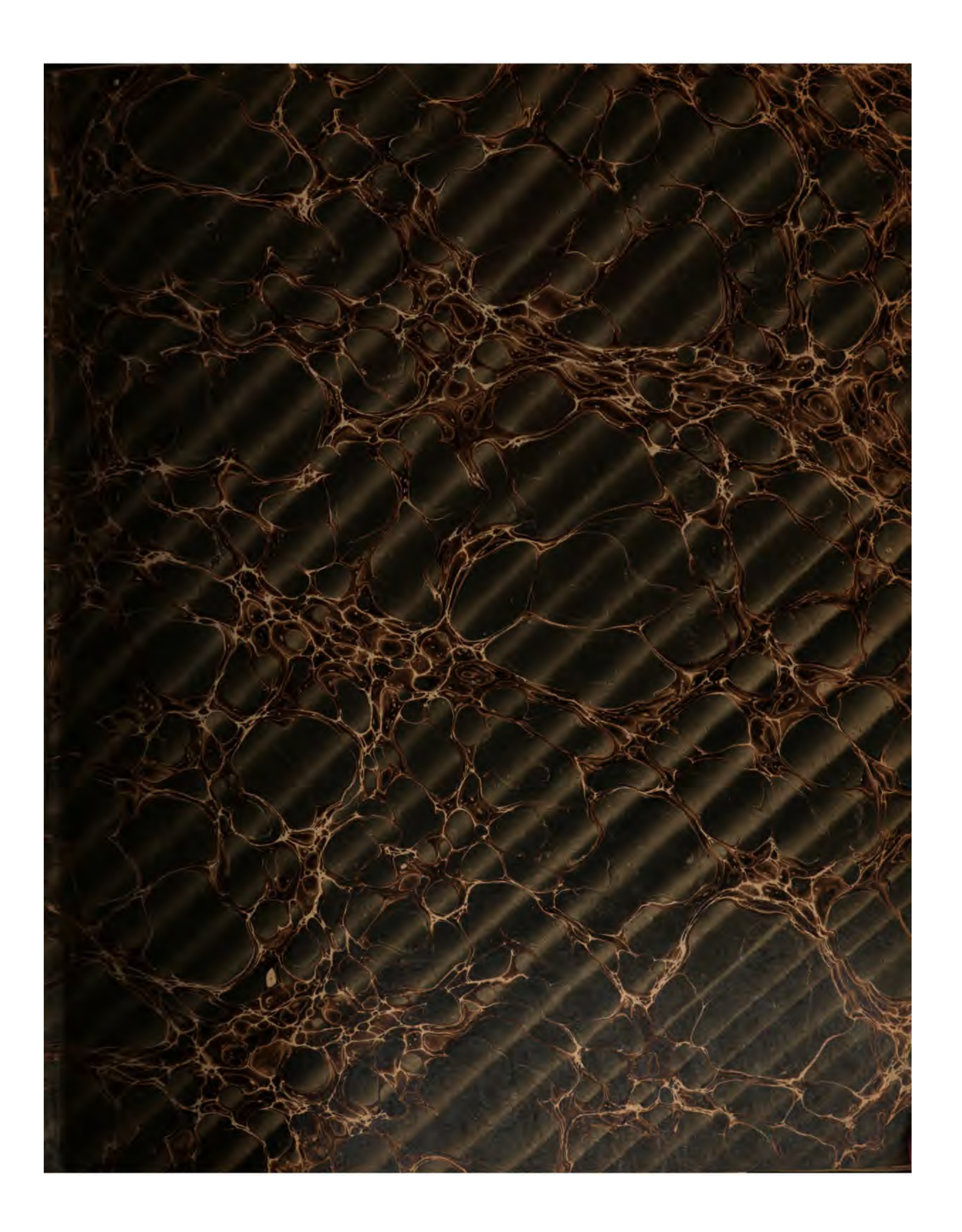

2-561
LSoc 451.2
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
18 Sept. 1876.




SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO
ECCLESIAE




LSoc 451.2
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
CHARLES MINOT,
OF SOMERVILLE,
(Class of 1828,)
18 Sept. 1876.



# MÉMOIRES COURONNÉS

ET

# MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS,

PUBLIÉS PAR

## L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

# MÉMOIRES COURONNÉS

ET

# MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS,

PUBLIÉS PAR

## L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

---

**TOME XXX. — 1858-1861.**



BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

---

**1861.**

# TABLE

## DES MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME XXX.

## MÉMOIRES DES SAVANTS ÉTRANGERS.

### CLASSE DES SCIENCES.



### CLASSE DES LETTRES.

# RECHERCHES

SUR

# LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

DES

# MOUVEMENTS PLANS;

PAR

M. P. GILBERT.

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

---

(Mémoire présenté en la séance du 7 novembre 1857.)

# INTRODUCTION.

Dans ce travail, je me suis proposé d'étudier d'une manière assez complète le mouvement géométrique d'une figure invariable dans son plan, en fondant cette théorie sur de simples considérations géométriques. J'ai eu surtout en vue de raisonner sans cesse d'une manière tout à fait générale et indépendante des conditions particulières qui déterminent le mouvement de la figure, comme aussi des positions relatives des différents points que l'on considère soit dans la figure mobile, soit dans le plan regardé comme fixe. J'ai cherché à introduire la même généralité dans les énoncés des théorèmes auxquels je suis parvenu, et à rendre ainsi ces théorèmes immédiatement applicables dans tous les cas possibles, sans qu'il soit nécessaire de les modifier d'après les circonstances que présente la figure.

Après avoir rappelé, dans les §§ 1, 2, 3, diverses propriétés du mouvement d'une figure dans un plan, et ajouté quelques remarques à ce sujet, j'établis *à priori* un théorème général qui a lieu pour un déplacement fini quelconque et qui me sert de point de départ.

Je l'applique en particulier à un déplacement infiniment petit, j'en déduis quelques propriétés remarquables qui ont lieu pour une position quelconque de la figure mobile, et j'obtiens immédiatement un théorème d'un énoncé essentiellement géométrique et tout à fait général, relatif au centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque de la figure en mouvement.

Je rattache à ce théorème la question du centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe qui fait partie de la figure mobile, et j'en déduis quelques conséquences assez curieuses.

Du même théorème découlent encore très-simplement une construction

géométrique générale des centres de courbure et une suite de règles pour la détermination d'un point important à considérer dans toute cette théorie.

Je termine, enfin, par des applications à certaines courbes connues, par l'exposé de nouvelles propriétés générales qui se présentent dans les mouvements plans, par l'étude analytique du cas intéressant où un point de la figure décrit une ligne droite, et par quelques propositions sur les aires des roulettes.

Lorsque je suis parvenu aux résultats qui servent de base à tout ce travail, je n'avais lu sur la question qui m'occupe que ce qui se trouve dans certains traités élémentaires. J'ai reconnu depuis que le même sujet avait occupé plusieurs géomètres. Lahire, par exemple, a reconnu l'existence du cercle que j'appelle *cercle d'inflexion,* bien qu'il ait commis quelques erreurs à ce sujet. J'ai eu ensuite connaissance d'un mémoire de M. Bresse, inséré dans le *Journal de l'École polytechnique,* et où la question des mouvements plans est envisagée d'une manière nouvelle : j'en ai profité pour perfectionner quelques points de mon travail.

Enfin, je n'ai pu lire que très-récemment le remarquable mémoire que M. Lamarle a publié sur la même question dans les *Bulletins de l'Académie :* tout y est ramené à des considérations d'une entière simplicité.

J'ose espérer, toutefois, que mes propres études ne seront pas tout à fait dénuées d'intérêt, même après celles de ces savants géomètres, et que j'aurai apporté, du moins en certains points, quelque perfectionnement à cette théorie. L'Académie aura égard, d'ailleurs, à la difficulté de rencontrer des résultats dignes d'attention dans une question déjà si profondément étudiée.

# RECHERCHES

SUR

# LES PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

DES

# MOUVEMENTS PLANS.

## § 1. — *Propositions connues sur le déplacement d'une figure dans un plan.*

M. Chasles a démontré depuis longtemps la proposition suivante :

*Une figure plane peut être amenée d'une position à une autre quelconque, dans un plan, par une simple rotation autour d'un point fixe de ce plan.*

La démonstration peut se faire très-simplement comme il suit :

(*Fig. 1.*) Soit M un point de la figure dans sa première position, M′ la seconde position de ce point, et M′M″ la seconde position de la droite qui était en MM′ dans la première position de la figure. Par les points M, M′, M″ passe une circonférence, soit O son centre : on a $MO = M'O = M''O$, et $\widehat{MOM'} = \widehat{M'OM''}$, donc évidemment une rotation égale à $\widehat{MOM'}$ autour du centre O amènera MM′ sur M′M″, et par conséquent toute la figure, liée invariablement à MM′, passera de la première position à la seconde. C. Q. F. D.

On voit, de plus, que la droite MM′, dans ce déplacement, a tourné autour du point M d'un angle égal à la rotation de la figure autour du point O, et comme le point M est pris arbitrairement sur la figure mobile, il en résulte que lorsqu'*une figure passe d'une position à une autre dans un plan, l'angle*

*qu'elle décrit autour d'un de ses points en même temps que ce point se transporte de sa première à sa seconde position, est de même grandeur et de même sens, quel que soit ce point.*

C'est ce que nous appellerons désormais simplement la *rotation de la figure* autour de ce point.

Considérons la seconde position de la figure comme se rapprochant indéfiniment de la première : ce qui précède subsiste, et le centre de rotation O tend vers une position-limite que l'on appelle le *centre instantané de rotation* de la figure mobile, dans la première position.

De plus, MM′ a pour limite la tangente à la trajectoire que décrit le point M dans le mouvement réel de la figure, MO a pour limite la droite qui joint le centre instantané de rotation au point M, et comme l'angle M′MO a évidemment pour limite un angle droit, on en conclut :

*Dans le mouvement continu d'une figure plane, les normales aux trajectoires de ses différents points, à un même instant, passent toutes par un même point, qui est le centre instantané de rotation pour cette position de la figure.*

## § 2. — *Suite.*

De ce théorème on déduit facilement les règles suivantes pour déterminer la position du centre instantané dans une position donnée de la figure :

— *Si un point de la figure mobile est assujetti à décrire une courbe dans le plan, la normale à cette courbe, menée par le point mobile, passe au centre instantané.*

— *Si une courbe invariablement liée à la figure mobile est assujettie à rester constamment tangente à une courbe fixe donnée, la normale aux deux courbes menée par le point de contact passe au centre instantané.*

— *Si elle est assujettie à passer constamment par un point fixe, sa normale en ce point passe au centre instantané.*

Enfin, on sait depuis longtemps que :

*Tout déplacement continu d'une figure dans un plan peut être produit en construisant la courbe qui est le lieu du centre instantané sur la figure mobile,*

*en la liant invariablement à cette figure, et la faisant rouler ensuite sur la courbe qui est le lieu des positions du centre instantané dans le plan.* Le point de contact des deux courbes est, à chaque instant, le centre instantané de rotation.

Comme nous nous représenterons souvent de cette manière le mouvement d'une figure, nous donnerons à ces deux courbes les noms respectifs de *courbe fixe* et de *courbe roulante;* leur commune normale, menée par le centre instantané de rotation, sera la *normale commune.*

## § 3. — *Remarques.*

Si l'on considère comme fixe la courbe que l'on regardait d'abord comme roulante, tandis que la courbe primitivement fixe roulera sur elle en emportant le plan dans son mouvement, il est clair que le mouvement relatif de la figure et du plan restera le même; en sorte qu'un point *fixe* M de la figure trace sur le plan mobile la même courbe que précédemment, lorsque le plan était fixe et le point M mobile. D'ailleurs, le centre instantané est toujours au point de contact des deux courbes : sa position est donc la même dans les deux cas.

Ce mode de description inverse d'une même courbe a été indiqué par M. Chasles : or, on peut en déduire des démonstrations très-simples de deux des propositions qui précèdent.

Considérons une courbe invariable assujettie à passer constamment par un point fixe. Renversons les mouvements : le point devenu mobile décrira la courbe devenue fixe, donc : *la normale à la courbe mobile menée par le point fixe, passe au centre instantané.* De même, l'intersection M de deux positions infiniment voisines d'une courbe mobile a pour limite un point de l'enveloppe de cette courbe mobile dans le plan : renversons les mouvements, le point M du plan devenu mobile occupera deux positions infiniment voisines sur la courbe devenue fixe; — le point-limite du point M décrit donc une trajectoire tangente à cette courbe, donc *la normale à cette dernière, au point de contact, passe au centre instantané,* ce qui renferme une des propositions précédentes.

On peut déduire d'une de ces propositions une conséquence assez curieuse, et qui n'a pas non plus, je pense, été remarquée.

(*Fig. 2.*) Soit UV la courbe fixe, U'V' la courbe roulante, C le point de contact, et imaginons que la courbe qui se meut, invariablement liée à la courbe roulante, soit une des développantes de celle-ci, U' étant son origine sur la courbe. La tangente commune CM coupe la développante mobile en un point M, et, d'après ce qui précède, M est le point où elle touche son enveloppe, puisque CM est évidemment normale à cette développante. Mais, d'un autre côté, soit U le point de la courbe fixe qui coïncidait avec U' à l'origine du mouvement, et US la développante de cette courbe fixe qui a son origine en U, et qui est aussi normale à CM. Or, d'après la propriété des développées, on a CM = arc U'C, donc CM = arc UC, donc le point M est un point de la développante US. Donc :

*Lorsqu'une courbe roule sur une autre, en emportant dans son mouvement une de ses développantes, l'enveloppe des positions successives de cette dernière est une développante de la courbe fixe.*

On tire de là plusieurs conséquences; par exemple: lorsqu'un cercle roule sur une droite, toute développante du cercle passe constamment par un certain point de cette droite : ce qui était d'ailleurs évident.

## § 4. — *Conventions.*

(*Fig. 3.*) 1. Soient *a, u, v* les distances respectives de trois points A, U, V à un même point C, situé avec eux en ligne droite, ces distances étant comptées à partir du point C, positivement dans le sens CA, négativement en sens contraire, et soit T un point tel que U soit le milieu de CT. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que les points A, V soient *conjugués harmoniques* par rapport à C, T est exprimée par l'équation :

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} + \frac{1}{v}$$

ou

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

quelles que soient les positions relatives des points A, U, V par rapport à C, pourvu qu'on ait égard aux signes dont les distances sont affectées. (Chasles, *Géom. sup.*, p. 42.) Il est, d'ailleurs, facile de vérifier ce résultat.

2. Lorsque nous considérerons les angles décrits par une droite autour d'un point lié invariablement à une figure mobile, nous regarderons comme positifs les angles décrits dans le sens de la *rotation* de la figure autour de ce point, et comme négatifs, les angles décrits en sens contraire. De cette manière, l'angle total décrit par la droite après un temps quelconque, sera toujours la *somme algébrique* des angles partiels.

(*Fig. 4.*) 3. Soit M un point quelconque du plan, C le centre instantané de rotation pour l'instant que l'on considère, P un point tel que M soit le milieu de CP. Nous dirons simplement que P est l'*homologue* du point M, en sorte qu'un point étant donné, son homologue se construira immédiatement.

### § 5. — *Théorème général sur le mouvement d'une figure dans un plan.*

(*Fig. 5, 6, 7.*) Une figure se déplace d'un mouvement continu : soit C le centre instantané pour une position donnée de la figure, M un point lié à celle-ci, MC est la normale à la trajectoire qu'il décrit. Considérons une seconde position quelconque de la figure, soient alors $C_1$ le centre instantané, $M_1$ le point décrivant, $M_1 C_1$ la normale à sa trajectoire, et soit $C'$ le point de la figure mobile dans sa première position qui vient en $C_1$ dans la seconde ; de sorte que la droite $MC'$ vient en $M_1 C_1$ coïncider avec la seconde normale. L'angle total V, dont la normale à la trajectoire a tourné autour du point mobile, peut être considéré comme résultant de l'angle $CMC'$ ou M, qu'elle décrit autour de ce point dans la figure mobile, et de l'angle Ω, dont la figure mobile tourne autour du même point : Ω est ce que nous avons appelé la *rotation* de la figure. D'après nos conventions, on aura donc *toujours* :

$$V = M + \Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en tenant compte des signes dont les angles sont affectés.

L'angle M, par exemple, est positif pour tout point situé d'un côté de la droite CC', négatif pour tout point situé de l'autre côté.

Sur CC', et du côté de cette droite pour lequel l'angle M est toujours négatif, décrivons le segment capable de l'angle $\Omega$ : pour tout point M de cette circonférence, l'angle M est négatif et égal à $-\Omega$, ou positif et égal à $180^\circ - \Omega$, suivant que ce point est de côté ou d'autre de la droit CC'; donc l'angle V est nul dans le premier cas, égal à 180° dans le second, d'où :

THÉORÈME I. — *Lorsqu'une figure invariable se déplace sur un plan d'un mouvement continu, si l'on considère deux quelconques de ses positions, il y a une infinité de points de la figure mobile dont chacun jouit de cette propriété : que les normales à la trajectoire qu'il décrit, dans ces deux positions de la figure, sont parallèles entre elles. Le lieu géométrique de ces points est un cercle passant par les deux points de la figure mobile qui coïncident avec le centre instantané dans ces deux positions.*

## § 6. — *Application à un mouvement infiniment petit.*

Supposons infiniment voisines les deux positions de la figure : soit Z le point de rencontre des normales MC, $M_1C_1$ à la trajectoire d'un point quelconque M lié à la figure mobile. La rotation infiniment petite $\Omega$ ayant pour effet d'amener C' en $C_1$, il est clair :

(*Fig. 5.*) 1° Que, si le point décrivant M est de l'autre côté de CC' par rapport à $C_1$, l'angle M est négatif, et de plus, il est plus petit que $\Omega$, si le point M est hors du cercle déterminé dans le théorème I[er]. L'angle V est donc positif; donc les normales se coupent en Z au delà du point C par rapport à M;

(*Fig. 6.*) 2° Si M est dans l'intérieur du cercle, l'angle M est négatif et $>\Omega$, V est négatif; donc les normales se coupent en Z du côté CM et au delà du point M par rapport à C;

(*Fig. 7.*) 3° Si M est du même côté de CC' que le point $C_1$, l'angle M est positif, V est donc positif, et les normales MC, $M_1C_1$ se coupent en Z entre les points C et M.

Mais Z, à la limite, est le centre de courbure de la trajectoire du point M.

— D'autre part, le rayon du cercle susdit est égal évidemment à $\frac{CC'}{2 \sin \Omega}$; de sorte que, si l'on désigne par $\mathfrak{R}$ le rayon du cercle-limite, on a :

$$\mathfrak{R} = \lim \frac{CC'}{2\Omega}, \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\Omega}{CC'} = \frac{1}{2\mathfrak{R}}.$$

Théorème II. — *Lorsqu'une figure se meut sur un plan d'un mouvement continu, il y a dans chaque position de cette figure une infinité de ses points qui décrivent actuellement un point d'inflexion sur leurs trajectoires; — le lieu de ces points est une circonférence passant par le centre instantané, et qui a son centre sur la normale commune.*

Ce cercle est d'ailleurs de l'autre côté de la courbe roulante par rapport à la courbe fixe. Nous lui donnerons le nom de *cercle d'inflexion,* et le point diamétralement opposé au centre instantané sur sa circonférence sera le *pôle d'inflexion :* il sera toujours noté par la lettre I.

Théorème III. — *Tout point de la figure mobile situé hors du cercle d'inflexion décrit une trajectoire qui tourne sa concavité vers le centre instantané de rotation. Tout point situé dans l'intérieur du même cercle, au contraire, décrit une trajectoire qui tourne sa convexité vers le centre instantané.*

Le cercle d'inflexion jouit donc de propriétés remarquables dans la figure en mouvement : il varie d'ailleurs avec la position de celle-ci. Ces théorèmes sont complétement généraux et indépendants des conditions qui règlent les mouvements de la figure.

(*Figures 5, 6, 7.*) Désignons par $\varphi$ l'angle aigu de la normale CM à la trajectoire du point M avec la normale commune, et soient $u$, $v$ les distances du centre instantané au point M et au centre de courbure de sa trajectoire, ces distances étant comptées à partir du point C, sur la normale, positivement du côté où tombe la projection du pôle d'inflexion sur cette normale, et négativement en sens contraire. Il est clair, d'après cette convention, que $u$ sera toujours de signe contraire à celui de l'angle M, et $v$ de signe contraire à celui de l'angle V. Les triangles CMC′, $CZC_1$ donnent, en conséquence :

$$\hat{M} = -\frac{CC' \cos \varphi}{u}, \quad V = -\frac{CC_1 \cos \varphi}{v},$$

en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à $\hat{M}$ et V. Substituons les valeurs de M, V dans l'équation (2), divisons par CC′ cos φ, en observant que

$$\lim \frac{CC_1}{CC'} = 1, \quad \text{et} \lim \frac{\Omega}{CC'} = \frac{1}{2\mathfrak{R}},$$

il vient :

$$-\frac{1}{v} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2\mathfrak{R}\cos\varphi},$$

ou enfin :

$$\frac{1}{2\mathfrak{R}\cos\varphi} = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Remarquons maintenant que $2\mathfrak{R}\cos\varphi$ exprime la distance du centre instantané à la projection I′ du *pôle d'inflexion* sur la normale CM, et que l'équation (3) est d'ailleurs complétement générale, eu égard aux signes des quantités, et, d'après le § 4, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *La projection du pôle d'inflexion sur la normale à la trajectoire d'un point est le conjugué harmonique du centre de courbure de cette trajectoire, par rapport au centre instantané de rotation et à l'homologue du point décrivant.*

Cette relation géométrique très-simple est, de plus, indépendante des positions relatives des points I′,M,C,Z et des conditions qui déterminent le mouvement de la figure.

### § 7.—*Détermination géométrique du pôle d'inflexion.*

(*Figures 8, 9, 10.*) Si par le point $C_1$ on mène une normale à la courbe fixe, par C′ une normale à la courbe roulante, soit O et O′ les points où ces normales coupent respectivement la normale commune : les arcs $CC_1$, CC′ étant égaux, C′O′ est la droite de la figure mobile qui vient s'appliquer sur la normale $C_1O$, lorsque le point C′ est venu en $C_1$; en sorte que CO, $C_1O$ sont deux normales infiniment voisines à la trajectoire que décrit le point O′. Mais d'ailleurs O′,O ont respectivement pour limites les centres de courbure de la

courbe roulante et de la courbe fixe, relatifs au point C; donc le *centre de courbure de la trajectoire que décrit le point de la figure mobile qui coïncide actuellement avec le centre de courbure de la courbe roulante, est au centre de courbure de la courbe fixe.* En appliquant le théorème IV, nous aurons donc immédiatement celui-ci :

THÉORÈME V. — *Le pôle du cercle d'inflexion est le conjugué harmonique, sur la normale commune, du centre de courbure de la courbe fixe, par rapport au centre instantané et à l'homologue du centre de courbure de la courbe roulante.*

(*Fig. 8.*) Lorsque la courbe fixe et la courbe roulante tournent leurs concavités en sens contraire, le cercle d'inflexion est, d'après ce qui précède, du même côté de la tangente commune que la courbe roulante.

(*Fig. 9.*) Lorsque les deux courbes tournent leurs concavités dans le même sens, si le rayon de courbure R' de la courbe roulante est plus petit que le rayon de courbure R de la courbe fixe, le cercle d'inflexion tombe du même côté de la tangente commune que les deux courbes.

(*Fig. 10.*) Au contraire, lorsque $R' > R$, il tombe de l'autre côté de la tangente.

Dans tous les cas, la détermination du cercle d'inflexion est ramenée à une règle simple, uniforme et générale, et l'on peut en déduire des constructions graphiques en n'employant même que des intersections de lignes.

On peut aussi obtenir $\mathfrak{R}$ en fonction de R et R', en faisant dans l'équation (3) :

$$\varphi = o, \quad u = R', \quad v = R,$$

d'où :

$$\frac{1}{2\mathfrak{R}} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et cette formule sera générale, si l'on a égard aux signes dont R et R' doivent être affectés, c'est-à-dire le signe + du côté CI, et le signe — du côté opposé.

### § 8. — *Corollaires du théorème IV.*

Corollaire I. — Si l'on regarde comme fixe la courbe prise d'abord pour roulante, et *vice versâ,* il faut permuter R et R′ dans l'équation (4), ce qui donne pour $2\mathfrak{R}$ une valeur égale et de signe contraire : le pôle d'inflexion décrit un arc de 180° autour du centre instantané. D'autre part, si, dans l'équation (3), on permute $u$ et $v$ l'un dans l'autre, en changeant le signe de $\mathfrak{R}$, l'équation ne cesse pas d'être satisfaite, donc :

*Soit* Z *le centre de courbure de la trajectoire d'un point* M; *renversons les mouvements en faisant rouler la courbe, regardée d'abord comme fixe, sur celle que l'on regardait comme roulante. La trajectoire du point* Z, *supposé lié à la nouvelle courbe roulante, aura réciproquement son centre de courbure au point* M.

Corollaire II. (*Fig. 11.*) — Soient A, B deux points pris sur la normale commune, et tels que I soit conjugué harmonique de B par rapport à C et au point homologue du point A. Projetons A, I, B en A′, I′, B′ sur une droite quelconque passant par le centre instantané, on sait que C, I′, B′ et l'homologue du point A′ seront encore en proportion harmonique; donc, d'après le théorème IV, B′ est le centre de courbure de la trajectoire qui décrit le point A′ de la figure mobile. Or, les lieux des points A′, B′ sont deux circonférences décrites sur AC, BC comme diamètres; d'où je conclus :

*Tous les points de la figure mobile, situés sur une circonférence tangente à la courbe fixe au centre instantané, décrivent des trajectoires qui ont leurs centres de courbure sur une même circonférence, tangente aussi à la courbe fixe au centre instantané.*

Corollaire III. — Lorsque le point M est situé sur la circonférence du cercle osculateur de la courbe roulante, on a : $u = 2R' \cos \varphi$, et l'équation (3) devient :

$$\frac{1}{2\mathfrak{R} \cos \varphi} = \frac{1}{2R' \cos \varphi} - \frac{1}{v}.$$

D'ailleurs l'équation (4) donne :

$$\frac{1}{2R \cos \varphi} = \frac{2}{2R' \cos \varphi} - \frac{1}{R \cos \varphi},$$

d'où :

$$\frac{1}{2R' \cos \varphi} - \frac{1}{R \cos \varphi} = -\frac{1}{v},$$

ou bien :

$$\frac{1}{R \cos \varphi} = \frac{1}{2R' \cos \varphi} + \frac{1}{v},$$

et il faut remarquer que cette équation, en tenant compte des signes de R, R′, $v$, est tout à fait générale. Mais en désignant par N le point où la normale MC coupe le cercle osculateur de la courbe fixe, on a toujours, en grandeur et en signe :

$$CN = 2R \cos \varphi;$$

donc, en vertu du § 4, l'équation ci-dessus exprime que C, N sont conjugués harmoniques par rapport à M et au centre de courbure de sa trajectoire. De là :

**Théorème VI.** — *Lorsque le point décrivant se trouve sur le cercle osculateur de la courbe roulante, le centre de courbure de sa trajectoire est le conjugué harmonique du point décrivant par rapport aux deux points où la normale à cette trajectoire coupe le cercle osculateur de la courbe fixe.*

Le théorème a lieu, quelles que soient les positions relatives de deux cercles osculateurs.

**Corollaire IV.** — Enfin, en rapprochant l'une de l'autre les équations (3) et (4), et désignant par $\rho$ le rayon de courbure de la trajectoire, on aura l'équation :

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \cos \varphi \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

pour déterminer $\rho$, en observant que $\rho = \pm (u - v)$. On doit toujours avoir égard aux signes de R, R′, $u$, $v$.

### § 9. — *Centre de courbure d'une courbe de forme invariable mobile sur un plan.*

(*Fig. 12.*) Considérons maintenant deux positions infiniment voisines AB, A'B', d'une courbe de forme invariable qui se déplace sur un plan; menons CM normale à AB; M est le point de contact de cette courbe avec son enveloppe, pour la première position, et CM est en même temps la normale à l'enveloppe au point M. De même, $C_1M_1$, étant menée normale à A'B', sera la normale à l'enveloppe pour cette seconde position, et le point de rencontre Z de ces deux normales a pour limite le centre de courbure de l'enveloppe, relativement au point M. Mais si l'on mène C'M' normale à AB, la normale $C_1M_1$ n'est autre chose que la droite C'M' transportée dans la seconde position de la figure; d'où il résulte que le point de rencontre X des droites CM, C'M', supposé lié à AB, décrit une trajectoire dont CM, $C_1M_1$ sont deux normales infiniment voisines. Mais X, à la limite, coïncide avec le centre de courbure de la courbe AB au point M; donc, enfin, — *le centre de courbure de la courbe qui se déplace, relatif au point* M *où elle touche son enveloppe, décrit, étant lié invariablement à la courbe, une trajectoire dont le centre de courbure coïncide avec celui de l'enveloppe elle-même au point* M.

La démonstration étant générale, quant aux positions des points que l'on considère, la question actuelle se ramène à celle qui a été traitée, et l'on a ce théorème :

Théorème VII. — *Lorsqu'une courbe invariable a un mouvement quelconque dans un plan, le centre de courbure de l'enveloppe des positions successives de cette courbe est déterminé, pour une position quelconque, par le théorème IV, en prenant pour point décrivant le centre de courbure de la courbe mobile au point où elle touche son enveloppe.*

Il n'y aura donc jamais d'incertitude possible, tout étant ramené à un énoncé simple et parfaitement général.

### § 10. — *Corollaires du théorème VII.*

COROLLAIRE I. — Il suit immédiatement du théorème VII que la position du centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe mobile ne dépend pas de celle-ci immédiatement, mais seulement de la position de son centre de courbure relatif au point où elle touche l'enveloppe; — d'où résulte que, si plusieurs courbes mobiles ont leurs centres de courbure coïncidents, leurs enveloppes auront aussi leurs centres de courbure coïncidents. On déduit facilement de là que :

*Lorsqu'un système de courbes, développantes d'une même courbe et liées entre elles d'une manière invariable, se meut dans un plan, les enveloppes de ces différentes courbes sont les développantes d'une même courbe fixe.*

(*Fig. 13.*) COROLLAIRE II. — Considérons en particulier le cas où la ligne mobile est une droite : son centre de courbure est à l'infini; donc, si nous projetons I en I' sur la perpendiculaire à la droite mobile menée par le centre instantané, et construisons le point Z tel que C soit le milieu de I'Z; Z sera le centre de courbure de l'enveloppe de la droite mobile. Mais le point Z est visiblement sur la circonférence décrite sur CH = 2R comme diamètre; donc on a ce théorème remarquable :

THÉORÈME VIII. — *Lorsqu'un système de droites liées entre elles invariablement se déplace sur un plan d'un mouvement continu, les centres de courbure de leurs enveloppes sont à chaque instant sur un même cercle égal au cercle d'inflexion et symétriquement placé de l'autre côté du centre instantané.*

COROLLAIRE III. — En désignant par $u'$ la normale CM, par $\rho'$ le rayon de courbure de la courbe mobile, positif ou négatif dans le même sens que $u'$, par $v$ la distance du centre instantané au centre de courbure de l'enveloppe, on aura la formule :

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho' + u'} - \frac{1}{v}\right),$$

en combinant la formule (5) avec le théorème VII.

§ 11. — *Construction géométrique du centre de courbure.*

(*Fig. 14.*) Le théorème IV conduit à une construction géométrique très-simple du centre de courbure de la trajectoire d'un point lié à la figure mobile, et par suite du centre de courbure de l'enveloppe d'une ligne mobile, puisque, d'après le théorème VII, cette question rentre dans la première.

Soient, en effet, C le centre instantané, M le point décrivant, CM la normale, et I′ la projection du pôle d'inflexion sur cette normale; soient, en outre, $M_1$, $I_1$, les homologues des points M,I; prolongeons la perpendiculaire II′ jusqu'à sa rencontre en G avec la droite $M_1 I_1$, et soit GZ parallèle à la normale commune: cette parallèle coupe la normale CM en Z, centre de courbure. En effet, I étant le milieu de $CI_1$, les droites $GM_1$, GI′, GC, GZ forment un faisceau harmonique : ce faisceau est coupé par la normale MC en quatre points $M_1$, I′, C, Z, qui sont en proportion harmonique; donc, $M_1$ étant l'homologue du point M, Z est bien le centre de courbure de la trajectoire de ce dernier. Mais si je joins MI, et si je mène CK parallèle à I′I, ces deux droites se coupent évidemment en K sur la droite GZ, à cause de l'égalité des triangles $II_1G$, CIK; donc, comme il suffit de déterminer le point K, nous avons la construction géométrique suivante :

(*Fig. 15.*) *Par le point de rencontre* K *de la droite qui joint le point décrivant au pôle d'inflexion, et de la perpendiculaire à la normale élevée par le centre instantané, on mène une parallèle à la normale commune : cette parallèle coupe la normale à la trajectoire en un point* Z *qui est le centre de courbure.*

Cette construction si simple, et qui d'ailleurs est absolument générale, suppose seulement la connaissance du point décrivant, du centre instantané et du pôle d'inflexion. Nous allons nous occuper de la détermination de ce dernier point.

§ 12. — *Déterminations géométriques du pôle d'inflexion.*

Lorsque le mouvement de la figure mobile est déterminé par le roulement d'une courbe sur une autre, le théorème V donne immédiatement le centre instantané et le pôle d'inflexion. Dans les cas suivants, le théorème IV, qui détermine le centre de courbure de la trajectoire au moyen du pôle d'inflexion, sert à résoudre immédiatement le problème inverse.

Théorème IX. — *Connaissant les normales aux trajectoires que décrivent deux points de la figure mobile, dans une position donnée de cette figure, leur point de rencontre est le centre instantané. Prenons sur chaque normale le conjugué harmonique du centre de courbure de la trajectoire, par rapport au centre instantané et à l'homologue du point décrivant : ce point sera la projection du pôle d'inflexion sur cette normale, et la perpendiculaire à celle-ci, menée par ce point, passera au pôle d'inflexion qui se trouvera ainsi déterminé par l'intersection de deux droites.*

Tous les théorèmes suivants se déduisent aussi immédiatement du théorème IV ou du théorème VII, en observant d'ailleurs que, lorsqu'un point est à l'infini, son conjugué harmonique est à égale distance des deux autres.

Théorème X. — *Lorsqu'un point de la figure mobile décrit une droite, cette droite passe par le pôle d'inflexion.*

Théorème XI. — *Une courbe liée invariablement à la figure mobile reste constamment tangente à une courbe fixe : la normale à ces deux courbes au point de contact passe au centre instantané. — On cherchera sur cette normale le conjugué harmonique du centre de courbure de la courbe fixe donnée, par rapport au centre instantané et à l'homologue du centre de courbure de la courbe mobile : — ce point sera la projection, sur la normale, du pôle d'inflexion.*

Quand la ligne mobile est une droite, son centre de courbure est à l'infini, donc :

Théorème XII. — *Lorsque la ligne mobile du théorème XI est une droite,*

*le centre instantané est à égale distance, sur la normale au point de contact, du centre de courbure de la courbe fixe et de la projection* I' *du pôle d'inflexion, ce qui détermine ce point* I'.

Théorème XIII. — *Lorsqu'une courbe mobile reste toujours tangente à une droite fixe, la projection du pôle d'inflexion, sur la normale qui passe par le point de contact, coïncide avec le centre de courbure de la courbe mobile.*

Si la courbe fixe se réduit à un point, son centre de courbure coïncide avec ce point; donc :

Théorème XIV. — *Lorsqu'une courbe, liée à la figure mobile, est assujettie à passer constamment par un point fixe, si on lui mène par ce point une normale, elle passe, comme on sait, au centre instantané; et le conjugué harmonique, sur cette normale, du point fixe par rapport au centre instantané et à l'homologue du centre de courbure de la courbe mobile, est la projection du pôle d'inflexion sur cette même normale.*

Le théorème suivant est un cas particulier :

Théorème XV. — *Lorsqu'une droite de la figure mobile passe constamment par un point fixe, si on lui mène par ce point une perpendiculaire, le centre instantané est à égale distance, sur cette perpendiculaire, du point fixe et de la projection du pôle d'inflexion.*

On voit que tous ces théorèmes ne sont que des cas particuliers des théorèmes IV et VII, et sont renfermés en quelque sorte dans le même énoncé. Ils serviront, dans les différents cas, à construire le pôle d'inflexion.

## § 13. — *Applications.*

(*Fig. 18.*) I. Une droite de longueur constante AB glisse par ses extrémités sur deux droites fixes OX, OY, faisant entre elles un angle quelconque : on demande le centre de courbure de l'ellipse décrite par un point quelconque M de cette droite.

Par les points A et B, j'élève AC, BC respectivement perpendiculaires à

OX, OY : leur point de rencontre C est le centre instantané de rotation. D'ailleurs, en vertu du théorème X, les droites OX, OY passent par le pôle d'inflexion ; ce pôle coïncide donc avec leur intersection en O ; d'ailleurs, CM est la normale à la trajectoire du point M. Il suffit donc d'appliquer la construction géométrique du § 11, et l'on a cette construction très-simple du centre de courbure de l'ellipse décrite par le mouvement d'une droite :

*On joindra* OM, *on élèvera* CK *perpendiculaire à la normale* CM, *par le centre instantané* C, *et par le point* K, *où cette perpendiculaire rencontre* OM, *on mènera* KZ *parallèle à* OC : KZ *coupera la normale* CM *en* Z, *centre de courbure de l'ellipse.*

On sait, d'ailleurs, que le mouvement d'une droite que nous considérons ici se ramène au roulement d'un cercle sur un cercle de rayon double, intérieurement : cette considération conduirait aux mêmes conséquences. Relativement à ce mouvement, qui a été très-étudié, je ferai encore remarquer que l'enveloppe des positions successives d'un même diamètre du cercle mobile est en même temps l'enveloppe des ellipses décrites par ses différents points, et que deux points conjugués harmoniques, par rapport aux extrémités d'un même diamètre, décrivent des ellipses semblables et semblablement placées.

II. *Cycloïde ordinaire.* — Le cercle osculateur de la courbe roulante coïncide ici avec le cercle roulant lui-même ; il suffit d'appliquer le théorème VI, en observant que le cercle osculateur de la courbe fixe se confond avec une droite, en sorte que le deuxième point de rencontre est à l'infini. Le centre instantané est donc à égale distance du point décrivant et du centre de courbure de la cycloïde, ce qui est connu.

(*Fig. 15.*) III. *Epicycloïde.* — Soient O, O′ les centres respectifs du cercle fixe et du cercle roulant, M le point décrivant, C le centre instantané ; CM est la normale, et soit N le point où elle coupe le cercle fixe. D'après le théorème VI, le *centre de courbure de l'épicycloïde est le conjugué harmonique du point* M, *par rapport aux points* C, N. J'ignore si cette relation avait été remarquée.

Menons le diamètre MO′P, et ON, qui lui sera évidemment parallèle, en sorte que les droites OM, OO′, OP, ON forment un faisceau harmonique, puis-

que O′ est le milieu de MP. Ce faisceau est coupé par la normale CM en quatre points M, C, Z, N, qui forment conséquemment une proportion harmonique; donc Z est le centre de courbure cherché.

De là résulte cette construction très-simple :

*On tire le diamètre* MO′P, *la droite* PO, *et cette droite coupe la normale à l'épicycloïde au centre de courbure* Z.

Cela a lieu pour les épicycloïdes intérieures ou extérieures.

IV. *Spirale d'Archimède.* — M. Chasles a démontré [1] le théorème suivant :

*Si l'on donne un angle droit* CSM *dont un côté* CS *est indéfini, et l'autre* SM *égal au rayon d'un cercle; que l'on fasse rouler le premier côté sur la circonférence du cercle, l'extrémité* M *du second côté décrira la spirale d'Archimède.*

(*Fig. 16.*) Le centre instantané est au point de contact C : CM est donc la normale à la spirale. Prolongeons le rayon OC du cercle d'une longueur CI = OC; I est le pôle d'inflexion, d'après le théorème IV, car le centre de courbure de la courbe roulante est à l'infini. ICO est la *normale commune.* Cela posé, il suffit d'employer la construction géométrique du § 11, et l'on a cette construction très-simple :

*On élèvera en* C *une perpendiculaire à la normale* CM, *et, par le point* K, *où elle coupe la droite* IM *qui joint le point décrivant au pôle d'inflexion, on mènera* KZ *parallèle à* ICO; KZ *coupe la normale* CM *en* Z, *centre de courbure de la spirale.*

Lorsque la spirale est engendrée dans un cercle, à la manière ordinaire, la construction précédente s'applique tout aussi facilement, en observant que OC est le rayon du cercle perpendiculaire au rayon vecteur OM de la spirale. On retrouve ainsi la construction ordinaire de la normale à la spirale d'Archimède, et le reste, pour la détermination du rayon de courbure, s'achèvera comme ci-dessus sans aucune difficulté. (*Fig. 17.*)

[1] *Correspondance mathématique* de M. Quetelet, t. VII, p. 41.

V. *Ellipse et courbes du deuxième ordre.* — Nous avons donné plus haut une construction géométrique du centre de courbure de l'ellipse : en considérant un autre mode de génération, on obtient une construction plus simple encore et qui s'applique aux autres courbes du second ordre.

(*Fig. 19.*) Soient AB le grand axe, O le centre, F et F′ les foyers de l'ellipse : celle-ci sera l'enveloppe d'un côté ST d'un angle droit, dont le sommet parcourt la circonférence décrite sur le diamètre AB, l'autre côté SF passant constamment par le foyer F. Joignons OS, et soit CF perpendiculaire au côté SF : ces deux droites se coupent au centre instantané C. Projetons C en M sur ST, M est le point qui appartient à l'enveloppe, MC est la normale à celle-ci, et les angles CMF, CMF′ sont égaux, car MF′ est parallèle à OS : FC prolongé coupe donc MF′ en un point L, tel que ML = MF.

Pour construire directement la normale commune, je mène OC′ parallèle à FC : F′C′ est égal et parallèle à OC, et MC′ = OS = OA. Le point C′ est donc à une distance constante OA du point M, en sorte que le lieu des points C′ peut être décrit par l'extrémité d'une droite de longueur constante OA, dont l'autre extrémité M parcourt l'ellipse donnée, et dont la direction passe constamment par le foyer F′. Donc, soit F′K perpendiculaire au rayon vecteur MF′ et coupant la normale à l'ellipse en K : KC′ est la normale au lieu géométrique du point C′. Prolongeons F′K d'une longueur égale KH ; C′ étant le milieu de F′L, LH est parallèle à C′K : donc si l'on mène CN parallèle à LH, CN est la normale au lieu géométrique des points C, ou la *normale commune*. Or, en vertu du théorème VIII, le centre de courbure Z de l'ellipse doit être sur une circonférence passant par les points C, F, et ayant son centre sur la normale commune. Il est donc la projection Z, sur la normale à l'ellipse, du point N où la normale commune est coupée par le côté SF. Mais LC étant égal à CF et par suite à NZ, LZ sera égal et parallèle à CN ; donc Z est situé sur la droite LH, et n'est autre chose que le point d'intersection de cette droite avec la normale de l'ellipse.

De là résulte une construction extrêmement simple de la normale et du centre de courbure de l'ellipse. Soient F et F′ les foyers, M le point donné, MF, MF′ les rayons vecteurs de ce point.

(*Fig. 20.*) 1° *Ayant pris sur* MF′ *une longueur* ML = MF, *la perpendiculaire* MN *au milieu de* LF *sera la normale à l'ellipse ;*

2° *Menant par le foyer* F′ *une perpendiculaire au rayon vecteur* F′M, *on prolongera cette perpendiculaire, au delà de la normale à l'ellipse, d'une longueur* KH = KF′. *La droite* LH *coupe la normale en* Z, CENTRE DE COURBURE DE L'ELLIPSE.

Cette construction très-simple présente, en outre, ces particularités assez curieuses : 1° que LZ est égal et parallèle à CN, c'est-à-dire au diamètre du cercle d'inflexion (qui est égal au cercle CFNZ et placé symétriquement par rapport au centre C); de sorte que la construction ci-dessus fait connaître en même temps le pôle d'inflexion duquel dépend la détermination des rayons de courbure des trajectoires que décrivent les points de la figure mobile.

2° Il est encore évident que LZ = FZ; *la distance du foyer au centre de courbure de l'ellipse est donc égale au diamètre du cercle d'inflexion.*

3° Enfin, LZ étant parallèle à CN, qui est la normale commune, on voit que notre *construction du centre de courbure de l'ellipse fait connaître en même temps la normale à la courbe, qui est le lieu des points* C, c'est-à-dire *au lieu géométrique des projections du foyer* F *sur les normales à l'ellipse.*

Soit D le point où C′O prolongé coupe la normale MZ : les triangles semblables MLZ, MC′K donnent :

$$MZ : MK = ML : MC' = MF : OA,$$

et les triangles semblables MF′K, MDC′ :

$$MK : MF' = MC' \text{ ou } OA : MD;$$

d'où :

$$MZ = \frac{MF.\,MF'}{MD},$$

c'est-à-dire que le *rayon de courbure de l'ellipse est une quatrième proportionnelle aux rayons vecteurs et à la distance du centre à la tangente.*

On conclut de là une nouvelle construction bien simple :

*Par le foyer* F′, *le point* L *et la projection* D *du centre de l'ellipse sur*

*la normale, faisons passer une circonférence : elle coupe la normale en Z, centre de courbure de l'ellipse.*

Pour l'hyperbole, constructions et conséquences analogues ; la parabole étant la limite des ellipses dont le grand axe croît à l'infini, on peut déduire de ce qui précède le moyen de construire son rayon de courbure, ou bien encore y arriver directement comme il suit.

(*Fig. 21.*) VI. Parabole. — Le sommet S d'un angle droit parcourt une droite UV ; un côté passe constamment par un point fixe F, l'autre côté ST enveloppe une parabole dont F est le foyer, UV la tangente au sommet. Soient C le centre instantané, M le point où ST touche son enveloppe et MCN la normale, construits d'après les règles du § 2. Il suit des théorèmes X et XV que, si l'on prend CL = CF, la perpendiculaire à LCF par le point L coupe UV au pôle d'inflexion I, et CI est la normale commune. Projetons I en I′ sur la normale à la parabole, et prenons CZ = CI′ sur cette normale. Z est le centre de courbure de la parabole. Mais le triangle MFN étant isocèle, puisque MF = SC = FN, C est le milieu de MN, donc NC = MC, et NZ = MI′ = TI = 2.MK ; d'où résulte cette construction du centre de courbure, qui me paraît la plus simple possible :

*Prolongez la normale* MN, *au delà de l'axe, d'une longueur* NZ *double de la portion* MK *de la normale comprise entre la courbe et la tangente* UV *au sommet : Z est le centre de courbure.*

On peut encore remarquer que, si l'on mène NG perpendiculaire à la normale, et coupant en G le rayon vecteur MF prolongé, on aura FG = MF ; joignons GZ, les triangles GNZ, STI sont égaux, à cause de NZ = TI et de GN = ST ; donc $\widehat{TSI} = \widehat{NGZ}$ ; mais $\widehat{TSI} = 90° - TSC = 90° - MFC = 90° - FGN$ ; donc l'angle NGZ = 90° — FGN ; l'angle FGZ est donc droit ; de là résulte une nouvelle construction extrêmement simple :

*Prolongez le rayon vecteur* MF *qui joint le point* M *au foyer d'une longueur égale* FG ; G *est la projection du centre de courbure de la parabole sur la ligne* MF.

Cette construction a été donnée pour la première fois, je pense, par M. Lamarle.

On a encore FZ = CI, c'est-à-dire la distance du foyer au centre de courbure égale au diamètre du cercle d'inflexion.

### § 14. — *Propriétés géométriques.*

Lorsque l'on considère à un instant donné les différents points d'une figure en mouvement, les trajectoires qu'ils décrivent simultanément donnent lieu, quant à leurs tangentes et à leurs centres de courbure, à un grand nombre de propriétés plus ou moins remarquables, analogues, par exemple, à celle qui fait l'objet du théorème VIII. Nous nous contenterons d'en énoncer quelques-unes :

1. *L'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points d'une même droite, est une parabole qui a pour foyer le centre instantané et pour sommet la projection de ce centre sur la droite mobile.*
2. *L'enveloppe des tangentes aux trajectoires des différents points d'une même circonférence, est une ellipse ou une hyperbole qui a pour foyer le centre instantané, et pour centre le centre même du cercle.*
3. *Le lieu des centres de courbure des trajectoires des différents points d'une même droite invariable, est une section conique qui passe au centre instantané et est tangente en ce point aux deux courbes de roulement*[1]. *Cette section conique est une ellipse, si la droite est extérieure au cercle d'inflexion; une hyperbole, si elle le coupe; une parabole, si elle lui est tangente.*

(*Fig. 22.*) Soient C le centre instantané, CB la tangente commune, I le pôle d'inflexion, AB la droite donnée. Construisons un cercle égal au cercle d'inflexion et inversement placé par rapport au centre instantané, CF parallèle à AB, coupant le cercle en F, CE perpendiculaire à AB. Joignons EF, qui coupera la normale commune en un point G, et projetons G en H sur EC. *La conique, lieu des centres de courbure des trajectoires des différents points de la droite* AB, *est tangente à* CB *en* C, *et passe par les points* F, G, H; on a donc immédiatement quatre points et une tangente, et on peut con-

[1] Ce théorème est dû à M. Rivals.

struire la conique correspondante à la droite AB, d'autant plus facilement que les cordes CF, GH sont parallèles.

4. *Les coniques correspondantes à un système de droites parallèles ont toutes deux points communs et une tangente commune, et leurs axes sont parallèles. Leurs centres sont situés sur une même hyperbole équilatère passant par le centre instantané.*

Appelons cette hyperbole la *centrale* du système de parallèles.

5. *Le lieu géométrique des centres de toutes les centrales est une circonférence dont le rayon est égal au quart du rayon du cercle d'inflexion, et qui est placée symétriquement à ce cercle par rapport au centre instantané.*

6. *Si l'on considère ensuite toutes les droites qui passent par un même point, les coniques correspondantes à ces différentes droites ont encore deux points communs et une tangente commune, et leurs centres sont sur une même section conique, qui est une ellipse, si le point donné est dans l'intérieur du cercle d'inflexion; une hyperbole, s'il est hors du cercle, et une parabole enfin, si ce point donné est sur la circonférence du cercle d'inflexion.*

Appelons cette conique la *centrale* du point donné.

*L'enveloppe des centrales des différents points d'une même droite coïncide avec la centrale du système parallèle à cette droite.*

## § 15. — *Propriétés du cercle d'inflexion relativement aux vitesses dont sont animés les points de la figure mobile.*

En désignant par V la vitesse d'un point quelconque de la figure mobile, par $\omega$ la vitesse de rotation de la figure autour de ce point, et par $u$ sa distance du centre instantané, on sait que l'on a la relation :

$$V = u\omega,$$

qui se déduit immédiatement des considérations exposées dans le premier paragraphe. Désignons par $\varepsilon$ la vitesse avec laquelle le centre instantané se

déplace sur le plan fixe, vitesse que nous appelons *vitesse de roulement*. Or, nous avons établi (§ 6) la relation suivante :

$$2\mathfrak{R} = \lim \frac{CC'}{\Omega} = \lim \frac{\frac{CC'}{\tau}}{\frac{\Omega}{\tau}},$$

$\tau$ désignant le temps infiniment petit pendant lequel le déplacement a lieu. Mais :

$$\lim \frac{CC'}{\tau} = \lim \frac{CC_1}{\tau} = \varepsilon, \quad \text{et} \quad \lim \frac{\Omega}{\tau} = \omega,$$

donc :

$$2\mathfrak{R} = \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad \text{et par suite,} \quad V = \frac{u\varepsilon}{2\mathfrak{R}}.$$

*La vitesse d'un point de la figure mobile est à la vitesse de roulement comme la distance de ce point au centre instantané est au diamètre du cercle d'inflexion.*

D'où il résulte immédiatement *que le point qui coïncide actuellement avec le pôle d'inflexion se meut avec une vitesse égale à la vitesse de roulement.*

Lorsque le centre instantané décrit une ligne droite, le diamètre $2\mathfrak{R}$ est égal au rayon de courbure de la courbe roulante : on déduira de là, par exemple, la vitesse du point décrivant dans la cycloïde ordinaire et une rectification fort simple de cette courbe.

On peut encore remarquer que, lorsque le point décrivant est un point du cercle d'inflexion, on a :

$$u = 2\mathfrak{R} \cos \varphi,$$

en désignant par $\varphi$ l'angle de la normale à la trajectoire du point M avec la normale commune. Donc, pour ce point :

$$V = \varepsilon \cos \varphi.$$

Mais la direction de la vitesse du centre instantané est perpendiculaire à la normale commune; d'autre part, la vitesse du point mobile est perpendicu-

laire à la normale à sa trajectoire; les directions de ces deux vitesses font donc entre elles un angle égal à $\varphi$; d'où je conclus que :

*La vitesse de roulement projetée sur la tangente à la trajectoire d'un point du cercle d'inflexion, est en grandeur et en direction la vitesse de ce point.*

§ 16. — *Autres propriétés du cercle d'inflexion.*

En général, le cercle d'inflexion se déplace, non-seulement sur le plan fixe, mais aussi sur la figure en mouvement; cependant, s'il arrive qu'un point de la figure en mouvement soit, dans toutes les positions de celle-ci, sur la circonférence du cercle d'inflexion, le rayon de courbure de sa trajectoire étant constamment infini, ce point décrira une ligne droite, et il est évident que cette condition est d'ailleurs nécessaire.

Or, cette condition s'exprime facilement par l'analyse, en rapportant la courbe roulante à un système de coordonnées polaires considéré comme lié invariablement avec elle et ayant pour pôle le point décrivant que l'on considère. Soient alors $u$ le rayon vecteur, $\theta$ l'angle polaire, compté à partir d'une droite déterminée dans la figure en mouvement, $s$ l'arc de la courbe, compté à partir d'un certain point de celle-ci, et $\mu$ l'angle que fait le rayon vecteur avec la tangente à la courbe au centre instantané.

Le point décrivant étant sur le cercle d'inflexion, son rayon vecteur $u$ satisfait à l'équation :

$$u = 2\mathfrak{R} \sin \mu.$$

Or, on sait qu'en général :

$$\frac{\sin \mu}{u} = \frac{d\theta}{ds};$$

de plus, comme

$$\frac{1}{2\mathfrak{R}} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R},$$

et que le rayon de courbure $R'$ de la courbe roulante est donné par l'équation :

$$\frac{1}{R'} = \frac{d\mu}{ds} + \frac{d\theta}{ds},$$

il vient, réductions faites :

$$\frac{d\mu}{ds} - \frac{1}{R} = o.$$

Or, R, rayon de courbure de la courbe fixe, est une fonction donnée de l'arc de cette courbe, ou, ce qui revient au même, de l'arc $s$ de la courbe roulante (puisque les arcs correspondants de ces deux courbes sont toujours égaux). Cette équation peut donc être regardée comme l'équation différentielle de la courbe roulante entre l'angle $\mu$ et l'arc $s$, et, par l'intégration, elle donnera la solution de cette question : *Quelle doit être la courbe qui roule sur une courbe donnée, pour qu'un point lié invariablement à la première décrive une droite.*

Par exemple, supposons que la courbe fixe soit une droite, R est infini, on a donc :

$$\frac{d\mu}{ds} = o, \quad \mu = \text{const}, \quad \text{tang}\,\mu = u\,\frac{d\theta}{du} = \text{const} = a, \quad \frac{du}{u} = \frac{d\theta}{a},$$

et en intégrant :

$$l.\,u = \frac{\theta}{a} + c.$$

C'est l'équation d'une spirale logarithmique : $a$, $c$ sont deux constantes à déterminer d'après les positions initiales du point et du centre instantané. On retrouve donc ce théorème de Lahire :

*Lorsqu'une spirale logarithmique roule sur une ligne droite, son pôle décrit une autre ligne droite.*

La méthode qui vient d'être indiquée est toutefois très-incommode et exige que l'on fasse souvent plusieurs intégrations, et que l'on tienne compte du signe de R. On peut résoudre le même problème par une marche beaucoup plus simple, comme il suit :

(*Fig. 23.*) Soient AC la courbe fixe, BC la courbe roulante dans une position quelconque, C le centre instantané, M le point décrivant, MX la droite qu'il décrit et qui sera visiblement perpendiculaire à CM. A, O étant les positions initiales respectives du centre instantané et du point décrivant, rap-

portons la courbe fixe aux axes rectangulaires OX, OA, et soient $(x, y)$ les coordonnées du point C dans ce système d'axes. Rapportons de même la courbe roulante au pôle M et à l'axe polaire MB (B étant la position initiale du centre instantané dans la figure mobile), ce pôle et cet axe étant emportés dans le mouvement de la courbe roulante et liés avec elle; et soient $u = \text{MC}$, $\theta = \text{BMC}$ les coordonnées polaires du point C dans ce système. Enfin, après un temps infiniment petit, soient $C_1$ le centre instantané, $M_1$ le point décrivant et C′M la droite qui vient en $C_1M_1$. D'après le paragraphe précédent, la vitesse V du point décrivant est donnée par la formule : $V = u\omega$; $\omega$ exprimant la vitesse de rotation de la figure autour du point M. Mais il est clair que

$$V = \lim \frac{MM_1}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

que la rotation infiniment petite $\Omega$ est ici égale à CMC′ ou $\Delta\theta$, en sorte que

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

donc on a :

$$dx = u d\theta,$$

et comme $u = y$,

$$d\theta = \frac{dx}{y}.$$

L'équation de la courbe fixe donnera :

$$dx = \varphi(y)\, dy,$$

et la précédente devient :

$$d\theta = \frac{\varphi(y)\, dy}{y} = \frac{\varphi(u)\, du}{u},$$

d'où il résulte qu'une simple intégration donnera l'équation entre $u$ et $\theta$ de la courbe roulante.

*Applications.* — 1. Quelle est la courbe qu'il faut faire rouler *extérieurement* sur une hyperbole équilatère, pour que le centre de celle-ci, supposé lié invariablement à la courbe roulante, décrive l'axe imaginaire ?

On a ici, $a$ étant le demi-axe réel :

$$y^2 - x^2 = a^2, \quad ydy = xdx, \quad dx = \frac{ydy}{x},$$

$$d\theta = \frac{dy}{x} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}, \quad \text{d'où} \quad \theta = l.(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + \mathrm{C},$$

A l'origine du mouvement, $\theta = o$, $u = a$, donc $\mathrm{C} = -l.\, a$ et :

$$\theta = l.\left(\frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a}\right), \quad u = \frac{a}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right).$$

Cette courbe présente cette particularité, que son équation en coordonnées polaires est analogue à celle de la chaînette en coordonnées rectangulaires. Si l'on construit deux spirales logarithmiques égales entre elles, inversément placées autour du centre de l'hyperbole comme pôle, et ayant pour équations respectives :

$$u = ae^{\theta}, \quad u = ae^{-\theta},$$

la courbe cherchée sera le lieu des points milieux des cordes menées du pôle commun et comprises entre ces deux spirales.

2. — Cherchons maintenant *la courbe qui doit être liée au sommet* B *du petit axe, pour qu'en faisant rouler intérieurement cette courbe sur l'ellipse, le point* B *décrive le petit axe.*

On a ici, $a$ et $b$ étant les demi-axes :

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{(x-b)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{ydy}{a^2} + \frac{(x-b)dx}{b^2} = o,$$

$$dx = -\frac{b^2 y}{a^2}\frac{dy}{x-b} = \pm\frac{b^2}{a^2}\frac{y\,dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)b^2}} = \pm\frac{b}{a}\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

d'où

$$d\theta = \frac{b}{a}\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}},$$

$d\theta$ étant positif. En intégrant et observant que $u = o$ donne $\theta = o$, on a :

$$\theta = \frac{b}{a}\arcsin\frac{u}{a}, \quad \text{ou} \quad u = a\sin\frac{a}{b}\theta,$$

ce qui est l'équation de la courbe cherchée en coordonnées polaires.

Lorsque l'on suppose $a = b$, l'ellipse devient un cercle ; l'équation de la courbe roulante est alors : $u = a \sin \theta$, elle représente un cercle de diamètre $a$; en sorte que, si *un cercle roule intérieurement sur un autre cercle de rayon double, un point de la circonférence du cercle roulant décrit une ligne droite.* C'est un autre théorème de Lahire bien connu.

3. — Prenons maintenant pour courbe fixe la parabole, plaçons la position initiale du centre instantané au sommet de la courbe, et cherchons quelle doit être la courbe roulante pour que le point qui coïncide d'abord avec le sommet décrive l'axe de la parabole. — On a dans le cas actuel :

$$y^2 = 2px, \quad ydy = pdx, \quad d\theta = \frac{ydy}{py} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{p},$$

d'où, $\theta$ étant nul en même temps que $u$ :

$$\theta = \frac{u}{p}, \quad u = p\theta$$

sera l'équation de la courbe cherchée. De là résulte ce théorème curieux qui, je pense, n'avait pas encore été remarqué :

*Si l'on place au sommet d'une parabole le pôle d'une spirale d'Archimède, dont le paramètre vaut la moitié de celui de la parabole, et si l'on fait rouler intérieurement la spirale sur la parabole, le pôle de la spirale décrira l'axe de la parabole.*

Considérons pour dernier exemple la cycloïde, en prenant toujours la position initiale du centre instantané et du point décrivant en un point où la cycloïde coupe sa base; celle-ci est la droite décrite. On sait que l'on a dans ce cas :

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

$a$ étant le rayon du cercle générateur.

D'où

$$d\theta = \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}},$$

et en intégrant :

$$\theta = 2 \text{ arc sin} \sqrt{\frac{u}{2a}};$$

la constante est nulle, parce que $u$ et $\theta$ s'évanouissent en même temps.

On tire de là immédiatement :

$$u = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2} = a(1 - \cos\theta),$$

équation qui représente une épicycloïde dont le cercle fixe et le cercle roulant sont égaux et ont pour diamètre $a$. De là résulte cette autre proposition que je crois également nouvelle :

(*Fig. 24.*) *Étant donnée une épicycloïde, décrite par un point d'un cercle qui roule extérieurement sur un cercle de rayon égal, et une cycloïde indéfinie dont le cercle générateur a un diamètre double des précédents, si l'on place le point de rebroussement de l'épicycloïde sur l'un des points de rebroussement de la cycloïde, et qu'on fasse rouler intérieurement la première sur la seconde, le point de rebroussement de l'épicycloïde décrira une droite indéfinie qui coïncide avec la base de la cycloïde.*

Enfin, une dernière conséquence qui résulte des considérations précédentes, est celle-ci : le point qui décrit une ligne droite appartient au cercle d'inflexion, en sorte que le pôle d'inflexion est au point de rencontre de la normale commune et de la droite que décrit le point mobile. Si donc on connaît le centre de courbure de la courbe fixe, on construira facilement le centre de courbure de la courbe roulante au moyen du théorème V; si l'on connaissait celui de la courbe roulante, on en déduirait celui de la courbe fixe. De là résulte encore un nouveau moyen de déterminer les centres de courbure.

*Exemple.* — Dans la spirale logarithmique roulant sur une droite, le pôle d'inflexion est au point de rencontre de la normale commune et de la droite

décrite par le pôle, laquelle est perpendiculaire au rayon vecteur du centre instantané. Or, le rayon de courbure de la courbe fixe est infini : donc le centre de courbure de la courbe roulante coïncide avec le pôle d'inflexion, donc, dans la spirale logarithmique, le rayon de courbure est égal à la normale : ce qui est la propriété connue.

Dans notre dernier exemple, le rayon de courbure de la cycloïde étant double de la normale, il en résulte que le pôle d'inflexion est ici à égale distance du centre instantané de rotation et du centre de coubure de la courbe fixe : donc, en vertu du théorème V, *le rayon de courbure de l'épicycloïde* est le tiers de celui de la cycloïde; ou, ce qui revient au même, *il vaut les deux tiers de la normale, terminée à la perpendiculaire au rayon vecteur menée par l'origine de l'épicycloïde.*

On peut déduire également du théorème relatif à la spirale et à la parabole, une construction géométrique du centre de courbure de la spirale; mais elle est moins simple que celle que nous avons déjà donnée.

## § 17. — *Note sur les aires des roulettes.*

Proposons-nous d'évaluer l'aire comprise entre la trajectoire d'un point de la figure mobile, la courbe fixe, et deux normales quelconques à la trajectoire.

Pour cela, je remarque que la normale à la trajectoire du point M peut être considérée comme animée d'un double mouvement à chaque instant : un mouvement de rotation autour du point mobile, en vertu duquel elle se déplace relativement à la figure en mouvement, et un mouvement de rotation autour du centre instantané, en vertu duquel elle tourne avec tout le système mobile autour de ce centre, avec une vitesse égale à la vitesse actuelle de rotation de la figure mobile autour de son centre instantané. Or, par le premier de ces mouvements, elle décrit précisément l'aire comprise, sur la figure mobile, entre sa position primitive, sa position actuelle et la courbe roulante; par le second, elle décrit une aire qui est celle d'une courbe formée, en prenant pour rayon vecteur la longueur variable de la normale

du centre instantané au point décrivant, et pour angle polaire la rotation correspondante de la figure à partir de sa position primitive. La somme de ces aires, si les deux mouvements de la normale ont lieu en sens contraire, leur différence, s'ils ont lieu dans le même sens, donne précisément l'aire cherchée. D'où résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Désignons par* $\Sigma$ *l'aire comprise entre la courbe fixe, la trajectoire d'un point et deux normales à cette dernière; par* U *le secteur compris, sur la figure mobile, entre les positions correspondantes de ces normales et la courbe roulante; par* V, *enfin, le secteur correspondant dans une courbe décrite en prenant pour rayon vecteur la normale variable à la trajectoire et pour angle polaire l'angle dont la figure mobile a tourné à partir de sa position primitive jusqu'à la position que l'on considère. On aura*

$$\Sigma = U \pm V,$$

*suivant que la rotation de la normale dans la figure mobile et sa rotation autour du centre instantané, ont lieu en sens contraire ou dans le même sens.*

On arrive au même résultat par la considération de l'aire infiniment petite, décrite par la normale entre deux positions infiniment voisines de la figure mobile.

Le théorème précédent permet d'obtenir très-facilement et sans aucune intégration, des aires qu'il serait peut-être très-long de calculer par les méthodes ordinaires. Nous allons en voir quelques exemples :

1. *Cycloïde.* — Soient (*fig. 25*) M le point décrivant, supposé dans l'intérieur du cercle roulant; A, A' les points primitivement en contact; $M_1$ la position correspondante du point M; MC la normale actuelle et O le centre du cercle roulant : l'aire U est ici le secteur circulaire A'MC. L'angle de rotation de la figure, depuis sa position primitive, est égal à l'angle du centre O ou à la différence des angles A'MC, MCO. Donc, l'aire V sera égale à la différence de l'aire décrite, en prenant pour rayon vecteur la normale variable CM, et pour angle polaire A'MC, c'est-à-dire de l'aire A'MC ou U, et de l'aire décrite en prenant pour rayon vecteur la normale, et pour angle polaire l'angle MCO;

ce qui est évidemment l'aire MCB comprise entre CO, CM et la circonférence de rayon OM décrite du centre O; et comme

$$\text{surf. MCB} = \text{surf. A'MCB} - \text{surf. A'MC},$$

on en conclut que *l'aire comprise entre la cycloïde allongée* $M_1M$, *sa base* AC *et les normales* $M_1A$, MC, *est égale à trois fois l'aire du secteur circulaire* A'MC, *moins l'aire* A'MBC *comprise entre les positions correspondantes de ces mêmes normales dans le cercle roulant, et les circonférences de rayons* OA', OM. En désignant donc par $\Sigma$ l'aire A'MBC, par $a$, $b$ les rayons respectifs OA', OM, et par $\omega$ l'angle O dont le cercle mobile a tourné autour de son centre, on a

$$\Sigma = \left(a^2 + \frac{b^2}{2}\right)\omega - \frac{3}{2}ab \sin \omega.$$

Après une révolution entière du cercle générateur, U est égal à l'aire A du cercle lui-même, l'aire A'MBC est égale à l'aire de la couronne comprise entre les deux cercles; en désignant par B l'aire du petit cercle, on a donc :

$$\Sigma = 3A - (A - B) = 2A + B.$$

*L'aire d'une cycloïde allongée, correspondante à une révolution entière du cercle générateur, est donc égale à deux fois l'aire du cercle générateur, augmentée de l'aire du cercle que décrit le point mobile autour de son centre.*

Dans la cycloïde ordinaire, le point décrivant est sur la circonférence du cercle roulant, l'aire A'MBC est donc nulle :

*L'aire comprise entre la cycloïde, sa base et une normale quelconque, est triple de l'aire du segment retranché dans le cercle roulant par cette normale.*

Après une révolution complète, on retrouve le théorème ordinaire :

$$\Sigma = 3A.$$

(*Fig. 26.*) *Épicycloïde.* — Soient O, O′ les centres respectifs du cercle fixe et du cercle roulant, C le centre instantané, M le point décrivant et MC la normale à sa trajectoire; A, A′ enfin les points en contact à l'origine du mouvement, et BM l'arc de cercle de rayon O′M décrit du centre O′. L'aire U est toujours le secteur A′MC. Les arcs AC, A′C étant égaux, les angles O et O′ sont en raison inverse des rayons R et R′, et la rotation totale à partir de l'origine, qui a pour expression $O + O'$, devient

$$O' + \frac{O'R'}{R} = \frac{R + R'}{R} O'.$$

L'angle en O′ est, d'ailleurs, la différence des angles A′MC, MCO′, d'où il résulte, par un raisonnement exactement semblable à celui que nous avons fait pour la cycloïde, que, si l'on désigne par S l'aire A′MBC comprise entre les arcs CA′, BM et les rayons O′A′, O′C, on aura pour expression de l'aire désignée par V :

$$\frac{R + R'}{R} (2U - S),$$

et, par conséquent, l'aire Σ, comprise entre l'épicycloïde, le cercle fixe et les normales AO, CM, est donnée par l'équation

$$\Sigma = U + \frac{R + R'}{R} (2U - S).$$

Après une révolution complète du cercle roulant, U est égal à l'aire A de ce cercle, et S à A — B, B désignant l'aire du cercle que décrit le point M autour du centre O′ : on a donc, pour l'aire totale de l'épicycloïde correspondante à une révolution entière du cercle roulant,

$$\Sigma = A + \frac{R + R'}{R} (A + B).$$

On passe très-facilement de là aux expressions algébriques de ces aires, comme pour la cycloïde.

Dans l'épicycloïde ordinaire, le point décrivant étant sur la circonférence du cercle roulant, $S = 0$, et l'on a, pour l'aire terminée à une normale quelconque

$$\Sigma = \frac{3R + 2R'}{R} U.$$

Donc, *l'aire comprise entre l'épicycloïde ordinaire, sa base et une normale quelconque, est au segment du cercle roulant retranché par cette normale, comme trois fois le rayon du cercle fixe, plus deux fois le rayon du cercle mobile, est au rayon du cercle fixe.*

Après une révolution complète, $U = A$.

Lorsque le cercle roulant est intérieur au cercle fixe, le signe de $R'$ seul est changé; et l'on déduit facilement des théorèmes généraux qui précèdent l'aire de l'ellipse.

FIN.

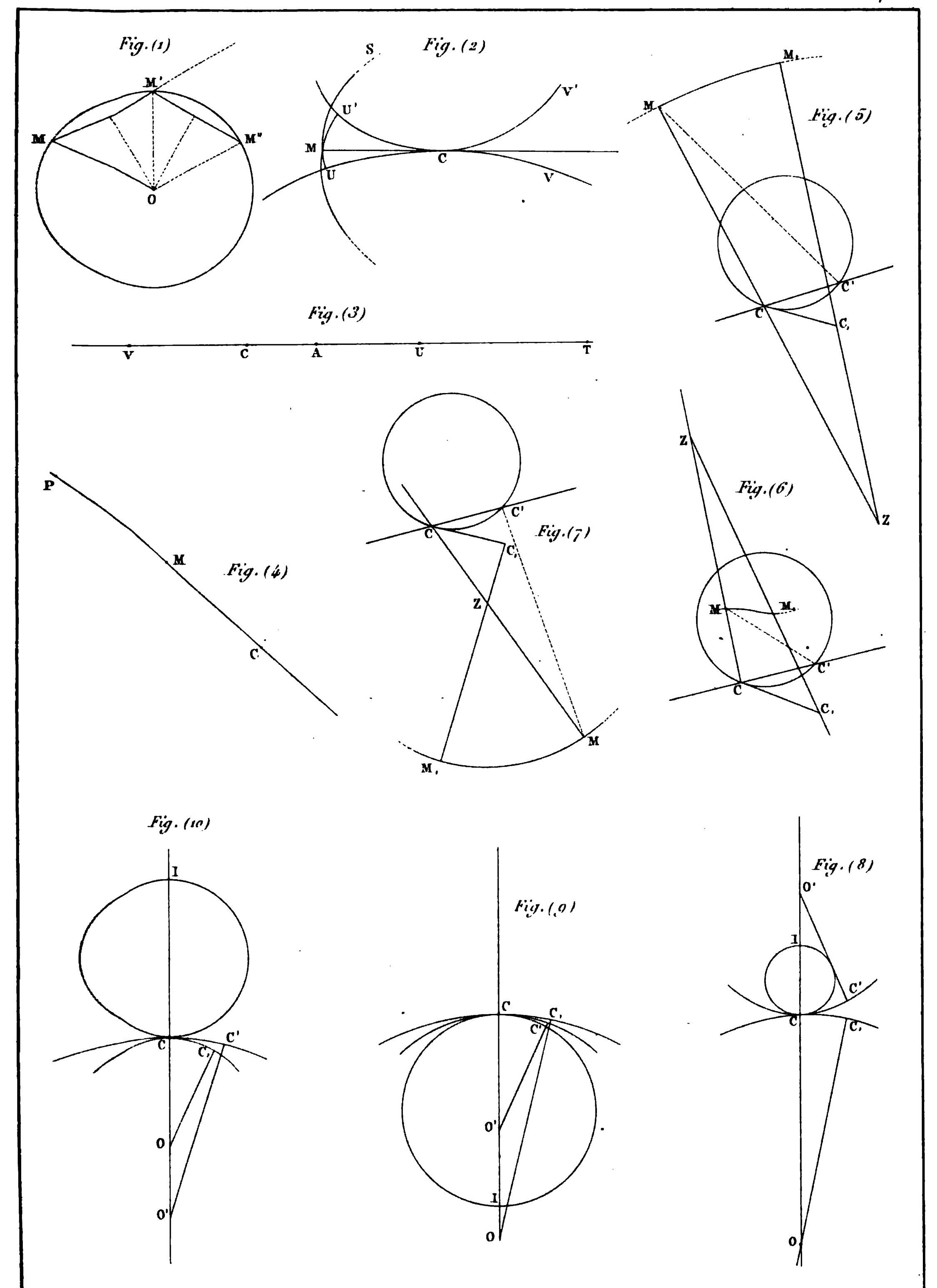


Fig. (1)
M'
M
M"
O
Fig. (2)
S
U'
V'
M
C
U
V
Fig. (3)
V
C
A
U
T
Fig. (4)
P
M
C
Fig. (5)
M
C'
C
Z
Fig. (6)
Z
M
C'
C
Fig. (7)
C'
C
Z
M
Fig. (8)
O'
I
C'
C
O
Fig. (9)
C
C'
O'
I
O
Fig. (10)
I
C
C'
O
O'

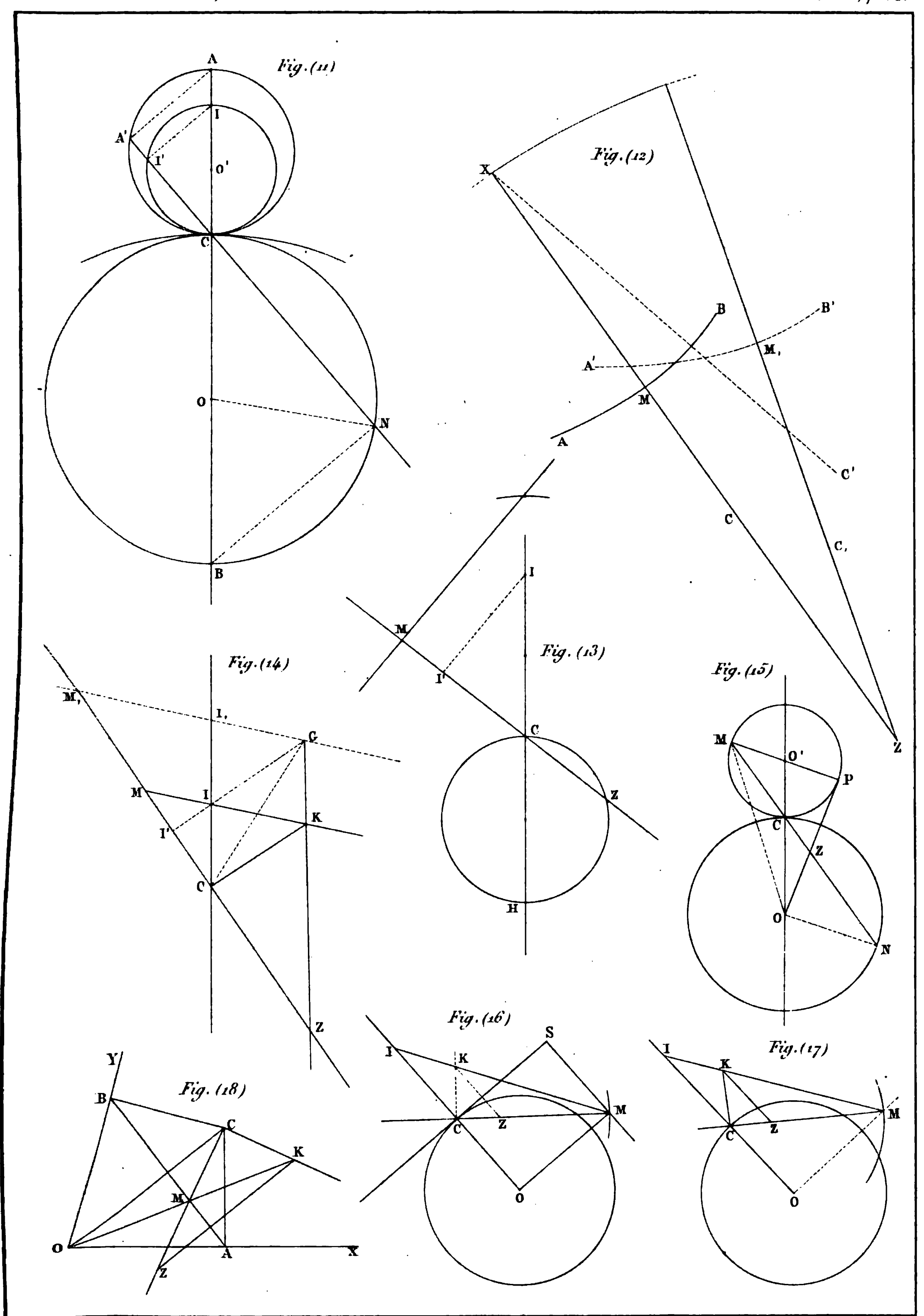
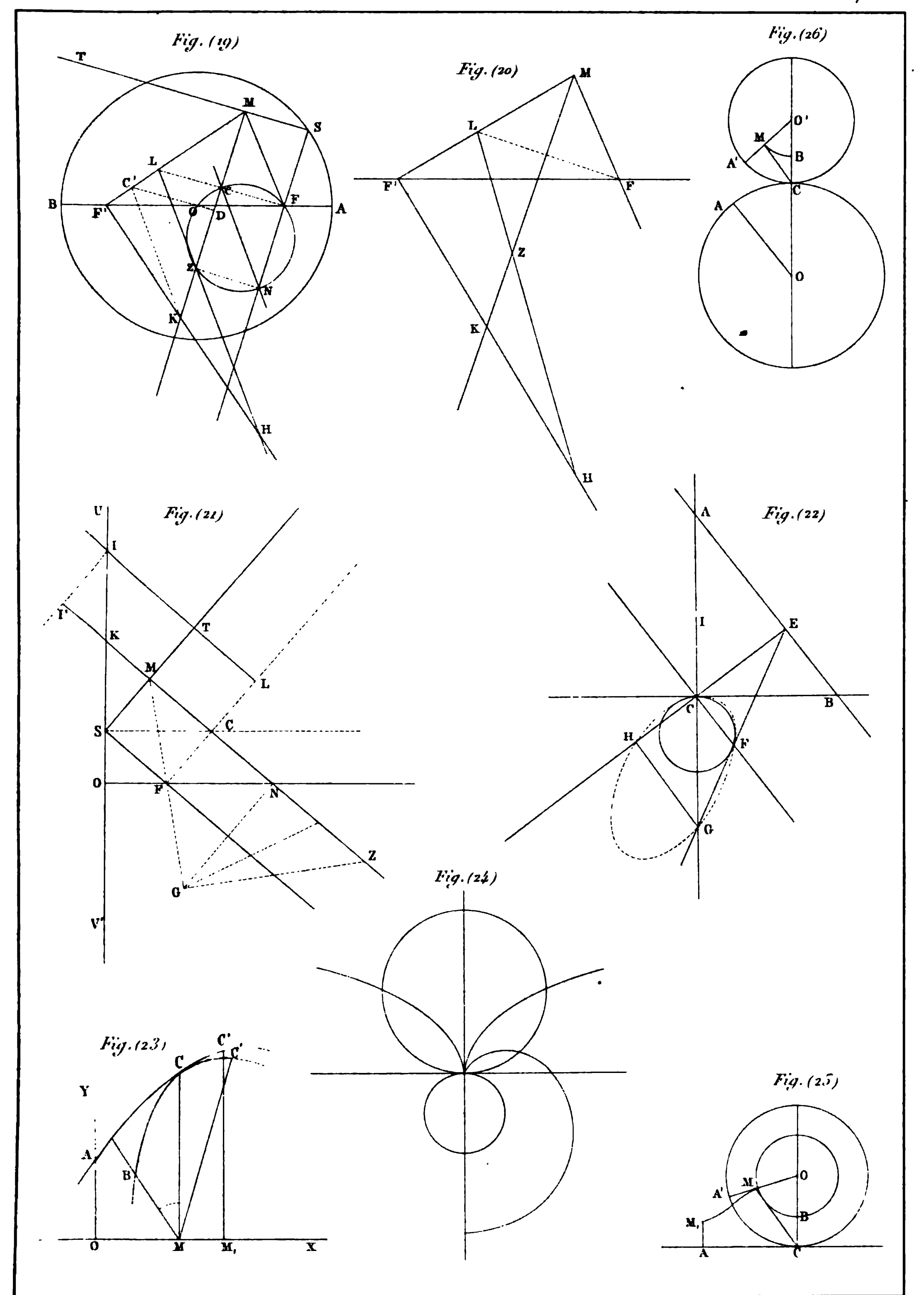


Fig. (11)
A
A'
I
I'
O'
C
O
N
B
Fig. (12)
X
B
B'
A'
M,
M
A
C'
C
C,
Z
Fig. (13)
M
I
I'
C
Z
H
Fig. (14)
M,
I,
C,
M
I
K
I'
C
Z
Fig. (15)
M
O'
P
C
Z
O
N
Fig. (16)
S
I
K
C
Z
M
O
Fig. (17)
I
K
C
Z
M
O
Fig. (18)
Y
B
C
K
M
O
A
X
Z


Fig. (19)
Fig. (20)
Fig. (26)
Fig. (21)
Fig. (22)
Fig. (24)
Fig. (23)
Fig. (25)

# EXPOSÉ

D'UN

# PRINCIPE CONCERNANT L'INTERSECTION DES SURFACES,

AVEC

## APPLICATION A LA RECHERCHE DE PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR

**F. MEIER,**

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES.

---

(Présenté en la séance du 1er août 1857.)

# EXPOSÉ

D'UN

# PRINCIPE CONCERNANT L'INTERSECTION DES SURFACES,

AVEC

APPLICATION A LA RECHERCHE DE PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

## OBJET DE CE MÉMOIRE.

1. On connaît diverses solutions du problème : *Reconnaître si une courbe représentée par ses deux équations*

$$\varphi\,(x,\, y,\, z) = o,$$
$$\varphi_1\,(x,\, y,\, z) = o,$$

est *plane* ou *gauche*.

L'angle de torsion $\theta$ d'une courbe a pour expression :

$$\theta = \frac{dx\, ds\, (d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y)}{(d^2y^2 + d^2z^2)\,(dy\, d^2z - dz\, d^2y)^2}.$$

Si cet angle en chaque point de la courbe est nul, c'est-à-dire si l'on a :

$$d^2y\, d^3z - d^2z\, d^3y = o,$$

quelle que soit la variable $x$, elle est *entièrement plane*.

Quelque ingénieuse que soit cette méthode, elle conduit, dans l'application à des cas même très-simples, à des opérations compliquées.

Il suffit, pour s'en convaincre, d'en faire usage dans le cas suivant, un des plus simples de l'intersection de deux surfaces :

La sphère construite sur l'axe moyen d'un ellipsoïde, comme diamètre, coupe cette surface suivant les deux sections circulaires, dont les plans passent par l'origine.

2. Bossut, dans son *Traité de calcul différentiel*, page 146, pose la même question et en donne la solution suivante :

« Il est évident, dit-il, que la courbe sera plane, lorsque l'équation de
» l'une des courbes de projection est à la simple droite. La question est donc
» d'examiner si, par l'élimination de l'une des trois variables $x$, $y$, $z$, on
» trouve entre les deux autres une équation du premier degré. »

Parmi l'infinité de cas qui peuvent se présenter, cette solution ne s'applique qu'à celui où la courbe se trouverait dans un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection; dans tous les autres cas, la courbe peut être plane sans satisfaire à cette condition.

3. Au sujet de la même question, voici une solution extraite des *Correspondances sur l'École polytechnique :*

$$\varphi\,(x,\ y,\ z) = o,$$
$$\varphi_1\,(x,\ y,\ z) = o,$$

étant les équations de deux surfaces.

Éliminant une des variables $z$, par exemple, entre ces équations, on trouve :

$$\mathrm{F}\,(x,\ y) = o.$$

Cela posé, si l'intersection des surfaces est plane, elle peut être déterminée par l'intersection de l'une d'elles avec un plan :

$$\psi\,(x,\ y,\ z) = o.$$

Éliminant $z$ entre cette équation et l'une des proposées, on devra trouver un résultat identique avec :

$$\mathrm{F}\,(x,\ y) = o.$$

Or, l'élimination d'une des variables entre des équations dépassant le second degré devient très-compliquée.

Si les surfaces sont du second ordre, il s'introduira, en général, des radicaux dans l'équation résultante, ce qui rend la solution laborieuse.

Pour s'en convaincre, on pourra résoudre la question :

Dans quel cas deux surfaces du second ordre, aux axes principaux parallèles, se coupent-elles suivant des courbes planes?

4. Une autre solution de la question serait de chercher le plan osculateur de la courbe en un point quelconque. Si la courbe est plane, le plan osculateur est celui de la courbe.

J'ai indiqué ce moyen ailleurs, dans la discussion d'une courbe particulière.

Cette méthode ne s'applique généralement avec avantage que dans les questions de mécanique, où il s'agit de la trajectoire d'un point dont les coordonnées sont des fonctions explicites du temps.

Elle s'applique d'ailleurs plus avantageusement que celle par l'angle de torsion, parce qu'elle fait en même temps connaître le plan de la courbe.

5. Passons à une dernière méthode, qui sert en géométrie descriptive pour résoudre la même question :

Si le cône ayant pour sommet un point de la courbe, et pour directrice la courbe même, se réduit à un ou plusieurs plans, la courbe est plane. Or, si l'on excepte les cas les plus particuliers, cette méthode n'est guère applicable en géométrie analytique.

Telles sont les méthodes dont on s'est servi pour juger si une courbe donnée est plane ou gauche.

6. J'indiquerai, plus loin, une méthode qui est, en général, *plus simple, plus sûre et plus expéditive* que celles que je viens d'exposer.

Si les équations de la courbe sont rationnelles, l'emploi de cette méthode ne conduira jamais à des résultats dans lesquels les variables se trouvent engagées sous des radicaux.

Elle fournit en même temps les équations des plans, qui contiennent la courbe d'intersection des surfaces.

L'emploi de cette méthode m'a conduit à une théorie *plus simple* et *plus*

*complète* des sections circulaires, que celle par la transformation des coordonnées.

Elle m'a permis, en outre, de découvrir une suite de nouvelles propriétés, ainsi que de démontrer plus simplement d'autres propriétés déjà connues. En tout cas, la plupart des propriétés que j'exposerai n'ont, à ce que je sache, été énoncées nulle part.

7. La connaissance de l'espèce de la courbure d'une ligne est d'une grande importance. Chaque courbe prise sur une surface peut engendrer cette surface, si son mouvement et sa déformation sont exprimés par un nombre suffisant de lois. Ces lois sont les plus simples, si la courbe génératrice est plane.

En considérant cette courbe comme l'intersection de deux surfaces, je ferai voir, à ce sujet, quelles sont les lois auxquelles il faut assujettir le mouvement d'un plan et d'une sphère, pour engendrer les surfaces du second ordre admettant des sections circulaires.

L'exposition de ces recherches formera l'objet de ce mémoire.

## SECTION I.

### PRINCIPES ET PROBLÈMES GÉNÉRAUX.

8. *Lemme fondamental.*

$$\varphi\ (x, y, z) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\varphi_1 (x, y, z) = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

*étant les équations de deux surfaces, pour que leur intersection soit comprise dans un plan :*

$$Ax + By + Cz + D = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

*il faut qu'en éliminant une des trois variables entre* (1) *et* (3), *puis entre* (2) *et* (3), *on obtienne des résultats identiques.*

En effet, l'une et l'autre des deux équations résultantes représentent le même cylindre.

REMARQUE. — Si *l'intersection est comprise dans plusieurs plans, il y aura plusieurs systèmes de valeurs de* A, B, C, D *propres à satisfaire à ce lemme.*

9. *Problème général.*

(1) *et* (2) *étant les équations de deux surfaces d'ordres quelconques, reconnaître si l'intersection de ces deux surfaces est comprise dans un ou plusieurs plans. Et déterminer ces plans.*

*Solution.* — Soit

$$z = Lx + My + N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

l'équation d'un plan, L, M, N étant des coefficients indéterminés. On éliminera une des variables, $z$, par exemple, entre (1) et (4), puis entre (2) et (4); on ordonnera les équations résultantes par rapport à X et Y, et l'on égalera les coefficients perspectifs de l'une aux coefficients correspondants de l'autre, multipliés par une constante K.

Cela fait, on obtient un certain nombre d'équations de la forme :

$$\Pi\,(L, M, N, \gamma) = K\Xi\,(L, M, N, \gamma_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dans laquelle $\gamma$ et $\gamma_1$ sont des fonctions des péramètres des surfaces.

*Quatre de ces équations serviront à déterminer* K, L, M *et* N; *substituant les valeurs trouvées dans les équations restantes de* (5), *on aura, entre les paramètres des surfaces, les conditions proprement dites pour que l'intersection soit plane.*

REMARQUE I. — Au lieu de l'équation (4), on pourra employer l'une ou l'autre des formes :

$$x = L'z + M'y + N'$$
$$y = L''z + M'x + N''.$$

REMARQUE II. — Si l'on ne peut pas satisfaire aux équations de condition, on conclura que la courbe ne peut être plane.

REMARQUE III. — Les valeurs de L, M, N pourront être imaginaires ou

infinies. Dans ce cas, on conclura, ou bien que l'intersection ne peut être plane, ou bien que l'équation (4) n'est pas la forme propre de l'équation du plan qu'il fallait employer.

On emploiera alors l'équation (3), dans laquelle on supprime plusieurs constantes.

10. *Application aux surfaces du second ordre.*

$$\varphi = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cx + C'y + C''z + D = o \quad (6)$$
$$\varphi_1 = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + byz + b'xz + b''xy + cx + c'y + c''z + d = o \quad (7)$$

L'élimination de $z$ entre (4) et (6) donne :

$$\left.\begin{aligned} &(A + A''L^2 + B'L)\,x^2 + (A' + A''M^2 + BM)\,y^2 + (2A''LM + B'' + B'M + BL)\,xy \\ &\quad + (2A''LN + B'N + C + C''L)\,x + (2'A''MN + BN + C' + C''M)\,y \\ &\quad + (D + A''N^2 + C''N) = o. \end{aligned}\right\} (8)$$

Le résultat de l'élimination de $z$ entre (4) et 7 s'obtient en changeant, dans l'équation précédente, les grandes lettres en petites.

Partant, les équations (5) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} A + A''L^2 + B'L &= K\,(a + a''L^2 + b'L) \\ A' + A''M^2 + BM &= K\,(a + a''M^2 + bM) \\ 2A''LM + B'' + B'M + BL &= K\,(2a''LM + b'' + b'M + bL) \\ 2A''LN + B'N + C + C''L &= K\,(2a''LN + b'N + c + c''L) \\ 2A''MN + BN + C' + C''M &= K\,(2a''MN + bN + c' + c''M) \\ D + A''N^2 + C''N &= K\,(d + a''N^2 + c''N) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\lambda).$$

Quatre de ces équations fourniront K, L, M, N, et l'élimination de ces quatre quantités entre les équations ($\lambda$) fournira les conditions auxquelles doivent satisfaire les vingt constantes qui figurent dans les équations (6), (7).

Dans chaque cas particulier, on n'aura qu'à remplacer, dans les équations $\lambda$, les constantes générales par leurs valeurs particulières.

11. Avant de procéder à ces cas particuliers, je déduirai quelques conséquences immédiates de ces équations.

On peut les mettre sous la forme :

$$\left.\begin{array}{l}
L^2(A''-Ka'')+L\,(B'-Kb')=Ka-A\\
M^2(A''-Ka'')+M\,(B-Kb')=Ka'-A\\
2ML\,(A''-Ka'')+L\,(B-Kb)+M\,(B'-Kb')=Kb''-B''\\
2LN\,(A''-Ka'')+L\,(C''-Kc'')+N\,(B'-Kb')=Kc-C\\
2MN\,(A''-Ka'')+M\,(C''-Kc'')+N\,(B-Kb)=Kc'-C'\\
N^2(A''-Ka'')+N\,(C''-Kc'')=Kd-D.
\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

Si les surfaces sont semblables, K étant le rapport de similitude, on a :

$$A''-Ka''=o,\; A'-Ka'=o,\; A-Ka=o.$$
$$B''-Kb''=o,\; B'-Kb'=o,\; B-Kb=o.$$

Les équations précédentes se réduisent, dans ce cas, à

$$L\,(C''-Kc'')=Kc-C,$$
$$M\,(C''-Kc'')=Kc'-C',$$
$$N\,(C''-Kc'')=Kd-D,$$

et l'équation du plan, qui contient l'intersection, devient dans ce cas :

$$(C-Kc')\,x+(C'-Kc')\,y+(C''-Kc'')\,z+D-Kd=o.\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

De là on conclut :

*Si les deux surfaces* (6) *et* (7) *sont semblables de forme et de position, l'intersection sera plane et le plan unique qui la contient est représenté par l'équation* (9).

Si l'on ajoute les équations (8) et qu'on divise par $A''-Ka''$, il vient :

$$(L+M+N)^2+S\,(L+M+N)+T,$$

ou bien

$$L+M+N=-\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-T}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

en posant

$$S=\frac{R-Kb+B'-Kb'+C''-Kc''}{A''-Ka''},$$

$$T=\frac{A-Ka+A'-Ka'+B''-Kb''+C-Kc+C'-Kc'+D-Kd}{A''-Ka''}.$$

Par là on voit que, si L, M, N sont regardés comme variables, l'équation (10) est celle de deux plans également inclinés sur les trois axes, si l'on regarde L, M, et N comme coordonnées courantes. Ainsi :

*Si l'on faisait varier les paramètres des surfaces* (6), (7) *par toutes les valeurs possibles, compatibles avec la condition que l'intersection soit plane, les paramètres des plans qui contiennent l'intersection se trouveraient être les coordonnées de l'un ou de l'autre des plans renfermés dans l'équation* (10).

## SECTION II.

### INTERSECTION DE LA SPHÈRE AVEC LES AUTRES SURFACES DU SECOND ORDRE.

12. Remarque générale. — *Si une sphère coupe une surface suivant une ligne plane, cette ligne est une circonférence de cercle. Ainsi cette théorie renferme, comme cas particulier, celle des sections circulaires.*

Je considérerai en premier lieu l'intersection de la sphère avec l'ellipsoïde, après quoi je n'aurai qu'à changer les signes d'un ou de deux de ses paramètres, pour avoir des propriétés correspondantes des hyperboloïdes.

### § 1. — Intersection de la sphère avec l'ellipsoïde.

#### A. *Application immédiate des formules* (λ).

13. Soit

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

l'équation d'un ellipsoïde rapportée à son centre et à ses axes principaux,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = R^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \quad \ldots \quad (2)$$

sera l'équation d'une sphère quelconque ayant son centre au point $(\alpha, \beta, \gamma)$.

Les conditions $(\lambda)$ de l'intersection plane deviennent, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned} P + P''L^2 &= K(1 + L^2) \\ P' + P''M^2 &= K(1 + M^2) \\ 2P''ML &= 2KML \\ 2P''LN &= 2K(LN - \alpha - \gamma L) \\ 2P''MN &= 2K(MN - \beta - \gamma M) \\ P''N^2 - H &= K(N^2 - 2\gamma N - r^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

en posant

$$r^2 = R^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

La troisième des équations $(4)$ fournit $K = p''$; cette valeur substituée dans les deux premières donne :

$$L^2 = \frac{P - P''}{o}$$

$$M^2 = \frac{P' - P''}{o}.$$

Concluons de là que s'il existe des sections circulaires, l'équation

$$z = Lx + My + N.$$

qui a servi à fournir les équations $(\lambda)$, n'est pas la forme propre qu'il fallait employer.

Si l'on fait $M = o$, ce qui réduit l'équation du plan qui contient la section à

$$z = Lx + N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

les équations $(3)$ deviendront :

$$\begin{aligned} P + P''L^2 &= K(1 + L^2) \\ P' &= K \\ LNP'' &= K(LN - \alpha - \gamma L) \\ \beta &= o \\ P''N^2 - H &= K(N^2 - 2\gamma N - r^2). \end{aligned}$$

De là on déduit :

$$L = \pm \sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$N = \frac{P'(\alpha + \gamma L)}{(P' - P'')L} = \frac{P'\gamma}{P' - P''} + \frac{(P'\alpha)}{(P' - P'')L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

La condition que L soit réel exige :

$$P > P' > P'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ou encore

$$P < P' < P''.$$

Admettons la première de ces relations.

A ces conditions il faudra joindre $\beta = o$, ce qui prouve que les sphères, dont les intersections avec l'ellipsoïde sont planes, ont leurs centres dans le plan principal perpendiculaire à l'axe moyen.

Il faut y joindre, en second lieu, l'équation

$$P''N^2 - H = K(N^2 - 2\gamma N\gamma - r^2),$$

qui devient successivement, en ayant égard aux relations (4) et (7),

$$N^2(P' - P'') - 2P'N\gamma = P'R^2 - P'\alpha^2 - P'\gamma^2 - H$$

$$\frac{P'^2(\alpha + L\gamma)}{L^2(P' - P'')} - \frac{2P'^2\gamma(\alpha + L\gamma)}{L(P' - P'')} = P'R^2 - P'\alpha^2 - P'\gamma^2 - H.$$

$$\left(\frac{P'}{P - P'} + 1\right)\alpha^2 - \left(\frac{P}{P' - P''} - 1\right)\gamma^2 = R^2 - \frac{H}{P'},$$

$$\frac{P}{P - P'}\alpha^2 - \frac{P''}{P' - P''}\gamma^2 = R^2 - \frac{H}{P'}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Nous pouvons, dans les résultats précédents, introduire les trois axes principaux de l'ellipsoïde. En effet, on sait que :

$$a^2 = \frac{H}{P}, \quad b^2 = \frac{H}{P'}, \quad c^2 = \frac{H}{P''}$$

$a$, $b$, $c$ étant les demi-axes principaux.

D'après (9), leur ordre de grandeur sera exprimé par

$$a < b < c.$$

Ce qui changerait les équations (6), (7), (9) respectivement en

$$L = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

$$N = \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2} \pm \frac{ac\alpha}{\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}} \quad \ldots\ldots \quad (7')$$

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

Cette dernière équation est d'une grande importance, et nous fera découvrir une suite de nouvelles propriétés.

Comme $\beta = o$ et l'équation (9) sont les seules conditions, auxquelles les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, R sont assujetties, on voit que :

**14.** Propriété. — *Il y a une infinité de sphères ayant toutes leurs centres dans le plan principal perpendiculaire à l'axe moyen, coupant l'ellipsoïde suivant un ou deux cercles, dont les plans, parallèles à l'axe moyen, sont donnés par les équations :*

$$z = + \sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}}\, x + \frac{P'\gamma}{P' - P''} + \frac{P'\alpha}{\sqrt{(P - P')(P' - P'')}} \quad \ldots \quad (10)$$

$$z = + \sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}}\, x + \frac{P'\gamma}{P' - P''} + \frac{P'\alpha}{\sqrt{(P - P')(P' - P'')}} \quad \ldots \quad (11)$$

ou bien par

$$z = + \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x + \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2} + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^{\prime})}} \quad \ldots \quad (10')$$

$$z = - \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x + \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2} + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \quad \ldots \quad (11')$$

**15.** Propriété. — *Chacun des plans :*

$$z = \pm \sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}}\, x,$$

*de même que tout plan parallèle, s'il coupe l'ellipsoïde, il coupera suivant un cercle.*

Ainsi la surface est couverte de deux systèmes de sections circulaires dont les plans sont parallèles.

B. — *Développement de ce qui précède et application à la recherche de nouvelles propriétés.*

16. Par une section circulaire, on peut faire passer une infinité de sphères dont les centres se trouvent rangés sur une même droite, perpendiculaire au plan de la section, et passant par le centre de cette section. Si on donne la section par son plan :

$$z = Lx + E. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

on devra identifier E avec le terme indépendant des variables dans (10) ou (11), ce qui donne :

$$\frac{P'\gamma}{P' - P''} + \frac{P'\alpha}{(P' - P'')\,L} = E,$$

ou bien :

$$\gamma = -\frac{\alpha}{L} + \frac{P' - P''}{P'L}E. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

17. Problème. — *Étant donnée une section circulaire par son plan* (12) *et le rayon de la sphère qui y passe, déterminer les coordonnées du centre.*

Solution. — E et R étant connus, les équations (9) et (13) donnent $\alpha$ et $\gamma$.

18. Problème. — *Étant données les coordonnées du centre d'une sphère coupant suivant une section circulaire, déterminer son rayon et le plan suivant lequel elle coupe.*

Solution. — Les équations (9) et (13) donnent E et R.

On trouve, dans le *Traité de géométrie analytique* de Leroy, la proposition suivante due à M. Hachette, démontrée par des considérations géométriques. Notre théorie l'implique comme simple corollaire.

**19.** Propriété. — *Deux cercles quelconques, appartenant à des séries différentes, se trouvent toujours sur une même sphère.*

En effet, soient :

$$z = + Lx + E,$$
$$z = + Lx + E',$$

les plans des sections. En identifiant ces équations avec (10) et (11), on a :

$$\gamma = + \frac{\alpha}{L} + \frac{P' - P''}{P'} E$$
$$\gamma = \quad \frac{\alpha}{L} + \frac{P' - P''}{P'} E'.$$

Ce sont les équations de deux droites, dont les coordonnées courantes sont $\alpha$ et $\gamma$. Leur point d'intersection est le centre de la sphère qui passe par la section proposée, et le rayon est déterminé par l'équation (9).

Ainsi, non-seulement la proposition se trouve démontrée, mais la sphère est entièrement déterminée.

**20.** Discussion de l'équation (9') :

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10')$$

*Si dans cette équation, on regarde* R *comme constant*, $\alpha$ *et* $\gamma$ *comme variables, elle exprime le lieu géométrique des centres des sphères d'égal rayon, coupant l'ellipsoïde suivant des sections circulaires.*

Nous ferons trois hypothèses sur la grandeur de R.

Premier cas. — Soit

$$R^2 = \frac{H}{P'} = b^2,$$

l'équation proposée devient

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} = o.$$

D'où

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2 - a^2}}\, \alpha,$$

ou bien :

$$\gamma = \pm \frac{a}{c} \mathrm{L}\alpha. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Concluons de là que :

PROPRIÉTÉ. — *Si une sphère de rayon égal à l'axe moyen se meut sur l'une ou l'autre des droites* (14), *elle coupera la surface suivant l'un ou l'autre système de sections circulaires.*

COROLLAIRE. — Pour $\alpha = o$, on a $\gamma = o$, ainsi :

*La sphère construite sur l'axe moyen coupe la surface suivant les deux sections circulaires, dont les plans passent par l'origine.*

21. SECOND CAS. — Soit

$$\mathrm{R} > b,$$

Il vient, en posant $\frac{\mathrm{R}^2 - b^2}{b^2} = \rho^2 =$ quantité positive,

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} = \rho^2. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

équation d'une hyperbole, ayant son axe réel sur le plus petit axe de l'ellipsoïde.

Les longueurs des demi-axes sont :
celle du demi-axe réel :

$$\alpha' = \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2} (\mathrm{R}^2 - b^2)},$$

celle du demi-axe imaginaire :

$$\gamma' = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2} (\mathrm{R}^2 - b^2)}.$$

En conséquence :

PROPRIÉTÉ. — *Le lieu géométrique des centres de toutes les sphères de rayon égal* R, *mais plus grand que le demi-axe moyen, se trouve sur l'hyperbole* (15), *ayant son axe réel sur la direction du petit axe de l'ellipsoïde et réciproquement, si une sphère de rayon* R *se meut de manière que son centre décrit l'hyperbole* (15), *les intersections avec l'ellipsoïde seront circulaires.*

Remarquons que, en passant d'une sphère à une autre de rayon différent, les hyperboles représentées par l'équation (15) restent semblables, et ont pour asymptotes communes les droites (14).

**22.** Troisième cas. — Soit $R < b$, l'équation (9′) devient :

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2 - b^2} = -\rho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

en posant

$$\frac{b^2 - R^2}{b^2} = \rho^2.$$

Cette équation est celle d'une hyperbole ayant son axe réel sur la direction du grand axe de l'ellipsoïde.

On a pour les longueurs des demi-axes :
pour le demi-axe réel :

$$\gamma' = \pm \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{b^2}(b^2 - R^2)},$$

pour le demi-axe imaginaire :

$$\alpha' = \pm \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}(b^2 - R^2)}.$$

Concluons de là que :

Propriété. — *Le lieu géométrique des centres des sphères de rayon égal, plus petit que le demi-axe moyen, est l'hyperbole* (16), *dont l'axe réel se trouve sur la direction du grand axe de l'ellipsoïde, et réciproquement, si une sphère de rayon* R, *plus petit que le demi-axe moyen, se meut sur l'hyperbole* (16), *les intersections successives avec l'ellipsoïde seront des cercles.*

**23.** Remarque. — Comme une sphère de rayon R, en se mouvant sur l'une ou l'autre des hyperboles (15), (16), finira par ne plus couper la surface, la solution précédente, qui donne le lieu des centres, paraît assez singulière. Mais l'équation (9′) montre que cette solution convient à un problème plus général.

En effet, cette dernière se laisse mettre sous la forme :

$$\frac{b^2}{b^2 - a^2}\alpha^2 - \frac{b^2}{c^2 - b^2}\gamma^2 = R^2 - \frac{H}{P}.$$

Le premier membre de cette équation reste le même pour tous les ellipsoïdes semblables, et l'équation ne change pas, quels que soient R et H, pourvu qu'on ait :

$$R^2 - \frac{H}{P} = \text{constant} = \rho^2.$$

Ainsi : chacune des hyperboles (15), (16) convient à une *infinité d'ellipsoïdes semblables* et à une *infinité de sphères de rayon différent.*

24. Les résultats obtenus au n° 22 montrent que, si l'on fait décroître R depuis $R = b$ jusque $R = o$, l'axe réel A de l'hyperbole croît depuis $A = o$, jusque $A = \pm \sqrt{c^2 - b^2}$, excentricité de la plus grande des ellipses principales.

*A cette dernière limite, c'est-à-dire quand le rayon de la sphère devient nul,* l'hyperbole devient :

$$\frac{\alpha'^2}{b^2 - a^2} - \frac{\gamma'^2}{c^2 - b^2} = -1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

Aucune sphère, quel que soit son rayon, ayant son centre sur la courbe $(f)$, ne peut couper la surface suivant une section plane.

25. Cependant la projection de l'intersection d'une telle sphère avec la surface sur le plan de la plus grande section principale, jouit d'une propriété assez remarquable.

L'élimination de $y$ entre les équations :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 = R^2$$

donne :

$$R^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + \frac{c^2 - b^2}{c^2} z^2 - 2\alpha' x - 2\gamma, z + \alpha'^2 + b^2. \; . \; . \quad (17)$$

équation d'une hyperbole, vu que

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} < o.$$

Le premier membre de cette équation représente le carré de la distance

de chaque point, qui se trouve sur l'intersection même au point $\alpha'$, $\beta'$ de l'hyperbole $(f)$.

Voyons si nous pouvons décomposer le second membre de la même équation en facteurs rationnels par rapport aux variables.

Posant, à cet effet, égal à zéro le second membre de l'équation (17) et résolvant par rapport à $z$, il vient :

$$z = \frac{c^2 \gamma'}{c^2 - b^2} \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2} x^2 + 2\alpha' x + \frac{b^2 \gamma}{c^2 - b^2} - a^2 b^2}.$$

Cette équation se change, en vertu de (17), en :

$$z = \frac{c^2 \gamma'}{c^2 - b^2} \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x \pm \frac{ac\alpha'}{\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Cette équation représente deux plans parallèles aux plans des sections circulaires.

En conséquence, l'équation (18) pourra être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} R = \frac{c^2 - b^2}{c^2} & \left[z + \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x - \frac{c^2 \gamma'}{c^2 - b^2} + \frac{ac\alpha'}{\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}}\right] \\ & \left[z - \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x - \frac{c^2 \gamma'}{c^2 - b^2} + \frac{ac\alpha'}{\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}}\right] \end{aligned} \quad (19)$$

Les plans donnés par l'équation (19) peuvent être représentés par :

$$\begin{aligned} z - Px + Q &= o \\ z + Px + Q' &= o. \end{aligned}$$

Par cette substitution, l'équation (20) devient :

$$R^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2} [z + Px + Q'] [z - Px + Q].$$

Or, chacun des facteurs entre parenthèses, divisé par

$$\sqrt{1 + P^2},$$

exprime la distance d'un point quelconque de l'intersection à l'un ou l'autre des plans renfermés dans l'équation (18).

Soient $\delta$, $\delta'$ ces deux distances.

R exprime la distance du même point au centre $\alpha'$, $\beta'$. On a, par conséquent :

$$R^2 - h\delta\delta',$$

en posant

$$h = b^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Concluons de là que :

PROPRIÉTÉ. — *Le carré de la distance d'un point quelconque de l'ellipsoïde à un point $\alpha'$, $\gamma'$ de l'hyperbole* (f) *est dans un rapport constant avec le rectangle, formé par les perpendiculaires, abaissées du même point sur les plans renfermés dans l'équation* (18).

On voit qu'à chaque point $\alpha'$, $\gamma'$ de l'hyperbole $(f)$, correspond un système de deux plans, par rapport auxquels la propriété précédente a lieu et qui sont tous parallèles aux deux systèmes de sections circulaires.

Ainsi, un point qui se meut dans l'espace de manière que le carré de sa distance à un point fixe de l'hyperbole $(f)$ soit toujours dans le rapport constant $h$ avec le rectangle proposé, restera continuellement sur l'ellipsoïde.

Enfin, l'ellipsoïde est le lieu géométrique d'un tel système de points. Cette propriété correspond à une propriété de l'ellipse.

26. Revenons actuellement aux équations (9′), (10′), (11′).

Une sphère ($\alpha$, $\beta$, R) coupe l'ellipsoïde suivant deux sections circulaires dont les plans sont représentés par les équations (10′), (11′). Cependant il pourra arriver aussi que l'un ou l'autre de ces plans ne coupe plus la surface; dans ce cas, l'intersection se réduit à une section circulaire unique.

Néanmoins, les deux plans sont parfaitement déterminés; ils se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan des $xz$, que j'appellerai *sectrice*.

Les équations de cette sectrice, ou encore celles de sa trace sur le plan des $xz$, sont

$$X = -\frac{a^2\alpha}{b^2 - a^2}$$

$$Z = \frac{c^2 \gamma}{c^2 - b^2}.$$

Appelons ce point *conjugué* du point $\alpha$, $\gamma$.

Éliminant $\alpha$ et $\gamma$ entre ces deux équations et l'équation (9), on a :

$$\frac{b^2 - a^2}{a^4} X^2 - \frac{c - b^2}{c^4} Z^2 = \frac{R^2}{b^2} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

équation d'une hyperbole, lieu géométrique des pieds des sectrices de toutes les sphères de rayon R.

27. J'appellerai *centriques* de l'ellipsoïde toutes les hyperboles renfermées dans l'équation (9′) et qui correspondent chacune à une sphère particulière de rayon R. Ainsi la centrique (R) sera celle qui correspond à une sphère de rayon R.

A chacune de ces hyperboles, il en correspond une autre représentée par l'équation (20); j'appellerai celle-ci l'*épicentrique*, en désignant par *épicentrique* (R) celle qui correspond à une sphère de rayon R.

28. Cela posé, nous avons trouvé au n° 20, pour la centrique ($R = b$), un système de deux droites, *qui sont les asymptotes de toutes les centriques de l'ellipsoïde.*

L'épicentrique ($R = b$), qui lui correspond, se trouve, en faisant $R = b$, dans l'équation (21), ce qui donne

$$Z = \mp \frac{c^2}{a^2} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, X,$$

équation de deux droites, *asymptotes de toutes les épicentriques.*

*Les asymptotes des centriques forment avec celles des épicentriques un système de diamètres conjugués de l'ellipse principale du plan des* XZ.

En effet, en désignant par $\theta$ et $\theta'$ les angles des deux systèmes d'asymptotes avec l'axe des Z, on a :

$$\text{tang}\, \theta \,\text{tang}\, \theta' = -\frac{a^2}{c^2}.$$

29. Il existe une relation remarquable entre les différents points de la centrique et de l'épicentrique correspondante.

Une sphère de rayon quelconque $\rho$, ayant son centre en un point quelconque $\alpha, \gamma$ de la centrique (R), coupe l'ellipsoïde suivant une courbe, dont la projection sur le plan des $xz$ est représentée par l'équation

$$F(x, z) = \frac{c^2 - b^2}{c^2} Z^2 - \frac{b^2 - a^2}{a^2} x^2 - 2\alpha z - 2\gamma z + \alpha^2 + \gamma^2 + b^2 - \rho^2 = o.$$

Les coordonnées du centre de cette projection se trouvent au moyen des équations

$$\frac{dF}{dx} = o, \quad \frac{dF}{dx} = o;$$

Nommant X, Z les coordonnées du centre, ces équations donnent :

$$X = -\frac{a^2\alpha}{b^2 - a^2}$$

$$Z = \frac{c^2 \gamma}{c^2 - b^2}.$$

L'identité de ces résultats avec ceux du n° 26 montre que :

Propriété. — *Si l'on conçoit une infinité de sphères ayant leur centre commun en un point* $\alpha, \gamma$ *de la centrique* (R), *les centres des projections sur le plan des* XZ *de toutes les intersections avec l'ellipsoïde se trouveront au point conjugué de l'épicentrique* (R).

On vérifiera aisément que la réciproque a lieu aussi; en sorte que :

Propriété. — *Si l'on conçoit une infinité de sphères ayant leur centre commun en un point* XZ *de l'épicentrique* (R), *les projections des intersections avec l'ellipsoïde auront leur centre commun au point conjugué* $\alpha, \gamma$ *de la centrique.*

30. Concevons maintenant deux sphères de rayon égal, mais quelconque $\rho$, l'une ayant son centre en $\alpha, \gamma$, l'autre au point X, Z conjugué.

Les deux sphères coupent l'ellipsoïde suivant deux courbes ayant pour projections sur le plan des $xz$ :

$$F(x,z) = \frac{c^2 - b^2}{c^2} z^2 - \frac{b^2 - a^2}{a^2} x^2 - 2\alpha x - 2\gamma z + \alpha^2 + \gamma^2 + b^2 - \rho^2 = o$$

$$F_1(x,z) = \frac{c^2 - b^2}{c^2} z^2 - \frac{b^2 - a^2}{a^2} x^2 - 2Xx - 2Zz + X^2 + Z^2 + b^2 - \rho^2 = o.$$

D'où

$$F - F_1 = 2x(\alpha - X) + 2z(\gamma - Z) - (\alpha^2 - X^2) - (\gamma^2 - Z^2) = o. \quad (21)$$

Cette équation est celle d'une droite ; elle est la même, quel que soit $\rho$. J'en conclus que :

PROPRIÉTÉ. — *Si l'on conçoit une infinité de sphères ayant pour centre commun un point de la centrique* $\alpha$, $\gamma$, *et une autre série de sphères, ayant pour centre commun le point conjugué* X, Z ; *ces deux systèmes de sphères couperont l'ellipsoïde, suivant deux systèmes de courbes, tels que toutes les projections de l'un de ces systèmes coupent respectivement les projections correspondantes de l'autre en une suite de points situés en ligne droite. (Je nomme projections correspondantes celles qui proviennent de deux sphères d'égal rayon.)*

31. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé le centre de la sphère en un point quelconque $\alpha, \gamma$ du plan des $xz$ ; seulement ces deux coordonnées étaient supposées satisfaire à l'équation (9').

Passons maintenant au cas où le centre de la sphère se trouve sur le grand axe ou le petit axe de l'élipsoïde.

Dans le premier, cas, on a $\alpha = o$, et les équations (9'), (10'), (11') deviennent respectivement

$$R^2 = b^2 - \frac{b^2 \gamma^2}{c^2 - b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9'')$$

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x + \frac{c^2 \gamma}{c^2 - b^2} \quad \ldots\ldots \quad (10'')$$

$$z = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x + \frac{c^2 \gamma}{c^2 - b^2} \quad \ldots\ldots \quad (11'')$$

La condition (9″) montre que, pour que R soit réel, il faut que $\gamma$ soit compris entre $o$ et $\sqrt{c^2 - b^2}$.

Si, dans les équations (10″), (11″), on fait $X = o$, on a :

$$Z = \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2},$$

ce qui prouve que la sphère passant par deux sections circulaires, dont les plans se coupent en un point de l'axe des Z, a son centre sur cet axe et réciproquement.

Voyons ce que, dans ce cas, signifie l'équation (9″).

Soit K la distance d'un point quelconque ($\gamma$, $o$) de l'axe des Z à un point quelconque de l'ellipse principale, ayant pour axes le grand axe et l'axe moyen de l'ellipsoïde

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on a

$$K^2 = (\gamma - z)^2 + y^2.$$

D'où

$$K\frac{dK}{dz} = -(\gamma - z) + \frac{ydy}{dz}.$$

Posant cette quantité égale à zéro, après y avoir remplacé $y\frac{dy}{dz}$ par sa valeur, on trouve

$$Z = \frac{c^2\gamma}{c^2 - b^2} \quad (n)$$

pour la valeur qui rend K *minimum*. Cette valeur *minima* est donnée par l'expression

$$K^2 = b^2 - \frac{b^2\gamma^2}{c^2 - b^2}.$$

Remarquons que cette distance K est mesurée par la normale à l'ellipse passant par le point Z, $y$.

De là les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ. — (Fig. 1.) *Soit* M *le point, où les deux plans de deux sections circulaires viennent couper le grand axe, la sphère qui passe par ces deux sections, a pour rayon la normale abaissée du point correspondant* N *de l'ellipse, construite sur le grand axe et l'axe moyen, et pour centre le point* C, *intersection de cette normale avec le graud axe.*

De même, on voit que :

PROPRIÉTÉ. — *Si, en un point* C *donné sur le grand axe, on mène la normale* CN *à l'ellipse, la sphère ayant son centre en* C *et pour rayon* CN *coupera l'ellipsoïde suivant deux sections circulaires dont les plans passent par l'extrémité de la normale.*

AUTREMENT. — *Si une sphère, de rayon variable, se meut de manière que son centre reste sur le grand axe, et que son rayon soit à chaque instant égal à la longueur de la normale abaissée de son centre sur l'ellipse principale du grand axe et de l'axe moyen, elle coupera constamment l'ellipsoïde suivant deux sections circulaires, dont les plans passent par l'extrémité de la normale et sont parallèles à l'axe moyen.*

Comme les relations $(9'')$ et $(n)$ sont indépendantes du petit axe, on en conclut cette propriété plus générale, qui implique la précédente :

PROPRIÉTÉ. — *Si le centre d'une sphère, variable de rayon, se meut sur le grand axe d'une ellipse, de manière que son rayon soit à chaque instant égal à la longueur* CN *de la normale passant par le centre de la sphère, elle coupera, dans chacune de ses positions, suivant deux systèmes de cercles, une infinité d'ellipsoïdes ayant l'ellipse pour section principale commune, et dont le petit axe a une longueur quelconque, comprise entre* 0 *et le petit axe de l'ellipse.*

*Les plans des sections appartenant à une même sphère, mais à tous les ellipsoïdes, se coupent suivant une droite unique, parallèle à l'axe moyen des ellipsoïdes. Cette droite passe par l'extrémité* N *de la normale, et est parallèle à l'axe moyen.*

**32.** Les deux séries de sections circulaires prouvent la génération de l'ellipsoïde au moyen d'un cercle, variable de rayon, se mouvant parallèlement à lui-même, et s'appuyant constamment sur une ellipse.

L'inspection des équations $(9'')$, $(n)$ fournit une génération de la même

surface, indépendamment d'une directrice et basée sur des considérations dynamiques : c'est au moyen d'un plan qui se meut parallèlement à lui-même et d'une sphère dont le centre se meut sur une droite.

On peut l'énoncer de la manière suivante :

*Supposons qu'un système de deux plans, passant par la droite* AB (fig. 1), *et également inclinés sur une même droite* OZ, *perpendiculaire à* AB, *et une sphère, de rayon variable, dont le centre se trouve en* O, *se met en mouvement, de manière que :*

1° *Les deux plans se meuvent ensemble avec une vitesse constante, parallèlement à eux-mêmes, leur intersection coupant toujours la droite* OZ;

2° *Le centre de la sphère se meut avec une vitesse constante sur* OZ;

3° *Le carré du rayon diminue proportionnellement au carré du temps, le coefficient de proportionnalité dépendant à la fois du rayon primitif et du rapport des vitesses, l'ensemble des intersections consécutives de la sphère avec chacun des plans engendre les deux séries de cercles de l'ellipsoïde et par conséquent l'ellipsoïde même.*

Dans ce cas, *on voit, en outre, que le centre de la surface se trouve au point de départ du centre de la sphère*, un des axes se confond avec la ligne des centres, *et l'axe moyen est la droite* AB, *en longueur égale au diamètre de la sphère primitive.*

Si l'on ne veut obtenir *qu'un seul système* de cercles, ce qui suffit pour engendrer la surface, on peut modifier les conditions et les énoncer comme suit :

*Si un plan, passant d'abord par le centre d'une sphère, et la sphère même se mettent en mouvement, en sorte que :*

1° *Le plan se meut avec une vitesse constante parallèlement à lui-même;*

2° *Le centre de la sphère se meut uniformément sur une droite quelconque;*

3° *La diminution du carré du rayon est proportionnelle au carré du temps, le coefficient de proportionnalité dépendant à la fois du rayon primitif et du rapport des vitesses; ce système engendrera l'ellipsoïde.*

On peut même calculer les trois axes de la surface.

En effet, soit :

$\theta$ l'angle de la droite que parcourt le centre de la sphère avec le plan,
R le rayon de la sphère primitive,
$m$ le rapport des vitesses,

on a :

$$b = R,$$
$$\frac{c^2}{c^2 - b^2} = m,$$
$$\theta = \text{arc}\left(\text{cotg}\,\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\right),$$

équations qui déterminent $a, b, c$.

33. Ici se présente la question si, en assujettissant le système à moins de conditions, on peut encore engendrer un ellipsoïde quelconque.

La question se résout facilement comme suit :

Soit :

$$x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 = K^2$$

l'équation d'une sphère,

$$z = Lx + N$$

celle d'un plan.

Supposons que la sphère, en conservant le même rayon R, se meuve de manière que le centre décrit, d'un mouvement uniforme, l'axe des Z, en sorte que

$$\gamma = kt,$$

$t$ désignant le temps.

Supposons que le plan se meuve parallèlement à lui-même et avec une vitesse constante, de manière que

$$N = pt,$$

on aura pour l'équation du plan et du cercle, par conséquent pour les équations de leur intersection, en un instant quelconque, $t$.

$$z = Lx + pt,$$
$$x^2 + y^2 + (z - kt)^2 = k^2,$$

En donnant à $t$ des valeurs particulières 0, 1, 2..., on aura la courbe d'intersection aux instants 0, 1, 2...; mais si, au contraire, on élimine $t$ entre ces équations, on a le lieu géométrique de ces intersections.

L'élimination donne

$$\left(1+\frac{L^2}{p^2}\right)x^2+y^2+\left(\frac{h-k}{p}\right)^2z^2-\frac{2(p-k)}{p}Lxz=R^2,$$

équation d'un ellipsoïde ayant pour axe moyen le rayon de la sphère primitive et dont les autres axes sont déterminés par L, K, $p$.

Nous pouvons conclure de là que :

Génération de l'ellipsoïde. — *Si un système d'une sphère de rayon constant et d'un plan se meut, en sorte que :*

1° *Le centre de la sphère parcourt une droite d'un mouvement uniforme;*

2° *Le plan passant d'abord par le centre de la sphère se meut aussi avec une vitesse constante parallèlement à lui-même, les intersections successives forment l'ellipsoïde.*

Le diamètre de la sphère est en même temps la longueur de l'axe moyen.

*Remarque.* — Cette génération étant démontrée, indépendamment de tout ce qui précède, elle implique une nouvelle démonstration de l'existence des sections circulaires dans la surface.

34. Dans les numéros précédents, nous avons considéré les sphères, dont les centres se trouvent sur l'axe des $z$.

Passons au cas où le centre de la sphère, coupant la surface proposée, suivant une section plane, se trouve sur la direction du petit axe de la surface.

En posant

$$\gamma = o,$$

dans les équations (9′), (10′), (11′), on obtient :

$$R^2 = b + \frac{b^2 x}{b^2 - a^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9'')$$

$$z = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad (10''')$$

$$z = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - b^2}}\, x - \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}} \quad . \quad . \quad . \quad (11''')$$

chacun des plans coupe l'axe des $x$ au point :

$$x = -\frac{a^2\alpha}{b^2 - a^2}$$

et l'axe des $z$, l'un au point

$$z' = \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

l'autre au point

$$z'' = -\frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}.$$

Par conséquent, si le centre de la sphère, coupant suivant des cercles, est pris sur l'axe des $x$ positifs, les plans suivant lesquels elle coupe passent, parallèlement à l'axe moyen, par un même point de l'axe des $x$ positifs, et coupent l'axe des $z$ l'un au-dessus, l'autre au-dessous du plan des $xy$ à la même distance, et les deux sections sont parfaitement symétriques par rapport au plan des $xy$.

35. Si, en procédant d'une manière analogue, comme au n° 29, on cherche la signification de l'équation $(9''')$, on trouve que R est la distance *maxima* d'un point $(\alpha, o)$ de l'axe des $x$ à l'ellipse construite sur l'axe moyen et le petit axe de l'ellipsoïde, et que la valeur de $x$, qui correspond à ce *maximum*, est

$$x = -\frac{a^2\alpha}{b^2 - a^2}.$$

Cette distance R est mesurée par la longueur de la normale à l'ellipse CN ou CN' (*fig.* 2), passant par le centre C de la sphère. L'extrémité de la normale a même abscisse OM que le point M, où les deux plans viennent rencontrer l'axe des $x$. De là nous concluons que :

PROPRIÉTÉ. — *Une sphère, dont le centre se meut sur le petit axe, et dont le rayon est à chaque instant égal à la normale, passant par son axe à l'ellipse, construite sur le petit axe et l'axe moyen, coupe constamment l'ellipsoïde suivant deux sections circulaires, dont les plans passent par l'extrémité de la normale.*

### § 2. — INTERSECTION DE LA SPHÈRE AVEC L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

36. L'équation de cette surface est

$$Px^2 + P'y^2 - P''z^2 = H,$$

ou bien

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

en posant :

$$\frac{H}{P} = a', \; \frac{H}{P'} = b^2, \; \frac{H}{P''} = C^2 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

On voit que si, dans les formules obtenues dans le paragraphe précédent, on change le signe de $P''$, les résultats s'appliqueront à la surface proposée.

Ainsi une sphère de rayon R, dont le centre a pour coordonnées $\alpha$, $o$, $\gamma$, coupera l'ellipsoïde suivant deux sections circulaires comprises dans les plans

$$Z = \pm\sqrt{\frac{P - P'}{P' - P''}}\,x + \frac{P'\gamma}{P' + P''} \pm \frac{P'\alpha}{\sqrt{(P - P')(P' + P'')}},$$

pour qu'entre $\alpha$, $\gamma$ et R on ait la relation :

$$\frac{P}{P - P'}\alpha^2 + \frac{P''}{P' + P''}\gamma^2 = R^2 - \frac{H}{P'}.$$

En vertu des relations (2), cette dernière équation peut être mise sous la forme

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2 + c^2} = \frac{R^2}{b^2} - 1 \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

tandis que les équations des plans deviennent

$$Z = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + b^2}}\,x + \frac{c^2 \gamma}{c^2 + b^2} + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 + b^2)}} \quad . \quad . \quad (4)$$

$$Z = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + b^2}}\,x + \frac{c^2 \gamma}{c^2 + b^2} + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 + b^2)}} \quad . \quad . \quad (5)$$

Ces équations impliquent la condition $P > P'$ ou $a < b$. Ainsi :

PROPRIÉTÉ. — *Il y a une infinité de sphères ayant toutes leurs centres dans le plan principal perpendiculaire au plus grand axe réel de la surface, qui coupent la surface suivant des circonférences de cercles.*

PROPRIÉTÉ. — *Chacun des plans* (4), (5), *ainsi que tout plan parallèle, donne des sections circulaires.*

Tous les problèmes, résolus pour l'ellipsoïde dans les n$^{os}$ (16), (17), (18), se résolvent d'une manière analogue pour la surface proposée.

Le théorème de Hachette subsiste aussi pour cette surface : on n'a qu'à changer P en — P'' dans le n° (9).

37. L'équation (3) représente les centriques de la surface. On voit que :

1° Pour $R = b$, ce lieu se réduit à un point, l'équation résultante ne peut être satisfaite que pour $\alpha = o$, $\gamma = o$. Ainsi :

PROPRIÉTÉ. — *La sphère construite sur les deux axes réels coupe la surface suivant les deux circonférences dont les plans passent par l'origine.*

2° Pour $R < b$, la centrique devient imaginaire; de sorte qu'aucune sphère de rayon plus petit que le plus grand axe réel ne peut couper la surface suivant des cercles.

3° Pour $R > b$, l'équation (5) représente une ellipse ayant son centre à l'origine et ses axes principaux sur la direction des $x$ et des $z$. Ainsi :

PROPRIÉTÉ. — *Si une sphère de rayon* R *se meut sur l'ellipse* (5), *ses intersections consécutives avec les surfaces seront circulaires.*

38. Les traces des deux plans (4), (5) se coupent en un point.

$$Z = \frac{c^2 \gamma}{c' + b^2}, \quad X = \frac{a^2 \alpha}{b^2 - a^2},$$

et le lieu géométrique de ces points où l'épicentrique est représenté par l'équation

$$\frac{b^2 - a^2}{a^4} \alpha^2 + \frac{c^2 + b^2}{c^4} \gamma^2 = \frac{R^2}{b^2} - 1,$$

qui est encore une ellipse.

En appliquant à ces résultats le même raisonnement que pour l'ellipsoïde, on verra que :

Propriété. — *Si l'on construit une infinité de sphères ayant pour centre un point $\alpha$, $\gamma$ de la centrique, les projections de toutes les intersections auront pour centre commun le point conjugué* X, Z *de l'épicentrique.*

*La réciproque a lieu aussi :*

Propriété. — *Deux systèmes de sphères ayant les unes leur centre commun en un point $\alpha$, $\gamma$ de la centrique, et les autres en un point conjugué* X, Z *de l'épicentrique, couperont la surface respectivement suivant deux systèmes de courbes, tels que les projections de l'un de ces systèmes coupent les projections correspondantes de l'autre suivant une série de points situés en ligne droite.*

Si, dans les formules (3), (4), (5), on fait $\alpha = o$, on trouvera facilement les propriétés suivantes :

Propriété. — *Soit* M (fig. 5) *le point où les plans des deux sections circulaires viennent rencontrer l'axe imaginaire, si, au point correspondant de l'hyperbole principale passant par le plus grand des axes réels, on mène la normale* NC, *la sphère qui passe par ces deux sections circulaires a son centre en* C, *et pour rayon la longueur de la normale* CN.

Plus généralement :

Propriété. — *Si une sphère de rayon variable se meut de manière que son centre reste sur l'axe imaginaire d'une hyperbole, et que son rayon soit à chaque instant égal à la longueur de la normale à l'hyperbole passant par le centre de la sphère, elle coupera, dans chacune de ses positions, suivant deux systèmes de sections circulaires, une infinité d'hyperboloïdes à une nappe ayant l'hyperbole pour*

*section principale commune, et pour petit axe réel une longueur quelconque comprise entre* o *et l'axe réel de l'hyperbole.*

*De plus, tous les plans des sections, correspondant à la même sphère, passent par la droite, qui unit les deux points où les normales égales, partant du centre de la sphère, coupent l'hyperbole.*

On peut de même, comme pour l'ellipsoïde, assigner en fonction du temps les lois du mouvement du cercle, et de la variation de son rayon, sans donner *une hyperbole directrice.*

En résolvant le problème directement comme pour l'ellipsoïde, mais en faisant varier le rayon, en posant :

$$R^2 = \rho^2 + a^2 t^2.$$

$\rho$ étant le rayon primitif et $t$ le temps, on trouverait, après avoir effectué les calculs d'après la marche suivie au n° 31, la génération de l'hyperboloïde.

## § 3. — Intersection de la sphère avec le cône droit a base elliptique.

**39.** *Un cône droit à base elliptique peut être considéré comme cône asymptote d'une infinité d'hyperboloïdes à une nappe semblables.*

En effet soient :

$$z = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

les équations de la directrice,

$$x = pz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$y = qz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

celles d'une génératrice, le sommet se trouvant à l'origine; éliminant $x$, $y$, $z$ entre ces quatre équations et substituant dans leur résultat à $p$ et $q$ leurs valeurs tirées de (3), (4), on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

équation du cône asymptote à l'hyperboloïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et à tous les hyperboloïdes semblables de forme et de position.

40. La théorie de l'intersection de la sphère avec le cône se déduit, par conséquent, du paragraphe précédent. Si on pose $H = o$, les formules (4) et (5) restent les mêmes, de sorte qu'on a :

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + b^2}}\,x + \frac{c^2\gamma}{c^2 + b^2} + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 + b^2)}}$$

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + b^2}} + \frac{c^2\gamma}{c^2 + b^2} - \frac{ac\alpha}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 + b^2)}}.$$

La formule (3) devient :

$$\frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2 + b^2} = \frac{R^2}{b^2}.$$

On voit par là que :

Propriété. — *Il y a une infinité de sphères, coupant la surface proposée suivant des sections planes. Les centres de toutes ces sphères se trouvent dans le plan passant par le grand axe de l'ellipse directrice et par le sommet du cône.*

Propriété. — *Il y a deux séries de sections circulaires, dont les plans sont respectivement parallèles aux deux plans :*

$$z = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + b^2}}\,x$$

$a$ et $b$ étant les axes de l'ellipse directrice et $c$ la distance du sommet au plan de l'ellipse.

Remarque. — La direction des plans est la même que pour tous les hyperboloïdes à une nappe dont le cône est asymptote.

41. Pour $\alpha = o$, on voit que les deux plans se coupent en un même point :

$$z = \frac{c^2\gamma}{c^2 + b^2}$$

de l'axe de $z$. Dans ce cas, le rayon devient :

$$R = \frac{b\gamma}{\sqrt{c^2 + b^2}},$$

ou bien :

$$R : \gamma = b : \sqrt{c^2 + b^2},$$

Il suit de là que, si S (*fig.* 4) est le sommet du cône, AB le grand axe de la base, SC l'axe des cônes, O le centre d'une sphère :

PROPRIÉTÉ. — *Le rayon de la sphère coupant suivant des sections circulaires dont le centre se trouve en un point* O *de l'axe, est une quatrième proportionnelle à la distance* OS *du centre au sommet, au demi-grand axe* AC *et à la ligne* SA, *hypothénuse du triangle rectangle ayant* c *et* b *pour côtés.*

CONSTRUCTION DU RAYON D'UNE SPHÈRE DONT LE CENTRE EST DONNÉ. — De ce qui précède on peut déduire que :

O, O′, O″ étant les centres de sphères qui coupent le cône suivant des sections planes, les rayons respectifs de ces sphères seront les perpendiculaires OR, OR′, OR″, etc., abaissées des points O, O′, O″ sur la droite SA.

En effet, soit SC′ = SA, la perpendiculaire C′A′ à SA sera égale à AC, et l'on a :

$$OR : C'A' = OS : OC',$$

ou

$$R : b = \gamma : \sqrt{c^2 + b^2}.$$

Comme l'expression de R est indépendante du petit axe $a$ de l'ellipse, il est évident que :

PROPRIÉTÉ. — *Si une sphère de rayon variable se meut, de manière que son centre* O *décrit la droite* SO, *et que son rayon est, pour chaque centre, égal à la perpendiculaire* OR *abaissée du centre sur* SA, *elle coupera, dans chacune de ses positions, une infinité de cônes droits, ayant tous leur sommet en* S *et pour base une ellipse qui a pour grand axe* AB *et pour petit axe une longueur quelconque comprise entre* o *et* AB.

### § 4. — Intersection de la sphère avec l'hyperboloïde a deux nappes.

**42.** L'équation de l'hyperboloïde à deux nappes est :

$$Px^2 - P'y^2 - P''z^2 = H \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

ou bien :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

en posant

$$\frac{H}{P}, = a^2, \ \frac{H}{P'} = b^2, \frac{H}{P''}, = c^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Si, dans les formules du § 1er, on change, P' en — P', P'' en — P'', les résultats de cette substitution s'appliquent à la surface proposée; ainsi on trouve pour les équations des plans :

$$z = + \sqrt{\frac{P + P'}{P'' - P'}}\, x - \frac{P'\gamma}{P'' - P'} - \frac{P'\alpha}{\sqrt{(P + P')(P'' - P')}} \quad \ldots (4)$$

$$z = + \sqrt{\frac{P + P'}{P'' - P'}}\, x - \frac{P'\gamma}{P'' - P'} + \frac{P'\alpha}{\sqrt{(P + P')(P'' - P')}} \quad \ldots (5)$$

équations, auxquelles il faut ajouter la condition :

$$\frac{P}{P + P'}\, \alpha^2 + \frac{P''}{P'' - P'}\, \gamma^2 = R^2 + \frac{H}{P'} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

En vertu des relations (3), on peut mettre ces équations sous les formes :

$$z = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2 - c^2}}\, x - \frac{c^2\gamma}{b^2 - c^2} - \frac{ac\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}} \quad \ldots (4')$$

$$z = -\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{b^2 - c^2}}\, x - \frac{c^2\gamma}{b^2 - c^2} + \frac{ac\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}} \quad \ldots (5')$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2 + b^2} + \frac{\gamma^2}{b^2 - c^2} = \frac{R^2}{b^2} + 1 \quad \ldots \ldots \ldots (6')$$

Les paramètres des plans ne sont réels que pour $b > c$.

Ces plans (4′) et (5′) sont, par conséquent, parallèles au plus grand des deux axes imaginaires.

De ces formules, il suit que :

PROPRIÉTÉ. — *Il y a une infinité de sphères ayant toutes leurs centres dans le plan principal perpendiculaire au plus grand des axes imaginaires qui coupent l'hyperboloïde à deux nappes suivant des sections circulaires. Il suffit, en chaque cas, que le rayon de la sphère et les coordonnées de son centre soient liés par l'équation* (6).

PROPRIÉTÉ. — *Tout plan parallèle à l'un ou l'autre des deux plans*

$$z = \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2-c^2}}\,x,$$

*passant par le plus grand axe imaginaire, s'il coupe la surface, la coupe suivant une section circulaire.*

L'équation (6′) est ce que nous avons appelé la centrique de la surface.

En faisant varier R, on a une suite d'ellipses ayant leurs axes principaux sur le petit axe imaginaire et sur l'axe réel de la surface. Ces ellipses sont toutes semblables; à partir de $R = a$, leurs axes croissent à mesure que R augmente. Dans le cas de $R = o$, on a

$$\frac{\alpha^2}{a^2+b^2} + \frac{\gamma^2}{b^2-c^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Aucune sphère, ayant son centre à l'intérieur de cette ellipse, ne peut couper la surface suivant une section circulaire.

**43.** On ferait voir, en raisonnant comme pour les autres surfaces, que :

PROPRIÉTÉ. — *Le carré de la distance d'un point quelconque de la surface à un point de la centrique* ($R=0$) *est proportionnel au rectangle qu'on trouve en abaissant, du point de la surface, des perpendiculaires sur les plans* (4′), (5′), *les valeurs de $\alpha$ et $\gamma$ dans ces dernières étant les coordonnées du point* $(\alpha, \gamma)$ *de la centrique* (7).

L'équation de l'épicentrique pour cette surface est

$$\frac{a^2+b^2}{a^4}X^2 + \frac{b^2-c^2}{c^4}Z^2 = \frac{R^2}{b_2} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

PROPRIÉTÉ. — *L'intersection de toute sphère ayant son centre en un point de la centrique* (7) *se projette sur le plan des* XZ, *suivant une courbe ayant son centre au point conjugué de l'épicentrique* (8) *et réciproquement.*

Je ne m'arrêterai pas davantage à la discussion de cette surface. Je fais seulement observer, qu'aux propriétés exposées dans les paragraphes précédents correspondent des propriétés analogues de la surface proposée.

Passons aux surfaces dépourvues de centre.

### § 5. — INTERSECTION DE LA SPHÈRE AVEC LE PARABOLOÏDE ELLIPTIQUE.

**44.** L'équation du paraboloïde rapporté à son centre et à ses axes principaux, est

$$p'y^2 + pz^2 = pp'x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Si on substitue ces paramètres dans les équations ($\lambda$), on voit que la seule forme de l'équation du plan contenant une section circulaire est

$$z = \mathrm{L} \quad x + \mathrm{N}.$$

Les équations ($\lambda$) deviennent, dans ce cas :

$$\begin{aligned} p\mathrm{L}^2 &= \mathrm{K}\ (1 + \mathrm{L}^2) \\ p' &= k \\ \beta &= o \\ 2p\mathrm{LN} - pp' &= 2k\,(\mathrm{LN} - \alpha - \gamma^2) \\ p\mathrm{N}^2 &= k\ (\mathrm{N}^2 - \gamma^2 - 2\gamma\mathrm{N}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2) \end{aligned}$$

De là on déduit

$$\mathrm{L} = \pm \sqrt{\frac{p'}{p - p'}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$\beta = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$\mathrm{N} = \frac{p'(p - 2\alpha)}{2(p - p')\mathrm{L}} - \frac{p'\gamma}{2(p - p')} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

L'équation (2) devient, après quelques transformations,

$$\gamma^2 = \left(\frac{\mathrm{R}^2}{p} + \frac{p}{4} - \alpha\right)(p - p') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

L n'est réel que pour $p > p'$.

De ces formules on conclut :

PROPRIÉTÉ. — *Il y a une infinité de sphères coupant la surface suivant des sections planes. Elles ont toutes leurs centres dans le plan de la parabole principale dont le paramètre est le plus petit.*

Les plans des sections sont représentés par les équations :

$$z = +\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}, x - \frac{p'\gamma}{(p-p')} + \frac{p-2\alpha}{2}\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}. \quad . \quad . \quad (7)$$

$$z = -\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}, x - \frac{p'\gamma}{(p-p')} - \frac{p-2\alpha}{2}\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}. \quad . \quad . \quad (8)$$

PROPRIÉTÉ. — *L'intersection des plans*

$$z = \pm\sqrt{\frac{p'}{p-p'}}\, x,$$

*ainsi que de tout plan parallèle avec la surface, est circulaire.*

**45.** Les problèmes traités au § 1 se résolvent ici de la même manière.

L'équation (6) représente la centrique : c'est une parabole. En transportant l'origine en un point

$$X' = \frac{4R^2 + p^2}{p} \text{ de l'axe des } x,$$

l'équation (6) prend la forme $\gamma^2 = -(p - p')\,\alpha$. Ainsi :

PROPRIÉTÉ. — *La centrique du paraboloïde elliptique est une parabole ayant son sommet sur l'axe de la surface au point*

$$X = \frac{4R^2 + p^2}{p}$$

*et pour paramètre la différence des paramètres des sections principales. Le sens de la parabole est opposé à celui de la parabole principale, dont le paramètre est le plus petit.*

On voit, de plus, que :

*Toutes les centriques, correspondant à des sphères de rayon différent, sont égales et ne diffèrent que par le sommet.*

Ainsi, une sphère de rayon R dont le centre se meut sur la parabole (6) coupera la surface suivant des sections planes. Mais, comme elle finira par ne plus couper la surface, on voit que l'équation (6) doit convenir à un problème plus général, et, en effet, il suffit de poser $\frac{R^2}{p} + \frac{p}{4} =$ constante, pour que la centrique se rapporte à une infinité de paraboloïdes semblables et à une infinité de sphères de rayons différents.

On obtiendrait pour l'équation de l'épicentrique :

$$Z^2 = -\frac{p'^2}{p - p'}\left(\frac{p}{4} + X - \frac{R^2}{p}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Cette parabole a son sommet en $X' = \frac{R^2}{p} - \frac{p}{4}$.

La centrique et l'épicentrique qui se rapportent à une même sphère, ont leur sommet sur l'axe de la surface distante de la quantité $\frac{p}{2}$, moitié du paramètre de la parabole dont le paramètre est le plus grand.

46. On démontrerait d'une manière analogue, comme pour les surfaces considérées dans les paragraphes précédents, que :

PROPRIÉTÉ. — *Si, d'un point pris arbitrairement sur la centrique, comme centre commun, on décrit une série de sphères, les projections sur le plan de la parabole des lignes d'intersection, suivant lesquelles la surface est pénétrée par différentes sphères, sont des lignes semblables, ayant pour centre commun le point conjugué de l'épicentrique.*

L'inspection des équations (6) et (9) montre que la distance des sommets de ces paraboles à l'origine diminue avec R.

Les centriques limites, c'est-à-dire celles pour lesquelles $R = o$, ont leurs sommets, l'une au foyer de la parabole principale, qui a le plus grand paramètre, l'autre à la même distance de l'origine, prise sur l'axe des X négatifs.

Ces équations deviennent, dans ce cas :

$$\gamma^2 = \quad (p - p')\left(\frac{p}{4} - \alpha'\right) \ldots\ldots\ldots \quad (6')$$

$$Z'^2 = -\frac{p'^2}{p - p'}\left(\frac{p}{4} - X'\right) \ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

Cette centrique-limite jouit des mêmes propriétés que celle des autres surfaces. Ainsi :

Propriété. — *Le carré de la distance d'un point* x, y, z *de la surface à un point de la parabole* (6′) *est dans un rapport constant avec le rectangle formé en menant au même point de la surface deux perpendiculaires sur les plans* (7) *et* (8), *dans lesquels on substitue, au lieu de* $\alpha$ *et* $\gamma$, *les valeurs* $\alpha'$, $\gamma'$.

47. Passons maintenant au cas où le centre de la sphère, coupant suivant des sections planes, se trouve sur l'axe du paraboloïde.

Après avoir fait $\gamma = o$ dans les équations (6), (7), (8), on trouvera facilement :

$$R^2 = p\alpha - \frac{p^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

tandis que les équations résultantes de (7) et de (8) montrent que les deux plans sécants passent en un même point

$$x' = \alpha - \frac{p}{2}$$

de l'axe des $x$.

Au moyen de ces résultats, on établira d'une manière analogue, comme on l'a fait pour les propriétés correspondantes dans les surfaces, que :

Propriété. — *Soit* NN′ (*fig.* 5) *la ligne suivant laquelle les plans de deux sections circulaires se coupent, la sphère qui coupe la surface suivant ces deux mêmes sections, a son centre au point* C, *intersection de la normale en* N *avec l'axe, et pour rayon la longueur* CN.

De même,

Propriété. — *Si une sphère se meut de manière que son centre décrive l'axe de la surface, et que le rayon soit à chaque instant égal à la longueur de la normale passant par le centre, à la parabole ayant le plus grand périmètre, elle coupera dans toutes ses positions la surface suivant des sections circulaires.*

Comme les équations (10) et (11) sont indépendantes de $p'$, on en conclut cette propriété plus générale que celle qui précède :

Propriété. — *Si une sphère se meut sur l'axe d'une parabole* $y^2 = px$ *de manière que son rayon soit à chaque instant la normale passant par le centre, elle coupera chacune de ces positions suivant deux systèmes de sections circulaires, une infinité de paraboloïdes elliptiques ayant la parabole* $y^2 = px$ *pour parabole principale commune et pour l'autre section principale une parabole dont le paramètre a une longueur quelconque comprise entre* o *et* p.

Pour $\alpha = o$, R devient imaginaire; ainsi aucune des sphères n'a son centre à l'origine.

Pour $\alpha = \frac{p}{2}$, on a $x' = o$, $R = \frac{p}{2}$, d'où il suit que :

Propriété. — *La sphère qui renferme les deux sections circulaires dont les plans passent par l'origine, passe elle-même par l'origine et a son centre sur l'axe de la surface à une distance égale à la moitié du plus grand des paramètres.*

Des équations (10) et (11) on déduit la génération suivante de la surface.

48. Génération du paraboloïde elliptique. — *Si le centre d'une sphère variable de rayon se meut sur une droite d'un mouvement uniforme, de manière que sa distance à un plan qui se meut également d'une vitesse uniforme ne change pas, et qu'en outre, l'accroissement du carré du rayon soit proportionnel au temps, le coefficient de proportionnalité dépendant de la distance de son centre au plan, l'ensemble des intersections du plan avec la sphère formera un paraboloïde elliptique.*

Le coefficient de proportionnalité est le même nombre qui représente la distance du centre de la sphère au point où le plan coupe la ligne sur laquelle le centre se meut.

### § 6. — Intersection de la sphère avec le paraboloïde hyperbolique.

**49.** Si, dans l'équation (1) du paragraphe précédent, on change le signe de $p$ ou de $p'$, elle représente la surface proposée. Mais alors on voit que les coefficients des équations (7) et (8) du même paragraphe deviennent imaginaires; ainsi cette surface n'admet pas de sections circulaires.

## SECTION III.

## DIVERS CAS D'INTERSECTION DES SURFACES DU SECOND ORDRE, AUTRES QUE LA SPHÈRE [1].

### § 7. — Intersection de deux ellipsoïdes.

**50.** Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

l'équation d'un des ellipsoïdes, celle de l'autre sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} - \frac{2\alpha}{a'^2}x - \frac{2\beta}{b'^2}y - \frac{2\gamma}{c'^2}z + D = 1 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des coordonnées du second ellipsoïde et

$$D = \frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

[1] Dans les cas que je vais traiter, je supposerai toujours les axes principaux des deux surfaces respectivement parallèles.

Les équations (λ) deviennent, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{a^2} + \frac{L^2}{c^2} &= K\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{L^2}{c'^2}\right) \\
\frac{1}{b^2} + \frac{M^2}{c^2} &= K\left(\frac{1}{b'^2} + \frac{M^2}{c^2}\right) \\
\frac{LM}{c^2} &= K\,\frac{LM}{c'^2} \\
\frac{LN}{c^2} &= K\left(\frac{LN}{c'^2} - \frac{\alpha}{a'^2} - \frac{\gamma L}{c'^2}\right) \\
\frac{MN}{c^2} &= K\left(\frac{MN}{c'^2} - \frac{\beta}{b'^2} - \frac{\gamma M}{c'^2}\right) \\
\frac{N^2}{c^2} - 1 &= K\left(\frac{N^2}{c'^2} - \frac{2\gamma N}{c'^2} + D - 1\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De la troisième des équations (4), on tire $K = \frac{c'^2}{c^2}$.

Substituant cette valeur dans les deux premières, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ces conditions doivent être remplies, quels que soient L et M, pourvu que ces valeurs soient différentes de 0 et de $\infty$.

Si ce dernier cas arrivait, l'équation $\frac{LM}{c^2} = K\,\frac{LM}{c'^2}$ ne donnerait plus la valeur de K. Nous verrons ce cas plus loin.

Si la condition (5) est remplie, on a

$$L = -\frac{c'^2}{a'^2}\,\frac{\alpha}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$M = -\frac{c'^2}{b'^2}\,\frac{\beta}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$N = \frac{c^2 - c'^2}{2\gamma} + \frac{c'^2}{2\gamma}\,D \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont supposés différents de $o$. Concluons de là que :

**Propriété.** — *Pour que deux ellipsoïdes ayant leurs axes principaux parallèles,*

*sans que le centre de l'un se trouve dans aucun plan principal de l'autre, se coupent suivant une courbe plane, il faut et il suffit qu'ils soient semblables de forme et de position.*

Si cette condition est remplie, on a pour le plan la courbe :

$$\frac{\alpha}{a'^2}x + \frac{\beta}{b'^2}y + \frac{\gamma}{c'^2}z - \frac{c^2 - c'^2}{2c'^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} + \frac{\gamma^2}{c'^2} = 0\right) \quad . \quad . \quad (9)$$

Le plan étant unique, la *courbe d'entrée* se confond avec la *courbe de sortie.*

**51.** Supposons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ variables et L, M constants.

Les équations (6) et (7) se mettent, dans ce cas, sous la forme

$$x = -\frac{a'^2}{c'^2}\mathrm{L}\gamma.$$

$$\beta = -\frac{b'^2}{c'^2}\mathrm{M}\gamma.$$

ou encore, en vertu de (5),

$$\alpha = -\frac{a^2}{c^2}\mathrm{L}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\beta = -\frac{b'^2}{c^2}\mathrm{M}\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

équations d'une droite passant par l'origine et le centre du second ellipsoïde. Remarquons qu'elle est conjuguée au plan

$$z = \mathrm{L}x + \mathrm{M}y.$$

Concluons de là que :

Propriété. — *Si deux ellipsoïdes semblables de forme et de position se coupent, le plan de leur intersection est parallèle au plan diamétral conjugué à la droite qui unit les centres des deux ellipsoïdes.*

Les équations (10) et (11) montrent que

Propriété. — *Si un ellipsoïde se meut de manière que son centre décrive la droite* (10), (11), *les intersections consécutives avec un ellipsoïde fixe, dont le centre*

*est à l'origine, et semblable de forme et de position avec le premier, seront des ellipses dont les plans sont tous parallèles au plan conjugué à la droite proposée dans l'un ou l'autre des deux ellipsoïdes.*

52. Supposons actuellement

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c',$$

c'est-à-dire que les deux ellipsoïdes soient égaux.

Supposons, en outre, que le second ait son centre en un point $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ de la surface du premier; dans ce cas, on fera, dans les équations précédentes,

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} = 1$$

et l'équation (9) devient :

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - \frac{1}{2} = o.$$

Or, le plan coupant au point $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, le premier ellipsoïde est

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = o.$$

De là, on déduit :

PROPRIÉTÉ. — *Supposons que, un ellipsoïde restant fixe, un autre égal au premier se meuve de manière que son centre reste sur la surface au premier et que ses axes principaux soient parallèles à ceux du premier, l'intersection des deux ellipsoïdes sera à chaque instant une ellipse dont le plan est parallèle au plan tangent mené au premier par le centre du second, et divise en deux parties égales la droite qui unit les deux autres.*

*On démontrerait facilement que les plans sécants sont eux-mêmes tangents à un ellipsoïde construit sur la moitié des axes principaux du premier.*

53. Si, dans les équations (4), on fait $M = o$, on trouve

$$\beta = o.$$

$$L = \pm \frac{cc'}{aa'} \sqrt{\frac{a^2 b'^2 - b^2 a'^2}{b^2 c'^2 - c^2 b'^2}}$$

$$N = \frac{1}{L} \frac{c^2 b'^2}{a'^2} \cdot \frac{ac'^2 + L\gamma a'^2}{c^2 b'^2 - L'^2 b^2}.$$

A ces conditions, il faudra ajouter la 6^me^ des équations (4), après qu'on y aura remplacé N par sa valeur. On voit par là que :

**Propriété.** — *Pour que deux ellipsoïdes ayant leurs axes parallèles se coupent suivant une courbe plane parallèle à un des axes principaux, il faut que leurs centres se trouvent dans un plan perpendiculaire à cet axe, et qu'en outre, on ait simultanément :*

$$\frac{a}{a'} > \frac{b}{b'} > \frac{c}{c'},$$

ou

$$\frac{a}{a'} < \frac{b}{b'} < \frac{c}{c'}.$$

**Remarque.** — *Si l'une ou l'autre* de ces inégalités n'est pas satisfaite, on aura pour L une valeur imaginaire.

54. Voyons la condition pour que la courbe d'intersection soit parallèle à un des plans coordonnés.

L'équation du plan devient : $z = N$. Les équations (4) se réduisent à :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

$$\alpha = o$$

$$\beta = o.$$

$$N^2 \left(\frac{c'^2}{c^2} - \frac{a'^2}{a^2}\right) - \frac{2a'^2}{a^2} \gamma N = \gamma^2 \frac{a'^2}{a^2} - c'^2 \left(\frac{a'^2}{a^2 - 1}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

cette dernière détermine N.

Si la valeur de N devient imaginaire, les deux surfaces ne se coupent pas.

Concluons de là que :

**Propriété.** — *Si, sur deux ellipses semblables et semblablement placées, dont les plans sont parallèles et les centres sur une même droite perpendiculaire à leurs plans, on construit deux ellipsoïdes, dont les troisièmes axes sont quelconques, s'il y a intersection, ils se coupent suivant des ellipses dont les plans sont parallèles aux plans des ellipses proposées.*

**55.** Supposons, en dernier lieu, que les centres des deux ellipsoïdes soient les mêmes; on a, dans ce cas :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$
$$\alpha = o$$
$$\beta = o$$
$$\gamma = o$$
$$N = a' \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 c'^2 - a'^2 c^2}}$$

ou encore :

$$N = a' \sqrt{\frac{\frac{1}{a'^2} - \frac{1}{a^2}}{\frac{c'^2}{a'^2} - \frac{c^2}{a^2}}}.$$

Pour que N soit réel, il faut que :

1° Si

$$\left.\begin{aligned} a' &> a \\ \text{on ait aussi :}\quad \frac{c'}{a'} &< \frac{c}{a} \\ \text{ou}\quad \frac{c'}{c} &< \frac{a'}{a} \end{aligned}\right\} (c).$$

2° Si

$$\left.\begin{aligned} a &> a' \\ \text{on ait :}\quad \frac{c'}{c} &> \frac{a'}{a} \end{aligned}\right\} (c').$$

Ainsi :

PROPRIÉTÉ. — *Si deux ellipsoïdes, ayant les axes principaux sur les mêmes directions, ont leurs sections principales, dans un seul de leurs plans, semblables, et que les conditions* (c) *ou* (c′) *soient remplies, ils se coupent suivant une section plane.*

### § 8. — Intersection d'un ellipsoïde avec un hyperboloïde a une nappe.

56. Si, dans l'équation (2) du paragraphe précédent, on change $c'^2$ en $-c'^2$, elle représente un hyperboloïde à une nappe ayant l'axe des $z$ comme axe imaginaire.

Les équations (4) du même paragraphe fourniront, dans ce cas :

$$\frac{a^2}{a'^2} = -\frac{c^2}{c'^2}$$

$$\frac{b^2}{b'^2} = -\frac{c}{c'^2},$$

résultat absurde, vu que le rapport de deux carrés ne saurait être négatif.

Les équations (4) seront absurdes pour cette surface, tant que M et L ne sont pas nulles.

Mais si on fait Z = N, on obtient pour condition d'une intersection plane :

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2}$$

$$z = \mathrm{N} = -\frac{a'^2 c^2}{a^2 c'^2 + a'^2 c^2}\,\gamma \pm cc'\frac{\sqrt{(a^2 - a'^2)(a^2 c'^2 + a'^2 c^2) - a^2 a'^2 \gamma^2}}{a^2 c'^2 + a'^2 c^2},$$

ce qui exige $a > a'$ et

$$\gamma < (a^2 - a'^2)\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{c'^2}{a'^2}\right)$$

pour que N soit réel.

Si l'on employait pour l'équation du plan la forme

$$y = \mathrm{L}x + \mathrm{N},$$

on arriverait à un résultat absurde.

Concluons de là que :

*L'intersection d'un hyperboloïde à une nappe avec un ellipsoïde ayant ses axes principaux parallèles à ceux de l'hyperboloïde, ne peut jamais être une courbe*

*plane que dans le cas où le centre de l'ellipsoïde se trouve sur la direction de l'axe imaginaire.*

57. Si cette dernière condition est satisfaite, il faudra, pour que l'intersection soit plane, que :

1. *L'ellipse de gorge soit semblable à la section principale de l'ellipsoïde, dont le plan est parallèle à celui de l'ellipse de gorge;*

2. *Que le rapport de l'ellipse de gorge à la section principale de l'ellipsoïde soit* $> 1$;

3. *Que la distance des centres des deux surfaces soit plus petite que :*

$$(a^2 - a'^2)\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{a'^2}{c'^2}\right).$$

Pour $y = o$, on a :

$$z = \pm\, cc' \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 c'^2 + a'^2 c^2}},$$

équation qui exige $a > a'$

Ce résultat prouve que :

PROPRIÉTÉ. — *Si sur deux ellipses semblables et semblablement placées, on construit :*

1. *Sur la plus petite un hyperboloïde à une nappe;*

2. *Sur la plus grande un ellipsoïde, les troisièmes axes étant quelconques, les deux surfaces se coupent suivant une ellipse dont le plan est parallèle à celui des ellipses proposées.*

On peut combiner cette propriété avec la précédente et dire que :

PROPRIÉTÉ. — *Si l'ellipsoïde, ainsi construit, se meut de manière que ses axes principaux conservent la même direction et que son centre reste sur l'axe imaginaire, les intersections consécutives seront des ellipses semblables et parallèles.*

## § 9. — Intersection de deux hyperboloïdes a une nappe.

58. Si, dans toutes les formules du § 7, on change les signes de $c^2$ et de $c'^2$, les résultats ainsi modifiés s'appliqueront aux deux surfaces proposées; ainsi l'on voit que :

**Propriété.** — *Si deux hyperboloïdes ont leurs axes principaux parallèles, sans que le centre de l'un ne se trouve dans aucun plan principal de l'autre, pour qu'ils se coupent suivant une courbe plane, il faut qu'ils soient semblables de forme et de position.*

On a, dans ce cas :

$$L = \frac{c'^2}{a'^2} \; \frac{\alpha}{\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$M = \frac{c'^2}{b'^2} \; \frac{\beta}{\gamma} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

et l'équation du plan qui contient la section devient

$$\frac{\alpha}{a'^2} x + \frac{\beta}{b'^2} y - \frac{\gamma}{c'^2} z + \frac{c'^2 - c^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^2}{a'^2} + \frac{\beta^2}{b'^2} - \frac{\gamma^2}{c'^2} = o \right) . \quad . \quad (3)$$

Si l'on regarde L et M comme constantes, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ comme variables, les équations (1) et (2) montrent que :

**Propriété.** — *Si un hyperboloïde à une nappe semblable à un hyperloïde donné se meut de manière que ses axes principaux restent parallèles et que son centre parcourt la droite* (1), (2), *il coupera constamment ce dernier suivant des courbes planes dont les plans sont parallèles au plan diamétral conjugué à cette droite.*

59. L'équation (3) montre, en outre, que si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

**Propriété.** — *Si un hyperboloïde se meut de manière que son centre reste sur la surface d'un autre hyperboloïde qui lui est égal, de manière que les axes principaux du premier soient constamment parallèles aux axes respectifs du second, il*

*coupera celui-ci dans chaque position suivant une courbe plane parallèle au plan tangent mené par le centre mobile au second hyperboloïde, et divise en deux parties égales la droite qui unit les centres.*

On voit de même que :

*Le plan sécant est continuellement tangent à un autre hyperboloïde construit sur les demi-axes de l'hyperboloïde fixe.*

60. C'est ici que se bornent les cas auxquels j'ai appliqué le principe énoncé au nº 8 de ce mémoire.

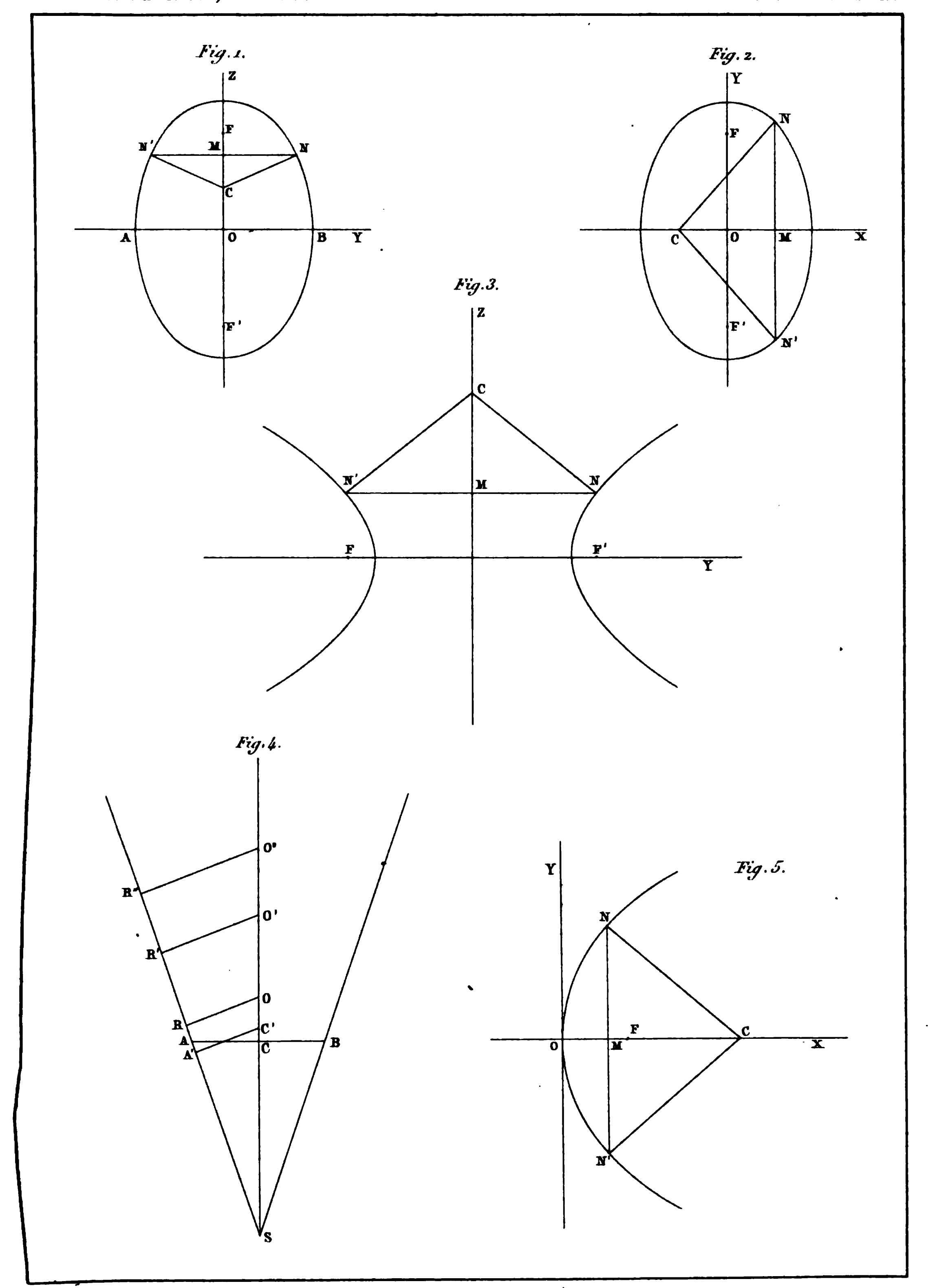
En suivant la même marche que dans les derniers paragraphes, on pourrait appliquer la méthode à l'intersection de deux paraboloïdes, et même à toutes les combinaisons des surfaces du second ordre deux à deux.

La discussion fournirait toujours de nouvelles propriétés.

On pourrait de même rechercher les cas d'une intersection plane dans l'hypothèse que les axes principaux des surfaces ne sont pas parallèles, et remonter ainsi à des cas plus généraux.

Par les problèmes que j'ai traités, ainsi que par les propriétés que j'ai déduites d'une discussion immédiate des formules primitives, on a pu se convaincre que le principe est fécond et que la méthode est simple, uniforme et expéditive.

FIN.


Fig. 1.
Z
F
N'
M
N
C
A
O
B
Y
F'
Fig. 2.
Y
N
F
C
O
M
X
F'
N'
Fig. 3.
Z
C
N'
M
N
F
F'
Y
Fig. 4.
O''
R''
O'
R'
O
R
C'
A
C
B
A'
S
Fig. 5.
Y
N
F
O
M
C
X
N'

# ESSAIS ANALYTIQUES.

## LES LIGNES DU TROISIÈME ORDRE.

PAR

**F. DAGOREAU;**

INSPECTEUR EN CHEF DES CONTRIBUTIONS DIRECTES,
DOUANES ET ACCISES.

(Mémoire présenté le 5 décembre 1857.)

# ESSAIS ANALYTIQUES.

## LES LIGNES DU TROISIÈME ORDRE.

### ÉQUATION GÉNÉRALE.

1. Soit

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = o \quad (A)$$

une équation complète du $3^{me}$ degré à deux variables. Tous les coefficients de cette équation étant indéterminés, elle est apte à représenter analytiquement une courbe quelconque du $3^{me}$ ordre; elle peut donc être considérée comme l'équation générale de cet ordre.

### BASE DE LA DIVISION.

2. Soit $y = zx + q$ l'équation d'une droite rapportée aux mêmes axes que la courbe de l'équation (A) : toutes les positions que ces deux lignes peuvent prendre l'une par rapport à l'autre, résulteront de la détermination des coefficients de l'équation

$$[Az^3 + Bz^2 + Cz + D]x^3 + [(3Az^2 + 2Bz + C)q + Ez^2 + Fz + G]x^2$$
$$+ [(3Az + B)q^2 + (2Ez + F)q + Hz + K]x + Aq^3 + Eq^2 + Hq + L = o \quad (B),$$

provenant de la combinaison des équations des deux lignes. Or, dans chacune de ces positions, la droite conserve la même forme : c'est donc la courbe

qui subit certaines modifications pour passer d'un cas à un autre. La résultante (B) doit, par conséquent, fournir les moyens de distinguer entre elles les diverses lignes du 3$^{me}$ ordre.

### CLASSES.

#### *Directions asymptotiques.*

3. L'équation (B) étant du 3$^{me}$ degré, peut avoir ses trois racines réelles, et l'une au moins doit l'être. Les deux lignes peuvent donc se rencontrer en trois points, et elles doivent toujours se rencontrer au moins en un point. Cependant, si le coefficient du terme en $x^3$ devient nul, la seule racine réelle ou l'une des trois racines réelles devient infinie, et alors les deux autres racines sont imaginaires ou réelles. Dans ce cas, l'un des points de rencontre est rejeté à distance infinie, et il ne peut plus exister, à distance finie, que deux points de rencontre, ou imaginaires ou réels. Mais l'annulation du coefficient du terme en $x^3$ exige l'équation $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = o$ (C), laquelle ne peut être satisfaite que par certaines valeurs de $z$. Or, $z$ représente la direction de la droite; donc il existe dans les lignes du 3$^{me}$ ordre des directions telles, que les droites qui en sont pourvues rencontrent la courbe en un point à distance infinie. Nous donnerons à ces directions le nom de *directions asymptotiques*.

4. Les trois racines de l'équation (C) peuvent être réelles, et l'une d'elles au moins doit l'être. En cas de réalité des trois racines, elles peuvent être toutes inégales ou simples; il se peut aussi que deux d'entre elles soient égales ou, ce qui revient au même, qu'il y ait une racine simple et une racine double; enfin elles peuvent être toutes égales, égalité qui produit une racine triple. Il en résulte que les lignes du 3$^{me}$ ordre possèdent toujours au moins une direction asymptotique qui peut être simple ou triple; elles peuvent aussi posséder trois directions asymptotiques simples, ou bien une direction simple et une direction double. Chacun de ces quatre cas pouvant être considéré comme le caractère distinctif d'une classe, les lignes du troisième ordre peuvent être divisées en quatre classes, distinguées par le nombre et la nature des directions asymptotiques. Les conditions analytiques de ces

classes consistent dans les relations qui, pour chacune d'elles, doivent exister entre les coefficients de l'équation (C).

### GENRES.

#### *Asymptotes rectilignes.*

**5.** L'équation (C) étant indépendante de $q$, chaque direction asymptotique appartient à un groupe de parallèles en nombre indéfini. Lorsque la valeur de $z$, tirée de l'équation (C), n'annule que le coefficient du terme en $x^3$, toutes les parallèles du système qui correspond à cette valeur de $z$ rencontrent la courbe à distance finie, en deux points réels ou imaginaires; mais si cette valeur annule en même temps les coefficients de $x^3$ et de $x^2$, l'équation (B) est réduite à une relation du 1er degré en $x$. Il y a alors deux points de rencontre à distance infinie, et les droites qui satisfont à la fois aux conditions (C) et $(3Az^2 + 2Bz + C)q + Ez^2 + Fz + G = o$ (D), ne peuvent rencontrer la courbe à distance finie qu'en un seul point; si, outre les deux coefficients précités, celui de $x$ devient aussi nul, c'est-à-dire, si l'on a aussi $(3Az + B)q^2 + (2Ez + F)q + Hz + K = o$ (E), l'équation (B) devient indépendante de $x$, et ne peut plus être satisfaite que par des valeurs infinies de cette variable; car on ne saurait avoir en même temps $Aq^3 + Eq^2 + Hq + L = o$, sans que la ligne dégénérât en un système d'une droite et d'une section conique. Les droites qui satisfont aux trois conditions (C), (D) et (E) ne peuvent plus rencontrer la courbe à distance finie.

**6.** Le coefficient de $x^2$ est une fonction de $z$ et de $q$; il peut donc devenir nul par l'une ou par l'autre de ces arbitraires. Lorsque l'équation (C) est satisfaite, la valeur de $z$ est déterminée, et alors le coefficient de $x^2$ ne contient plus d'autre arbitraire que $q$, au moyen de laquelle l'équation (D) peut être satisfaite, pourvu que le coefficient de $q$ ne devienne pas nul lui-même, par la valeur attribuée à $z$, pour satisfaire à l'équation (C). S'il le devient, l'équation (D) ne peut plus être satisfaite qu'à condition que la même valeur de $z$ satisfasse aussi à l'équation $Ez^2 + Fz + G = o$ ($\alpha$). Or, le coefficient de $q$ dans l'équation (D) n'est autre chose que la dérivée première du coefficient de $x^3$, ou de (C). Le coefficient de $q$ ne peut donc devenir nul qu'à condition

que l'équation (C) admette des racines égales; dans ce cas, le coefficient est forcément nul. Si (C) n'admet que des racines simples, l'équation (D) peut toujours être satisfaite par une valeur réelle et finie de $q$, mais elle ne peut l'être que par une seule valeur de cette arbitraire.

7. Il résulte de ce qui précède que, dans toute direction asymptotique simple, il y a toujours une unique droite spéciale qui rencontre la courbe en deux points à distance infinie, et, par conséquent, ne peut plus la rencontrer à distance finie qu'en un seul point. Cette droite spéciale est une asymptote de la courbe. Chaque direction asymptotique simple possède donc une asymptote rectiligne, déterminée par les conditions (C) et $q = -\frac{Ez^2 + Fz + G}{3Az^2 + 2Bz + C}$, et qui coupe la courbe à distance finie en un seul point dont l'abscisse est $x = -\frac{Aq^3 + Eq^2 + Hq + L}{(3Az + B)q^2 + (2Ez + F)q + Hz + K}$. Cependant, si les valeurs de $z$ et de $q$, aptes à satisfaire aux équations (C) et (D), satisfont également à l'équation (E), cet unique point de rencontre est lui-même rejeté à l'infini, et l'asymptote ne peut plus rencontrer la courbe à distance finie. Il y a, par conséquent, deux cas possibles pour l'asymptote de chaque direction asymptotique simple. Chacun de ces cas constitue un genre différent.

8. Les lignes des deux premières classes ne possèdent que des directions asymptotiques simples; il n'en existe qu'une seule dans la 1re classe, et il y en a trois dans la 2me. Les courbes de la 1re classe ne sont donc pourvues que d'une seule asymptote rectiligne, qui peut les couper en un point, ou ne pas les rencontrer à distance finie, et par suite cette classe n'admet que deux genres.

9. Chaque ligne de la deuxième classe possède trois asymptotes rectilignes, dont chacune peut couper la courbe en un point ou ne pas la rencontrer à distance finie. Si chacun de ces cas d'une asymptote pouvait exister avec les deux cas de chacune des deux autres asymptotes, il y aurait quatre cas différents possibles; mais si les cas de trois asymptotes sécantes, de deux asymptotes sécantes et d'une asymptote non sécante, et enfin d'aucune asymptote sécante, sont possibles, il n'en est pas de même de celui d'une seule asymptote sécante, à cause de l'incompatibilité qui existe entre les conditions analytiques nécessaires à ce cas, ainsi que nous le démontrerons plus loin. La deuxième classe n'admet donc que trois genres.

10. Lorsque la condition (C) est satisfaite, la relation $3Az^2+2Bz+C=o$ ($\beta$) ne peut exister que pour les directions asymptotiques multiples pour lesquelles elle est de rigueur. Ce cas se présente dans la 3<sup>me</sup> classe pour la direction asymptotique double, et dans la 4<sup>me</sup> classe pour la seule direction asymptotique qui y existe et qui est triple. Dans cette dernière classe, la valeur de $(3Az+B)$ doit être nulle, tandis que, dans l'autre, elle ne peut l'être. Si, dans le cas d'une direction asymptotique double, la condition ($\alpha$) n'est pas satisfaite, alors le terme en $x^2$ subsiste dans l'équation (B), et, par suite, toutes les droites de cette direction rencontrent la courbe en deux points réels ou imaginaires, et il n'existe parmi elles aucune asymptote, ou, pour mieux dire, l'asymptote est située à distance infinie, puisque, dans ce cas, $q=-\frac{Ez^2+Fz+G}{o}=-\infty$. Lorsque la valeur de $z$, qui satisfait à l'équation (C) et à sa dérivée première, satisfait aussi à l'équation ($\alpha$), les termes en $x^3$ et en $x^2$ disparaissent de l'équation (B), qui n'est plus que du 1<sup>er</sup> degré en $x$, et doit toujours être de ce degré pour toutes les valeurs de $q$, autres que celles qui annulent le coefficient de $x$. Mais ce coefficient est une fonction du 2<sup>me</sup> degré en $q$, qui ne peut être réduite au 1<sup>er</sup>, parce que $(3Az+B)$ ne peut être nul. La condition d'annulation du coefficient de $x$ fournit donc pour $q$ deux valeurs qui peuvent être ou imaginaires, ou réelles et inégales, ou réelles et égales. Dans le 1<sup>er</sup> cas, il y a une direction asymptotique double; chacune des droites de cette direction coupe la courbe en un point, et il n'existe parmi elles aucune asymptote réelle; dans le second cas, il y a parmi ces droites deux asymptotes distinctes parallèles qui ne peuvent rencontrer la courbe à distance finie; et dans le 3<sup>me</sup> cas, ces deux asymptotes coïncident et forment une asymptote unique double. Il y a, par conséquent, pour la direction asymptotique double, quatre cas différents, et comme dans chacun d'eux les deux cas de la direction asymptotique simple sont possibles, il en résulte que la troisième classe admet huit genres différents.

11. Si, dans la 4<sup>me</sup> classe, on donne à $z$ l'unique valeur apte à satisfaire à l'équation (C), la condition ($\beta$) est satisfaite, et on a aussi $3Az+B=o$. Le coefficient du terme en $x^2$ se réduit donc à $(Ez^2+Fz+G)$ et celui du terme en $x$ à $[(2Ez+F)\,q+Hz+K]$. Si la valeur de $z$, qui satisfait à

l'équation (C), ne satisfait pas en même temps à l'équation ($\alpha$), l'équation (B) reste du 2[me] degré en $x$, et, par suite, toutes les droites de la direction asymptotique triple rencontrent la courbe à distance finie en deux points réels ou imaginaires, et il n'existe parmi elles aucune asymptote à distance finie. Si la valeur précitée de $z$ satisfait aux conditions (C) et ($\alpha$), l'équation (B) est réduite au 1[er] degré en $x$, et comme le coefficient de cette variable est une fonction du 1[er] degré en $q$, et, par conséquent, ne peut être annulé que par une seule valeur de cette arbitraire, toutes les droites de la direction asymptotique coupent la courbe en un point et comprennent parmi elles une seule asymptote qui ne rencontre pas la courbe à distance finie. Cette asymptote n'existe toutefois à distance finie qu'à condition que $(2Ez + F)$ ne soit pas nul, c'est-à-dire qu'à condition que la racine triple de (C) ne soit pas racine double de ($\alpha$). La direction asymptotique triple admet donc trois cas différents, et comme dans la 4[me] classe il n'y a qu'une seule direction asymptotique, il s'ensuit que cette classe n'admet que trois genres.

12. D'après ce qui précède, les quatre classes du 3[me] ordre peuvent être sous-divisées comme il suit : la 1[re] classe en deux genres; la 2[me] classe en trois genres; la 3[me] classe en huit genres, et la 4[me] classe en trois genres. Il y a, par conséquent, seize genres de lignes du 3[me] ordre, distinguées par le nombre de leurs asymptotes rectilignes et par le nombre des points d'intersection de la courbe avec chacune de ses asymptotes. Les conditions analytiques de ces genres consistent dans les relations qui doivent exister entre les coefficients de l'équation de la courbe, pour satisfaire aux hypothèses constitutives de chacun d'eux, et ces relations sont données par l'annulation successive des coefficients de $x^2$ et de $x$ dans la résultante (B), celui de $x^3$ étant nul.

### ESPÈCES.

#### *Tangentes-limites.*

13. Du moment que la classe et le genre sont déterminés, l'équation (B) ne peut plus donner que des racines finies, imaginaires ou réelles. La discussion ultérieure de cette équation, appropriée à la classe et au genre, ne peut donc servir qu'à faire connaître le nombre des racines réelles, leur signe

et leur degré de multiplicité, et par suite, si cette discussion sert de base à la sous-division des genres en espèces, les caractères géométriques qui distinguent ces dernières doivent consister dans des affections de la courbe dans l'espace limité.

**14.** Puisque toute ligne du 3$^{me}$ ordre possède au moins une direction asymptotique, on peut toujours donner une pareille direction à l'un des axes des coordonnées: Dans ce cas, l'une des racines de l'équation (C) doit être ou infinie ou nulle : il faut donc que l'un des termes extrêmes de cette équation ait un coefficient nul et, par conséquent, que l'équation de la courbe soit dépourvue du terme cube de l'une des deux variables. Cette équation peut donc toujours être privée de l'un de ces termes sans cesser d'être générale, et alors elle peut, par rapport à la variable dont le terme cube manque, être résolue comme une équation du 2$^{me}$ degré. En supposant que l'axe des ordonnées ait une direction asymptotique, l'équation de la courbe sera privée du terme en $y^3$ : elle sera donc de la forme $Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$ (A'). En la résolvant par rapport à $y$, on obtient :

$$y = -\frac{Cx^2 + Fx + H}{2(Bx + E)} \pm \sqrt{\frac{(Cx^2 + Fx + H)^2 - 4(Bx + E)(Dx^3 + Gx^2 + Kx + L)}{4(Bx + E)^2}}.$$

**15.** La valeur de $y$ qui précède n'est réelle que pour autant que l'expression sous-radicale ne soit pas négative. Si l'on fait croître $x$, depuis l'infini négatif jusqu'à l'infini positif, la partie radicale peut devenir nulle un certain nombre de fois. Chaque fois que cela arrive, les deux valeurs correspondantes de $y$ sont égales; par suite, la droite menée, parallèlement à l'axe des ordonnées, par le point correspondant à cette valeur de $x$, est une tangente à la courbe, et ne peut la rencontrer à distance finie qu'au point de contact, à cause de sa direction asymptotique; comme les valeurs de $x$ qui précèdent et suivent celles qui annulent le radical donnent au polynôme sous-radical des valeurs de signes contraires, il en résulte que la courbe n'existe que d'un côté de la tangente, qu'elle atteint sans la dépasser. Ce polynôme change de signe en passant par zéro : toutes les valeurs de $x$ comprises entre deux valeurs consécutives dont chacune annule le radical, doivent donc fournir des résultats de même signe, et, par conséquent, deux tangentes consécutives

comprennent entre elles ou une partie de la courbe, ou un espace dans lequel la courbe n'existe pas. C'est pourquoi nous donnerons à ces tangentes le nom de *tangentes-limites;* elles servent à déterminer le nombre et la position des parties distinctes dont la courbe se compose.

Chaque valeur de $x$ qui annule le polynôme sous-radical est une racine réelle de l'équation $(Cx^2 + Fx + H)^2 - 4(Bx + E)(Dx^3 + Gx^2 + Kx + L) = o$ (F). Chacune de ces racines donne donc une tangente-limite; par conséquent, en prenant la discussion de cette équation appropriée à la classe et au genre pour base de la sous-division en espèces, ce système a pour conséquence géométrique la considération du nombre et de la position des tangentes-limites et, par suite, celle du nombre et de la position des parties distinctes de la courbe.

16. Les racines réelles différentes de l'équation (F) donnent des tangentes-limites distinctes, et l'égalité de deux ou de plusieurs racines indique la réunion de deux ou de plusieurs tangentes-limites. La réunion de deux tangentes-limites réduit à une droite l'espace qui séparait auparavant deux parties de la courbe, et, par suite, les réunit sur cette droite; elle peut aussi avoir pour conséquence la simplification de la forme d'une de ces parties; ces deux phénomènes ont lieu à la fois, en cas de réunion de trois tangentes-limites, ou, ce qui revient au même, en cas d'égalité de trois racines de l'équation (F).

Les racines de cette équation peuvent être ou toutes plus grandes ou toutes plus petites que $-\frac{E}{B}$, ou bien les unes peuvent être plus grandes et les autres plus petites que cette quantité. Dans le premier cas, les tangentes-limites sont toutes d'un même côté de l'ordonnée-asymptote à laquelle elles sont parallèles; dans le second cas, les unes sont d'un côté et les autres de l'autre côté de cette asymptote.

Si l'une des racines est égale à $-\frac{E}{B}$, l'une des tangentes-limites coïncide avec l'asymptote; cette dernière devient elle-même une limite, et, par conséquent, ne peut plus couper la courbe. Mais cette non-intersection constitue des genres particuliers : nous n'aurons donc pas à nous occuper de ce cas, lors de la recherche des différentes espèces de chaque genre.

17. D'après ce qui précède, on ne doit admettre comme formant des es-

pèces différentes que les cas d'un même genre qui diffèrent entre eux, soit par le nombre des parties dont les lignes se composent, soit par leur position relative entre elles et par rapport à l'asymptote, soit par leur nature. Toute hypothèse qu'on pourrait faire sur les racines de l'équation (F), et qui n'entraînerait pas l'une ou l'autre des conséquences géométriques précitées, ne doit pas être considérée comme la condition analytique d'une espèce; elle ne peut être admise que comme la condition analytique d'une sous-espèce ou d'une variété.

Avant de faire l'application de ces principes à la détermination des espèces, nous rechercherons quelles sont les simplifications dont l'équation complète (A) est susceptible, soit pour rester générale, soit pour représenter certaines classes ou certains genres.

### SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION COMPLÈTE.

*Conditions analytiques des classes et des genres.*

**18.** On sait déjà que l'équation (A) reste générale, lorsqu'elle est privée du terme cube de l'une des variables. Supposons que ce soit le terme en $y^3$ qui manque. On a alors $A = o$, et par suite, l'équation (C) se réduit à $Bz^2 + Cz + D = o$ (C'). Cette équation donne les deux directions asymptotiques autres que celle attribuée à l'axe des ordonnées. Ses deux racines sont imaginaires, réelles et inégales, ou réelles et égales, selon que $C^2 - 4BD \lesseqgtr o$. Dans chacun de ces trois cas, les directions qui sont réelles diffèrent de celle de l'axe des ordonnées, à moins que B et C ne soient nuls à la fois; elles sont alors égales entre elles et à la direction de l'axe des ordonnées, laquelle, par conséquent, est triple.

Si l'on suppose B isolément nul, la direction de l'axe des ordonnées est double; il en est de même si B et D sont nuls en même temps. En supposant D nul isolément, l'une des directions données par l'équation (C') est nulle, et l'autre est égale à $-\frac{C}{B}$. Les trois directions sont donc réelles et différentes. Les hypothèses de B et de D nuls, soit isolément, soit simultanément, ne peuvent donc convenir à chacune des quatre classes; mais si l'on suppose

C nul, l'équation (C') se réduit à $Bz + D = o$, et donne $z = \pm\sqrt{-\frac{D}{B}}$; les deux racines sont, par conséquent, imaginaires, si B et D sont de même signe (1re classe); elles sont réelles et différentes, si B et D sont différents de zéro et de signes contraires (2me classe); si D est nul, elles sont égales entre elles et différentes de la direction de l'axe des ordonnées (3me classe); et enfin elles sont égales à cette dernière direction, si B est nul (4me classe). Il en résulte qu'une équation privée du terme cube de l'une des variables et du terme dans lequel cette variable multiplie le carré de l'autre, est aussi générale que l'équation complète (A); elle indique seulement que les deux axes des coordonnées ont certaines directions. Nous connaissons déjà celle de l'axe des ordonnées; l'examen de la valeur de $y$ tirée de l'équation (A'), nous fera connaître l'autre.

19. Cette valeur se compose d'une partie rationnelle et d'une partie radicale, liée à la première par le double signe. Le lieu géométrique de l'équation $y = -\frac{Cx^2 + Fx + H}{2(Bx + E)}$ coupe donc en deux parties égales chacune des cordes de la direction de l'axe des ordonnées, qui est une direction simple aussi longtemps que B n'est pas nul, et qui, en cas de $B = o$, devient une direction triple. Dans le premier cas, ce lieu géométrique est une hyperbole du 2me ordre, rapportée à un système d'axes dont celui des ordonnées est parallèle à l'une des asymptotes de cette hyperbole, et dont l'autre axe devient parallèle à la deuxième asymptote de la même hyperbole, du moment que C est nul. Ces axes coïncident avec les deux asymptotes de l'hyperbole si, avec $C = o$, E et F sont aussi nuls. Mais $x = -\frac{E}{B}$ est l'équation de l'asymptote de la ligne du 3me ordre, dont la direction a été attribuée à l'axe des ordonnées : cette asymptote est donc commune à cette ligne et à l'hyperbole bissectrice des cordes de sa direction. Lorsque $B = o$, l'équation $2Ey + Cx^2 + Fx + H = o$ représente une parabole; mais si l'on attribue à l'axe des ordonnées la direction asymptotique triple, C doit forcément être nul avec B, et alors l'équation précitée se réduit à $2Ey + Fx + H = o$, équation d'une droite que l'hypothèse de E et F nuls à la fois rejetterait à l'infini. Cette hypothèse peut donc bien être faite dans chacune des trois premières classes, mais elle n'est plus généralement possible dans la 4me. Cela se conçoit, du reste, car la condition $E = o$ exige l'existence, à distance finie, d'une asym-

ptote, existence qui est générale pour une direction asymptotique simple, mais qui n'a lieu que par exception, dans une direction asymptotique triple.

En résumé, on voit qu'une équation de la forme $Bxy^2 + Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$ est générale pour les quatre classes qui, avec cette forme (en supposant B positif, ce qui est permis), seront distinguées par les conditions analytiques suivantes : 1re classe, B et D différents de zéro et D positif; 2me classe, B et D différents de zéro et D négatif; 3me classe, B différent de zéro et D nul; 4me classe, B nul et D différent de zéro.

On voit, en outre, qu'une équation de la forme $Bxy^2 + Dx^3 + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$ (H) est apte à représenter toutes les lignes des trois premières classes, avec les conditions précitées de B différent de zéro et $D \gtreqless o$. Elle indique que la courbe est rapportée à un système d'axes, qui sont les deux asymptotes de l'hyperbole bissectrice des cordes de la direction de l'axe des ordonnées, lequel est l'asymptote de l'une des directions asymptotiques simples de la courbe. Pour que l'équation soit générale pour la 4me classe, il faut qu'elle contienne les six derniers termes de l'équation complète (A); elle doit donc être de la forme $Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$ (G). Cette forme indique que la direction asymptotique triple a été attribuée à l'axe des ordonnées. La position de cet axe, ainsi que la direction et la position de celui des abscisses restent indéterminées, et peuvent servir à l'évanouissement de trois termes de l'équation (G), selon le genre qu'elle doit représenter.

20. En donnant à l'équation de la courbe la forme (H), générale pour les trois premières classes, l'équation (B) se réduit à $(Bz^2 + D)x^3 + (2Bzq + G)x^2 + (Bq^2 + Hz + K)x + Hq + L = o$ (B'); et l'asymptote de la direction simple attribuée à l'axe des ordonnées, est donnée par $x = o$. Cette valeur introduite dans l'équation (H) donne $y = -\frac{L}{H}$. L'asymptote coupe donc la courbe en un point à distance finie, aussi longtemps que H est différent de zéro, et elle ne la rencontre qu'à l'infini, si H est nul. Les deux cas possibles de la direction asymptotique simple attribuée à l'axe des ordonnées, sont donc distingués par les conditions analytiques H différent de zéro et H nul, et, par suite, ce sont aussi ces conditions qui distinguent les deux genres de la première classe.

21. Dans la 2me classe, D est négatif; les deux asymptotes, autres que celle prise pour axe des ordonnées, sont donc données par les équations

$$y = x\sqrt{\frac{D}{B}} - \frac{G}{2\sqrt{BD}} \text{ (1)} \quad \text{et} \quad y = -x\sqrt{\frac{D}{B}} + \frac{G}{2\sqrt{BD}},$$

et l'abscisse du point d'intersection de chacune de ces droites avec la courbe, est donnée par :

$$x = -\frac{\sqrt{2D}\,(2L\sqrt{D} - GH)}{G^2\sqrt{B} + 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}} \quad \text{et} \quad x = -\frac{\sqrt{2D}\,(2L\sqrt{D} + GH)}{G^2\sqrt{B} - 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}}.$$

La première asymptote coupe la courbe en un point, si $(G^2\sqrt{B} + 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B})$ est différent de zéro, et, dans le cas contraire, elle ne peut la rencontrer à distance finie. De même, la deuxième asymptote coupe la courbe en un point si $(G^2\sqrt{B} - 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B})$ est différent de zéro, et, dans le cas contraire, elle ne peut la rencontrer à distance finie. Or, chacune de ces quantités peut être différente de zéro, si H l'est; mais si H est nul, elles deviennent identiques : l'une ne peut donc alors devenir nulle sans que l'autre le devienne en même temps. Si l'une de ces quantités est nulle, l'autre se réduit à $\pm\ 8HD\sqrt{D}$, qui ne peut devenir nulle qu'à condition que H le soit. Il en résulte que chacune des trois asymptotes peut couper la courbe; que l'une d'elles peut ne pas la rencontrer à distance finie, pendant que chacune des deux autres la coupe en un point, et que chacune de ces asymptotes peut aussi ne pas rencontrer la courbe à distance finie; tandis qu'il est impossible que l'une coupe la courbe, lorsque les deux autres ne la rencontrent pas à distance finie, ainsi que cela a déjà été dit au § 9.

En donnant à l'équation la forme (H), les trois genres de la 2me classe sont distingués par les conditions analytiques suivantes :

1er *Genre.* H, $[G^2\sqrt{B} + 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}]$, et $[G^2\sqrt{B} - 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}]$ différents de zéro;

2me *Genre.* H, ou $[G^2\sqrt{B} + 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}]$, ou $[G^2\sqrt{B} - 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}]$ nul;

*3$^{me}$ Genre.* H nul, et $[G^2\sqrt{B} + 4HD\sqrt{D} + 4KD\sqrt{B}]$ nul, ou simplement H nul et $G^2 + 4KD = o$.

On peut aussi rapporter les lignes de la 2$^{me}$ classe à deux de leurs asymptotes prises pour axes; alors l'équation de la courbe est de la forme :

$$Bxy^2 + Cx^2y + Fxy + Hy + Kx + L = o,$$

et les trois genres sont analytiquement distingués comme suit :

1$^{er}$ genre : H, K et (BK — CH) différents de zéro;
2$^{me}$ genre : H ou K ou (BK — CH) nul;
3$^{me}$ genre : H et K nuls.

22. Dans la 3$^{me}$ classe, D est nul; l'équation (C′) donne, par conséquent, [illegible] $= o$, pour la direction double, et alors l'équation (B′) se réduit à $Gx^2 + (Bq^2 + K)x + Hq + L = o$. Cette équation indique que chaque droite de la direction asymptotique double coupe la courbe en deux points réels ou imaginaires, et que cette direction ne contient aucune asymptote à distance finie, aussi longtemps que G n'est pas nul. Lorsque $G = o$, l'équation (B′) se réduit à $(Bq^2 + K)x + Hq + L = o$, qui, pour l'hypothèse de $(Bq^2 + K) = o$, donne $q = \pm\sqrt{-\frac{K}{B}}$. Les deux asymptotes sont donc ou imaginaires, ou réelles et différentes, ou réelles et coïncidentes, selon que $K \gtreqless o$ (B étant positif). Les quatre cas de la direction asymptotique double sont donc distingués par les conditions analytiques suivantes : 1° G différent de zéro; 2° G nul et K positif; 3° G nul et K négatif; 4° G et K nuls. En combinant les conditions de chacun de ces cas avec celles des deux cas de la direction asymptotique simple (H différent de zéro et H nul), on obtient les conditions analytiques de chacun des huit genres de la 3$^{me}$ classe.

23. En donnant à l'équation la forme (G), propre à la 4$^{me}$ classe, l'équation (B) se réduit à $Dx^3 + (Ez^2 + Fz + G)x^2 + [(2Ez + F)q + Hz + K]x + Eq^2 + Hq + L = o$. Cette relation peut donner les conditions analytiques de chacun des trois genres; la valeur de $y$, tirée de l'équation (G), les fournira plus facilement. Cette valeur est

$$y = -\frac{Fx + H}{2E} \pm \frac{1}{2E}\sqrt{(Fx + H)^2 - 4E(Dx^3 + Gx^2 + Hx + L)}.$$

Elle indique qu'aussi longtemps que E n'est pas nul, aucune des ordonnées ne peut devenir une asymptote, et que chacune rencontre la courbe en deux points réels ou imaginaires. Si $E = o$, l'équation (G) se réduit à $Fxy + Dx^3 + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$; d'où l'on tire $y = -\frac{Dx^3 + Gx^2 + Kx + L}{Fx + H}$. Chaque ordonnée ne rencontre donc la courbe qu'en un point, et il y en a une dont le point de rencontre est à distance infinie : c'est l'asymptote donnée par $x = -\frac{H}{F}$, qui, par conséquent, n'existe à distance finie qu'à condition que F ne soit pas nul. Si $F = o$, la valeur de $y$ se réduit à $y = -\frac{Dx^3 + Gx^2 + Kx + L}{H}$; elle indique que toutes les ordonnées coupent la courbe en un point, et qu'il n'en existe aucune à distance finie qui soit une asymptote; elle indique encore que H doit être différent de zéro. Les trois genres de la 4$^{me}$ classe sont donc distingués par les conditions analytiques suivantes, en cas d'une équation de la forme (G) : 1$^{er}$ genre : E différent de zéro; 2$^{me}$ genre : E nul et F différent de zéro; 3$^{me}$ genre : E et F nuls et H différent de zéro. Dans le 1$^{er}$ genre, F et H peuvent être nuls, et dans le 2$^{me}$ genre, H peut l'être.

### ASYMPTOTES CURVILIGNES.

#### *Nature des branches illimitées.*

24. On a vu que les cordes de toute direction asymptotique simple ont pour bissectrice une hyperbole dont deux branches convergent avec deux branches de la ligne du 3$^{me}$ ordre, attendu que ces quatre branches ont la même droite pour asymptote commune; pour ce motif, on dit que cette hyperbole est une asymptote curviligne de la courbe du 3$^{me}$ ordre. Mais cette hyperbole n'en est pas la seule asymptote curviligne : toutes les hyperboles qui ont pour une de leurs asymptotes celle de la direction simple, sont dans le même cas. Les deux branches illimitées de cette direction admettent donc une infinité d'asymptotes curvilignes, et comme toutes sont des hyperboles, on en a conclu que la nature de ces branches est hyperbolique.

En résolvant, par rapport à $x$, l'équation (H), appropriée à la 3$^{me}$ classe, on trouve que les cordes de la direction double ont pour bissectrice une

parabole qui converge avec les deux branches illimitées que la courbe du 3[me] ordre possède dans cette direction, et qui, par conséquent, en est une asymptote curviligne, comme le sont toutes les paraboles convergentes avec la parabole précitée; d'où l'on a conclu que les deux branches illimitées de la direction asymptotique double sont de nature parabolique. Cette nature appartient en général aux branches des directions d'un degré pair de multiplicité, comme la nature hyperbolique appartient, en général, aux branches des directions asymptotiques simples. Dans les directions d'un degré impair de multiplicité, la nature parabolique domine toujours, et très-souvent s'y rencontre seule; la nature hyperbolique peut cependant aussi s'y rencontrer avec la nature parabolique, mais elle ne peut jamais y exister seule. Les lignes d'un ordre quelconque fournissent des exemples de branches illimitées de toutes les natures qui se rencontrent dans les ordres inférieurs, mais elles possèdent aussi des branches de natures spéciales à cet ordre qui ne se rencontrent dans aucun ordre inférieur. Ces natures ont été considérées soit comme hyperboliques, soit comme paraboliques, selon qu'on leur a trouvé de l'analogie soit avec la nature hyperbolique, soit avec la nature parabolique du 2[me] degré. Il en résulte que, si l'on ne veut admettre que deux natures générales, il existe cependant pour chacune d'elles certaines spécialités dans chaque ordre. Il ne suffit donc pas de dire que la nature d'une branche est hyperbolique ou parabolique, il faut y ajouter qu'elle est hyperbolique ou parabolique de tel ou de tel ordre.

C'est Euler qui, le premier, a conçu l'idée de distinguer la nature des branches infinies d'après celles des asymptotes qui leur sont propres : il a pris ces circonstances pour base d'une méthode de division en familles, qu'il nomme *espèces* et qui, d'après notre méthode, forment le 2[me] degré de division ou les *genres*. En opérant de cette manière, Euler a trouvé pour le 3[me] ordre un nombre d'espèces égal à celui de nos genres; on ne peut cependant pas conclure de là que les deux méthodes sont identiques ou qu'elles conduisent aux mêmes résultats : les principes qui servent de base à chacune d'elles diffèrent essentiellement, et si, dans le 3[me] ordre, elles donnent le même nombre pour l'un des degrés de division, il n'en est cependant pas de même pour les ordres supérieurs au troisième.

### DIAMÈTRES.

**25.** On nomme *centre des moyennes distances d'un système de points*, le point dont la distance à un axe ou à un plan est la moyenne arithmétique des distances des points donnés à cet axe ou à ce plan. Le centre des moyennes distances des points d'intersection d'une ligne du 3[me] ordre avec une transversale rectiligne, $y = zx + q$, a donc pour abscisse le tiers du coefficient du deuxième terme de la résultante (B), pris en signe contraire; on a, par conséquent,

$$x = -\frac{(3Az^2 + 2Bz + C)q + Ez^2 + Fz + G}{3(Az^3 + Bz^2 + Cz + D)},$$

ou bien

$$(3Az^2 + 2Bz + C)y + (Bz^2 + 2Cz + 3D)x + Ez^2 + Fz + G = o.$$

Équation du lieu géométrique des centres des moyennes distances des points d'intersection de la courbe avec la tranversale $y = zx + q$, se mouvant parallèlement à elle-même. Ce lieu géométrique est une droite. Les centres des moyennes distances des points d'intersection de la courbe avec un système de parallèles de la direction $z$, se trouvent donc sur une ligne droite à laquelle on donne le nom de *diamètre* relatif à cette direction $z$. En donnant à l'équation soit la forme (H), soit la forme (G), l'équation du diamètre d'une ligne de l'une des trois premières classes sera $3Bz.y + (Bz^2 + 3D)x + G = o$. Pour une ligne de la 4[me] classe, cette équation sera $3Dx + (Ez^2 + Fz + G) = o$. Dans cette classe, tous les diamètres ont donc la direction asymptotique triple.

### CENTRES.

**26.** On donne le nom de *centre* au point d'intersection de deux diamètres. Dans les trois premières classes, les seules dans lesquelles le centre peut exister à distance finie, le point d'intersection des deux diamètres relatifs aux directions $z$ et $z'$ aura donc pour coordonnées $x = \frac{G}{Bzz' - 3D}$ et $y = -\frac{G(z+z')}{2(Bzz' - 3D)}$. Chacune de ces coordonnées est une fonction de $z$ et de $z'$; par suite, la posi-

*tion* du centre varie pour chaque couple de diamètres, à moins que les valeurs des coordonnées précitées ne restent invariables, quels que soient $z$ et $z'$, ce qui ne peut être que si G est nul. Les lignes des trois premières classes du 3^me ordre admettent donc, en général, une infinité de centres qui, dans le cas spécial d'absence du terme en $x^2$ dans l'équation de la forme (H), se réunissent à l'origine, pour y former un centre unique et général des diamètres.

La définition générale du diamètre et celle du centre sont empruntées à la nouvelle théorie de M. Steichen, professeur à l'école militaire, sur les centres et diamètres d'un degré quelconque, que cet auteur a exposée dans son *Mémoire sur les courbes algébriques* et dans son ouvrage intitulé : *Supplément à la Géométrie.*

### DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

**27.** Lorsque deux diamètres sont tels que la direction de chacun est celle dont l'autre est le diamètre relatif, on dit que ces deux diamètres ont des directions conjuguées, et lorsque ces deux diamètres existent à distance finie, ils forment un système de diamètres conjugués. Les conditions auxquelles les directions $z$ et $z'$ sont conjuguées sont donc

$$z' = -\frac{Bz^2 + 3D}{2Bz} \quad \text{et} \quad z = -\frac{Bz'^2 + 3D}{2Bz'},$$

d'où l'on tire $Bz^2 - Bz'^2 = B(z + z')(z - z') = o$. Or, B ne peut être nul ; $(z - z')$ ne peut pas non plus l'être, puisque les deux directions doivent être différentes : il faut, par conséquent, que $z + z' = o$, d'où $z = -z'$, ce qui donne $z = \pm\sqrt{\frac{3D}{B}}$ et $z' = \mp\sqrt{\frac{3D}{B}}$. Ces valeurs démontrent que $z$ et $z'$ ne peuvent être réels que si B et D sont de même signe ; il n'y a donc que la première classe qui admette ces diamètres conjugués, et elle n'en admet qu'un seul système. Ce système coupe l'asymptote rectiligne, avec laquelle il forme un triangle qui est l'analogue de celui que les trois asymptotes rectilignes forment dans la 2^me classe, où il n'existe pas de diamètres conjugués.

Lorsque $B = 3D$, les deux diamètres conjugués sont perpendiculaires, car alors $z = 1$ et $z' = -1$; on a, dans ce cas, le système rectangulaire auquel, dans le 2me ordre, on donne le nom d'*axes principaux*.

En prenant les diamètres conjugués pour axes des coordonnées, l'équation de la courbe prend la forme $Ay^3 + Dx^3 + Fxy + Hy + Kx + L = o$, forme qui n'appartient qu'aux équations des lignes de la première classe.

### SYMÉTRIE DIRECTE.

28. On donne le nom d'*axe de symétrie directe* à toute droite bissectrice d'un système de parallèles. La symétrie est orthogonale, si la droite est perpendiculaire aux cordes; dans le cas contraire, elle est oblique. Il résulte de cette définition que les cordes ne doivent rencontrer la courbe à distance finie qu'en deux points, ou avoir une direction asymptotique. Ce n'est donc que dans les directions asymptotiques simples et dans les premiers cas de la direction double et de la direction triple que l'axe de symétrie directe est possible. Dans le 1er genre de la 4me classe, la bissectrice des cordes de la direction asymptotique triple est en effet une droite; mais dans les deux premiers genres de la 3me classe, c'est une parabole qui ne peut pas dégénérer en une droite, et dans le premier cas d'une direction simple, la bissectrice des cordes de cette direction est une hyperbole qui, dans le deuxième cas, dégénère en une droite. Il s'ensuit que la symétrie directe n'est possible que dans le 2me genre de la 1re classe, dans le 2me et le 3me genre de la 2me classe, dans chacun des quatre genres de la 3me classe, où H est nul, et enfin, dans le 1er genre de la 4me classe. Dans ces genres, les courbes possèdent forcément un axe de symétrie directe, qui est l'axe des abscisses, lorsque l'équation a la forme (H), ou bien la forme (G), avec les conditions de F et H nuls. Dans chacun de ces genres, la courbe ne possède qu'un seul axe de symétrie, sauf dans le 3me genre de la 2me classe, où elle en possède trois.

### SYMÉTRIE INVERSE.

29. On nomme *centre de symétrie inverse*, un point tel que toute droite

qui y passe, forme une corde dont les points d'intersection avec la courbe ont des coordonnées de mêmes valeurs numériques et de signes contraires. Il faut donc que l'équation de la courbe ne contienne que des termes dans lesquels l'une des variables seulement soit à une puissance impaire; elle doit être, par conséquent, de la forme $Bxy^2 + Dx^3 + Hy + Kx = o$. Cette forme indique que la courbe doit passer par l'origine, qui est le centre général des diamètres; elle indique aussi que le terme $Hy$ doit toujours exister dans l'équation, et que, si $D = o$, le terme $Kx$ doit également s'y trouver. Nous verrons plus tard que la symétrie inverse n'est possible que dans une seule espèce de chacune des 1re, 2me et 4me classes, et dans deux espèces de la 3me classe; encore n'y existe-t-elle pas forcément.

### DÉFINITIONS.

30. Pour faciliter la description des espèces, nous adopterons les dénominations suivantes, dont la majeure partie est empruntée à Newton.

Toute partie fermée et rentrant sur elle-même est une *ovale conjuguée*; lorsqu'une pareille partie se réduit à un point, il y a un *point conjugué*. Toute partie munie de deux branches illimitées est une *nappe*, qui est hyperbolique ou parabolique, si ses branches sont toutes les deux de même nature; elle est hyperbolo-parabolique, si ses deux branches sont de natures différentes. La nappe est *nouée* lorsqu'une ovale s'y réunit; elle est *pointue* en cas de sa réunion avec un point conjugué, et elle est *pure*, si elle ne possède ni ovale, ni point conjugué, ni nœud, ni pointe. La réunion de deux nappes forme une *nappe cruciforme*. La nappe est *anguinée*, lorsque ses deux branches convergent avec une seule et même asymptote qu'elle coupe, et elle est *conchoïdale*, lorsqu'elle ne coupe pas cette asymptote. Lorsque chacune des deux branches d'une nappe converge avec une asymptote différente, on la nomme *circonscrite*, si elle coupe chacune de ces deux asymptotes; *inscrite*, si elle n'en coupe aucune, et *ambigène*, si elle n'en coupe qu'une seule. Enfin nous nommerons *zone* l'espace compris entre deux tangentes-limites entre lesquelles la courbe est imaginaire.

## ÉNUMÉRATION DES ESPÈCES.

### PREMIÈRE CLASSE.

31. *Caractère géométrique :* Une seule direction asymptotique simple.

*Forme générale de l'équation :* $Bxy^2 + Dx^3 + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$.

*Conditions analytiques :* B et D différents de zéro et de même signe.

*Valeur générale d'une ordonnée :*

$$y = -\frac{H}{2Bx} \pm \frac{1}{2Bx}\sqrt{-4BD\left(x^4 + \frac{G}{D}x^3 + \frac{K}{D}x^2 + \frac{L}{D}x - \frac{H^2}{4BD}\right)}.$$

*Équation des tangentes-limites :*

$$x^4 + \frac{G}{D}x^3 + \frac{K}{D}x^2 + \frac{L}{D}x - \frac{H^2}{4BD} = o = (x + x')\,(x + x'')\,(x + x''')\,(x - x^{\text{IV}})\ (\text{K}),$$

indiquant par $-x'$, $-x''$, $-x'''$, $+x^{\text{IV}}$, les racines de cette équation, dont celles de même signe doivent être en nombre impair, à cause du signe invariable du dernier terme de l'équation (K). Il en résulte que l'on a

$$G = D\,(x' + x'' + x''' - x^{\text{IV}});\quad K = D\,[x'x'' + x'x''' + x''x''' - x^{\text{IV}}(x' + x'' + x''')];$$
$$L = D\,[x'x''x''' - x^{\text{IV}}(x'x'' + x'x''' + x''x''')];\quad H = \pm 2\sqrt{BD\,x'x''x'''x^{\text{IV}}}.$$

Nous supposerons en outre que $x' < x'' < x'''$, chaque fois qu'il n'existe pas d'égalité entre les racines.

32. Le polynôme sous-radical de la valeur de $y$ indique que la courbe doit être limitée dans les deux sens des abscisses, et l'équation des tangentes-limites fait voir que les deux limites extrêmes sont séparées par l'asym-

ptote, et qu'en tout cas, la courbe est réelle entre la tangente-limite située seule d'un côté de l'asymptote, et celle des trois autres tangentes-limites la plus rapprochée de l'asymptote. Les lignes de la 1[re] classe comprennent donc toutes une nappe hyperbolique qui est anguinée ou conchoïdale, selon que l'asymptote coupe ou ne coupe pas la courbe. Elles peuvent, en outre, comprendre une ovale conjuguée, qui doit se trouver en entier d'un même côté de l'asymptote; d'après les hypothèses précitées, elle doit se trouver du côté des abscisses négatives.

### PREMIER GENRE.

33. *Caractère géométrique :* La courbe coupe son asymptote en un point; la nappe est anguinée et hyperbolique du 2[me] ordre.

*Condition analytique :* H est différent de zéro.

G, K et L peuvent être positifs, nuls ou négatifs; mais en cas de réalité des quatre racines de l'équation (K), dès qu'un de ces coefficients est nul, ceux des termes suivants doivent être négatifs, et si, en cas de deux racines imaginaires, K peut toujours être quelconque, L doit être négatif, du moment que G est nul ou négatif.

H doit être différent de zéro, mais peut être à volonté positif ou négatif. Son signe, combiné avec celui des trois racines de même signe, indique les angles des coordonnées qui contiennent les deux nappes de l'hyperbole bissectrice des cordes de la direction asymptotique, et, par suite, ceux dans lesquels la courbe du 3[me] ordre converge avec son asymptote et dans lesquels elle a sa majeure partie.

Le signe de L désigne de quel côté de l'axe des ordonnées la courbe coupe cet axe; celui de K indique si l'ellipse sur laquelle se trouvent les points de contact des tangentes parallèles aux abscisses, ne rencontre pas, touche ou coupe l'asymptote, et celui de G indique de quel côté de cette droite se trouve le centre de ladite ellipse, qui est en même temps le centre des deux diamètres conjugués.

Il y a cinq hypothèses différentes possibles à l'égard des racines de l'équa-

tion (K); chacune d'elles donne naissance à une espèce différente; le premier genre comprend, par conséquent, cinq espèces.

34. Première espèce ($33^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe anguinée et d'une ovale conjuguée séparée.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (K) sont réelles et inégales : $x' < x'' < x'''$.

*Exemple :* $xy^2 + 3x^3 + 36x^2 + 24y + 99x + 6 = o$. (*Fig.* 1.)

35. Deuxième espèce ($36^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe anguinée et d'un point conjugué isolé.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (K) sont réelles, et, des trois de même signe, les deux dont la valeur numérique est la plus grande sont égales : $x'' = x''' > x'$.

*Exemple :* $2xy^2 + x^3 + 9x^2 + 22x + 16y = o$. (*Fig.* 2.)

36. Troisième espèce ($34^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une nappe anguinée, nouée.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (K) sont réelles, et, des trois racines de même signe, les deux dont la valeur numérique est la plus petite sont égales : $x' = x'' < x'''$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 15x^2 + 39x + 60y - 235 = o$. (*Fig.* 3.)

37. Quatrième espèce ($35^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une nappe anguinée, pointue.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (K) sont réelles et les trois racines de même signe sont égales : $x' = x'' = x'''$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 - 18x + 6y - 24 = o$. (*Fig.* 4.)

38. Dans la 1re et dans la 3me espèce, la courbe peut couper l'axe des abscisses en trois points. Si cela a lieu, deux des points d'intersection appartiennent à l'ovale, dont la majeure partie reste néanmoins dans l'angle des abscisses négatives et des ordonnées positives. Dans les deux autres espèces, la courbe ne peut couper l'axe des abscisses qu'en un seul point, qui appartient à la nappe, et le point conjugué doit se trouver dans l'angle des abscisses négatives et des ordonnées positives.

39. Cinquième espèce (37me et 38me espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une nappe anguinée, pure.

*Conditions analytiques :* L'équation (K) n'admet que deux racines réelles de signes contraires : $-x'$ et $+x^{\text{iv}}$; $x'' = \mp\alpha + \beta\sqrt{-1}$; $x''' = \mp\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Les lignes de cette espèce peuvent couper l'axe des abscisses en un seul point ou en trois points, ou bien le toucher et le couper, soit en deux points différents, soit en un seul et même point. Les trois premières circonstances ont lieu dans cette espèce, comme dans la 1re et la 3me, selon que $4(G^2 - 3KD)^3 \gtreqless (2G^3 - 9GKD + 27LD^2)^2$. Les lignes de la 5me espèce peuvent aussi être munies d'un centre de symétrie inverse; ce cas se présente lorsque la partie réelle des deux racines imaginaires est nulle, et que les deux racines réelles de signes contraires ont les mêmes valeurs numériques. Newton en a formé une espèce distincte, sa 38me.

*Exemples :* $2xy^2 + x^3 + 11x^2 + 19x + 36y - 6 = o$. (*Fig.* 5.)

$xy^2 + x^3 - 9x + 40y = o$.

### DEUXIÈME GENRE.

40. *Caractères géométriques :* La courbe ne rencontre pas son asymptote à distance finie. Elle est directement symétrique par rapport à une droite. La nappe est conchoïdale et hyperbolique du 3[me] ordre.

*Condition analytique :* H est nul.

Cette condition exige que l'une des racines de l'équation (K) soit nulle. Une seconde racine de cette équation ne peut cependant pas l'être; car, pour cela, il faudrait que L fût nul avec H. Or, dans ce cas, l'équation de la courbe serait divisible par $x$; elle deviendrait donc complexe. La nullité de l'une des racines de l'équation (K) produit la réunion de l'asymptote avec une des tangentes-limites, ou, pour mieux dire, elle donne à l'asymptote la qualité de tangente-limite. La courbe devient par là directement symétrique, par rapport à l'axe des abscisses.

L'une des racines de l'équation (K) étant nulle, les trois autres sont données par l'équation $Dx^3 + Gx^2 + Kx + L = o$ (K'), laquelle résulte aussi de la condition $y = o$. On a donc les mêmes conditions pour la détermination des espèces que pour celle des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, ce qui est une conséquence forcée de sa symétrie par rapport audit axe. Les conditions analytiques des espèces se trouvent donc dans l'expression $4(G^2-3KD)^3 \gtreqless (2G^3-9GKD+27LD^2)^2$.

L'équation (K') étant du 3[me] degré, sans détermination du signe du dernier terme, admet sept hypothèses différentes qui donnent naissance à sept espèces différentes, lesquelles composent le 2[me] genre et sont les 6[me] à 12[me] espèces de la 1[re] classe.

41. Par suite de la non-intersection de la nappe avec l'asymptote, sa convergence avec elle a lieu d'un seul côté de cette droite. Si, à cause de l'existence d'une direction asymptotique simple, la nappe reste hyperbolique, elle ne se comporte cependant plus comme les hyperboles du 2[me] ordre, qui convergent, dans les deux sens, de deux côtés différents de leurs asymptotes. Aussi la nature hyperbolique des branches des lignes du genre qui nous

occupe est-elle spéciale au troisième ordre. Son type, dont l'équation la plus simple est $Mxy^2 + N = o$, forme le 8^me genre de la 3^me classe.

42. Sixième espèce (39^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe conchoïdale, et d'une ovale conjuguée disjointe et située, avec la nappe, d'un même côté de l'asymptote.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (K′) sont réelles, de même signe et inégales : $x' < x'' < x'''$ ; $x^{\text{iv}} = o$, ou bien $4(G^2 - 3KD)^3 > (2G^3 - 9GKD + 27LD^2)^2$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 20x^2 + 124x + 240 = o.$ (*Fig.* 6.)

43. Septième espèce (43^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe conchoïdale, et d'un point conjugué isolé et situé du même côté de l'asymptote que la nappe.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (K′) sont réelles et de même signe, et les deux racines qui sont numériquement les plus grandes, sont égales : $x'' = x''' > x'$ ; $x^{\text{iv}} = o$, ou bien $-2\sqrt{(G^2 - 3KD)^3} = (2G^3 - 9GKD + 27LD^2)$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 32x^2 + 336x + 1152 = o.$ (*Fig.* 7.)

44. Huitième espèce (41^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une seule nappe conchoïdale, nouée.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (K′) sont réelles, de même signe, et les deux racines qui sont numériquement les plus petites, sont égales : $x' = x'' < x'''$ ; $x^{\text{iv}} = o$, ou bien $2\sqrt{(G^2 - 3KD)^3} = (2G^3 - 9GKD + 27LD^2)$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 15x^2 + 63x + 81 = o.$ (*Fig.* 8.)

45. NEUVIÈME ESPÈCE (42[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une seule nappe conchoïdale, pointue.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (K′) sont réelles et égales : $x' = x'' = x'''$; $x^{\text{IV}} = o$; $G^2 = 3KD$; $G^3 = 27LD^2$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = o.$ (*Fig.* 9.)

La courbe inventée par Dioclès, pour la résolution du problème de deux moyennes proportionnelles, et à laquelle ce géomètre a donné le nom de *cissoïde*, appartient à cette espèce.

46. Dans chacune des quatre espèces qui précèdent, G, K et L doivent être invariablement positifs; le centre général y est donc impossible : c'est la racine positive de l'équation (K) qui est devenue nulle, et, par suite, toute la courbe se trouve d'un seul et même côté de l'asymptote.

47. DIXIÈME ESPÈCE (40[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe conchoïdale, et d'une ovale conjuguée isolée et séparée de la nappe par l'asymptote.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (K′) sont réelles, de signes différents, et celles qui sont de même signe sont inégales : $x'' < x'''$; $x' = o$; $x^{\text{IV}}$ différent de zéro, ou bien $4(G^2 \mp 3KD)^3 > (\pm 2G^3 \mp 9GKD - 27LD^2)^2$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 9x^2 - 30x - 200 = o.$ (*Fig.* 10.)

48. ONZIÈME ESPÈCE (44[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe conchoïdale, et d'un point conjugué isolé, séparé de la nappe par l'asymptote.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (K') sont réelles; l'une est d'un signe différent de celui des deux autres, qui sont égales: $x''=x'''$; $x'=o$; $x^{\text{IV}}$ différent de zéro, ou bien $-2\sqrt{(G^2 \mp 3KD)^3} = (\pm 2G^3 \mp 9GKD - 27LD^2)$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 - 48x - 128 = o.$ (*Fig.* 11.)

49. Dans la 10ᵐᵉ espèce et dans la 11ᵐᵉ, G et K peuvent être positifs, nuls ou négatifs; ces espèces admettent donc un centre général. L doit y être invariablement négatif. C'est la plus petite des racines négatives qui est devenue nulle; l'asymptote est donc une tangente-limite moyenne, et, par suite, elle doit se trouver entre les deux parties de la courbe.

50. Douzième espèce (45ᵐᵉ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une seule nappe conchoïdale, pure.

*Conditions analytiques :* L'équation (K') n'admet qu'une seule racine réelle : $4(G^2 - 3KD)^3 < (2G^3 - 9GKD + 27LD^2)^2$.

*Exemple :* $xy^2 + x^3 + 7x^2 + 9x + 63 = o.$ (*Fig.* 12.)

G et K peuvent être quelconques; le centre général est donc possible. L peut être positif ou négatif, sans pouvoir être nul.

### DEUXIÈME CLASSE.

51. *Caractères géométriques :* Trois directions asymptotiques simples.

*Forme générale de l'équation :* $Bxy^2 - Dx^3 + Gx^2 + Kx + Hy + L = o$.

*Conditions analytiques :* Dans l'équation de la forme (H), B et D doivent être de signes contraires, sans être nuls.

*Valeur générale d'une ordonnée :*

$$y = -\frac{H}{2Bx} \pm \frac{1}{2Bx}\sqrt{4BD\left(x^4 - \frac{G}{D}x^3 - \frac{K}{D}x^2 - \frac{L}{D}x + \frac{H^2}{4BD}\right)}.$$

Une équation de la forme qui précède indique que l'asymptote de l'une des directions simples est prise pour axe des ordonnées. Il existe cependant trois pareilles asymptotes; on peut donc en prendre deux pour axes des coordonnées. Dans ce cas, l'équation a la forme $Bxy^2 + Cx^2y + Fxy + Hy + Kx + L = o$, (L). Cette forme, qui est symétrique, se prête plus facilement à la discussion : par ce motif, nous l'adopterons pour la détermination des espèces de la 2<sup>me</sup> classe.

52. Dans l'équation (L), le signe d'aucun des termes n'est déterminé; les coefficients B, C, H et K ne peuvent cependant pas devenir nuls, et l'on doit en conclure que la variation de signe de ces coefficients se rapporte à un ordre de faits autre que le changement d'espèce. On peut, en effet, obtenir toutes les combinaisons possibles de signes de ces quatre coefficients par le simple changement de signe des variables, et en remplaçant l'une des deux asymptotes prises pour axes des coordonnées, par celle qui, primitivement, n'avait pas servi d'axe. Quant à F et à L, le changement simultané de leurs signes peut être obtenu par le changement de signe des variables : il n'y a que la variation de signe de l'un de ces coefficients isolément qui soit de nature à exercer une influence sur les affections de la courbe. On verra plus loin quelles sont ces conséquences; nous nous bornerons, pour le moment, à dire que

tous les cas possibles sont donnés par les équations $Bxy^2 + Cx^2y + Fxy + Hy + Kx \pm L = o$ (L′) et $Bxy^2 + Cx^2y \pm Fxy + Hy + Kx + L = o$ (L″). La première appartient aux cas dans lesquels F est invariable de signe, et la seconde à ceux dans lesquels le signe de ce coefficient peut changer, sans qu'il en soit de même pour celui de L. Dans chacun de ces deux cas, le coefficient dont le signe est variable peut devenir nul.

53. Dans les classes qui ne possèdent qu'une seule direction asymptotique simple, il n'y a que l'asymptote de cette direction qui puisse être prise pour axe des coordonnées; il n'y a alors qu'une seule équation de la forme (H), et, par suite, qu'une seule équation des tangentes-limites; mais, dans la 2$^{me}$ classe, qui admet trois asymptotes différentes, il y a trois combinaisons différentes qui permettent de prendre deux de ces asymptotes pour axes des coordonnées; il en résulte trois équations différentes pour la courbe, toutes les trois de la forme (H) ou (L), et, par suite, trois équations différentes des tangentes-limites. Il se pourrait donc que certaines hypothèses faites à l'égard des racines de l'une de ces trois équations, donnassent, pour les deux autres équations ou pour l'une d'elles, une hypothèse différente. Dans ce cas, il est évident qu'en faisant cette dernière hypothèse sur la première équation, on aura pour les deux autres équations ou pour l'une d'elles, les cas de l'hypothèse faite primitivement sur la première. Ces deux hypothèses différentes, possibles à l'égard des racines de la même équation, conduiraient donc à des courbes identiques. Il faut, par conséquent, pour la détermination des espèces, connaître les effets que produiraient sur les racines de deux des équations précitées, toutes les hypothèses possibles à l'égard des racines de la troisième.

54. Si l'on résout l'équation (L) par rapport à $y$ et ensuite par rapport à $x$, on trouve que la bissectrice des cordes parallèles aux ordonnées a pour équation $2Bxy + Cx^2 + Fx + H = o$, hyperbole dont les asymptotes sont l'axe des ordonnées et la droite $2By + Cx + F = o$; en outre, l'équation de la bissectrice des cordes parallèles aux abscisses est $2Cxy + By^2 + Fy + K = o$, hyperbole dont les asymptotes sont l'axe des abscisses et la droite $2Cx + By + F = o$. Les cordes parallèles à la 3$^{me}$ asymptote ont pour bissectrice l'hyperbole $B^2y^2 - C^2x^2 + BFy - CFx + BK - CH = o$, équation qui

est la résultante de la combinaison des équations des deux autres bissectrices. Cette dernière hyperbole passe donc aussi par les points communs aux deux autres; ses asymptotes sont les droites $By+Cx+F=o$ et $By=Cx$; la première est la 3me asymptote de la courbe du 3me ordre, et la deuxième a pour équation la résultante de la combinaison des équations des asymptotes des deux premières hyperboles, autres que celles qui leur sont communes avec la courbe du 3me ordre. Ces trois asymptotes passent donc par le même point. Elles sont les médianes des trois côtés du triangle asymptotique, dont les côtés adjacents à l'origine sont $x=-\frac{F}{C}$ et $y=-\frac{F}{B}$. Ce triangle est dans l'angle des coordonnées négatives, si F est positif; dans le cas contraire, il est dans l'angle des coordonnées positives; et il se réduit à un point, si $F=o$.

55. Chaque hyperbole bissectrice coupe la courbe aux points de contact des tangentes parallèles à l'asymptote commune à la courbe et à cette hyperbole. On obtient donc les coordonnées des points de contact de toutes les tangentes-limites, ou bien ces tangentes elles-mêmes, en combinant l'équation de la courbe avec celles des trois bissectrices. Cette combinaison donne:

$$\text{I.}\left\{\begin{array}{l} 1.\ C^2x^4 + 2CFx^3 + (F^2 + 2CH - 4BK)\,x^2 + (2FH - 4BL)\,x + H^2 = o. \\ 2.\ B^2Hy^4 + 2B^2Ly^3 + B\,(FL - 2HK)\,y^2 - 2BKLy + L\,(CL - FK) + HK^2 = o. \end{array}\right.$$

$$\text{II.}\left\{\begin{array}{l} 1.\ B^2y^4 + 2BFy^3 + (F^2 + 2BK - 4CH)\,y^2 + (2FK - 4CL)\,y + K^2 = o. \\ 2.\ C^2Kx^4 + 2C^2Lx^3 + C\,(FL - 2HK)\,x^2 - 2CHLx + L\,(BL - FH) + H^2K = o. \end{array}\right.$$

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l} 1.\ C^2(BK - CH)\,x^4 + 2C^2(BL - FH)\,x^3 + [2CH\,(BK - CH) + CF\,(BL - FH)]\,x^2 + \\ \quad + 2CH\,(BL - FH)\,x + H^2(BK - CH) + BL\,(BL - FH) = o. \\ 2.\ B^2(BK - CH)y^4 - 2B^2(CL - FK)\,y^3 + [2BK\,(BK - CH) - CF\,(CL - FK)]\,y^2 - \\ \quad - 2\,BK\,(CL - FK)y - K^2(BK - CH) + CL\,(CL - FK) = o. \end{array}\right.$$

Si l'on désigne par $X'_1$, $X''_1$, $X'''_1$, $X^{iv}_1$, les abscisses des points de contact des tangentes parallèles aux ordonnées et par $Y'_1$, $Y''_1$, $Y'''_1$, $Y^{iv}_1$, les ordonnées des mêmes points, l'équation (I. 1) donnera les premières, et l'équation (I. 2) fournira les secondes. De même, les équations (II. 1) et (II. 2) fourniront les ordonnées et les abscisses des points de contact des tangentes parallèles aux abscisses que nous désignerons respectivement par $Y'_2$, $Y''_2$, $Y'''_2$, $Y^{iv}_2$ et $X'_2$, $X''_2$, $X'''_2$, $X^{iv}_2$. Enfin, les équations (III. 1) et (III. 2) donneront les abscisses et les ordonnées des points de contact des tangentes parallèles à la 3me asymptote : on les désignera par $X'_3$, $X''_3$, $X'''_3$, $X^{iv}_3$ et $Y'_3$, $Y''_3$, $Y'''_3$, $Y^{iv}_3$.

Les coefficients de ces six équations sont tous des fonctions des coefficients de l'équation (I. 1), et, comme les racines d'une équation sont des fonctions de ses coefficients et que, par contre, chaque coefficient peut être exprimé en fonction des racines, il est permis d'en conclure que les racines de cinq quelconques des six équations qui précèdent peuvent être exprimées en fonction des racines de la sixième.

**56.** Le dernier terme de l'équation (I. 1) étant positif, les racines réelles de même signe doivent être en nombre pair. Supposons-les toutes négatives et désignons-les par $-x'$, $-x''$, $-x'''$ et $-x^{\text{IV}}$; supposons, de plus, en cas d'inégalité des racines, $x' < x'' < x''' < x^{\text{IV}}$: on aura $\frac{2F}{C} = x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}}$, d'où $F = \frac{C}{2}(x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}})$; $F^2 + 2CH - 4BK = C^2[x'x'' + (x' + x'')(x''' + x^{\text{IV}}) + x'''x^{\text{IV}}]$; $2FH - 4BL = C^2[x'x''(x''' + x^{\text{IV}}) + x'''x^{\text{IV}}(x' + x'')]$ et $H = C\sqrt{x'x''x'''x^{\text{IV}}}$. Remplaçant F et H par leurs valeurs respectives, on aura :

$$K = \frac{C^2}{16B}[\sqrt{x'} + \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'} + \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'} - \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'} - \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}}].$$

$$L = \frac{C^3}{4B}[\sqrt{x'x''} - \sqrt{x'''x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'x'''} - \sqrt{x''x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'x^{\text{IV}}} - \sqrt{x''x'''}].$$

$$BK - CH = \frac{C^3}{16}[\sqrt{x'} + \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'} + \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'} - \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}}][\sqrt{x'} - \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}}].$$

K sera donc positif, nul ou négatif, selon que $\sqrt{x'} - \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}} \gtreqless o$. L sera positif, nul ou négatif, selon que $\sqrt{x'x^{\text{IV}}} - \sqrt{x''x'''} \gtreqless o$, et BK — CH sera positif, nul ou négatif, selon que $\sqrt{x'} + \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}} \gtreqless o$.

Portant les valeurs de F, K, L et H dans les six équations du § 55, chacune d'elles sera décomposable en quatre facteurs du premier degré en $x$ ou en $y$, dont chacun donnera une racine de l'équation dont il fait partie. On aura de cette manière : $X_1' = -x'$, $X_1'' = -x''$, $X_1''' = -x'''$, $X_1^{\text{IV}} = -x^{\text{IV}}$.

$$Y_1' = \frac{C}{4B}\left[x' - x'' - x''' - x^{\text{IV}} + 2\sqrt{\frac{x''x'''x^{\text{IV}}}{x'}}\right]; \quad Y_1'' = \frac{C}{4B}\left[x'' - x' - x''' - x^{\text{IV}} + 2\sqrt{\frac{x'x'''x^{\text{IV}}}{x''}}\right];$$

$$Y_1''' = \frac{C}{4B}\left[x''' - x' - x'' - x^{\text{IV}} + 2\sqrt{\frac{x'x''x^{\text{IV}}}{x'''}}\right]; \quad Y_1^{\text{IV}} = \frac{C}{4B}\left[x^{\text{IV}} - x' - x'' - x''' + 2\sqrt{\frac{x'x''x'''}{x^{\text{IV}}}}\right];$$

$$Y_2' = -\frac{C}{4B}\left[\sqrt{x'} - \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}}\right]^2; \quad Y_2'' = -\frac{C}{4B}\left[\sqrt{x'} - \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}}\right]^2;$$

$$Y_2''' = -\frac{C}{4B}\left[\sqrt{x'} + \sqrt{x''} - \sqrt{x'''} - \sqrt{x^{\text{IV}}}\right]^2; \quad Y_2^{\text{IV}} = -\frac{C}{4B}\left[\sqrt{x'} + \sqrt{x''} + \sqrt{x'''} + \sqrt{x^{\text{IV}}}\right]^2;$$

$$X_2' = \frac{\sqrt{x'x''}(\sqrt{x'''}-\sqrt{x^{\text{iv}}})-\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x'}-\sqrt{x'})}{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}-\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}}; \qquad X_2'' = \frac{\sqrt{x'x''}(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})+\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})}{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}-\sqrt{x^{\text{iv}}}};$$

$$X_2''' = \frac{\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})-\sqrt{x'x''}(\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}})}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}-\sqrt{x'''}-\sqrt{x^{\text{iv}}}}; \qquad X_2^{\text{iv}} = \frac{\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})+\sqrt{x'x''}(\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}})}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}};$$

$$X_3' = -\frac{\sqrt{x'x''}(\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}})-\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})}{\sqrt{x''}-\sqrt{x'}+\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}}; \qquad X_3'' = -\frac{\sqrt{x'x''}(\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}})+\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})}{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}};$$

$$X_3''' = -\frac{\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})-\sqrt{x'x''}(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}-\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}}; \qquad X_3^{\text{iv}} = -\frac{\sqrt{x'''x^{\text{iv}}}(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})+\sqrt{x'x''}(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}-\sqrt{x^{\text{iv}}}};$$

$$Y_3' = \frac{C}{4B}\left[\frac{(\sqrt{x^{\text{iv}}}+\sqrt{x'''})[(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})^2-(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})^2]+(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})[(\sqrt{x^{\text{iv}}}+\sqrt{x'''})^2-(\sqrt{x''}+\sqrt{x'})^2]}{\sqrt{x''}-\sqrt{x'}+\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}}\right];$$

$$Y_3'' = \frac{C}{4B}\left[\frac{(\sqrt{x^{\text{iv}}}+\sqrt{x'''})[(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})^2-(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})^2]+(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})[(\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}})^2-(\sqrt{x''}+\sqrt{x'})^2]}{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}}\right];$$

$$Y_3''' = \frac{C}{4B}\left[\frac{(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})[(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})^2-(\sqrt{x^{\text{iv}}}+\sqrt{x'''})^2]+(\sqrt{x'}+\sqrt{x''})[(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})^2-(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})^2]}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}-\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}}}\right];$$

$$Y_3^{\text{iv}} = \frac{C}{4B}\left[\frac{(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})[(\sqrt{x''}+\sqrt{x'})^2-(\sqrt{x^{\text{iv}}}+\sqrt{x'''})^2]+(\sqrt{x''}+\sqrt{x'})[(\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'''})^2-(\sqrt{x''}-\sqrt{x'})^2]}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}-\sqrt{x^{\text{iv}}}}\right].$$

Ces valeurs théoriques sont aptes à faire connaitre les conséquences de toutes les hypothèses possibles à l'égard des racines de l'équation (I. 1), en donnant à $x'$, $x''$, $x'''$, et $x^{\text{iv}}$ les valeurs appropriées à ces hypothèses; elles peuvent, par conséquent, servir à faire distinguer tous les cas réellement différents, et, par suite, toutes les espèces possibles dans la 2me classe.

57. Toutes les lignes de la 2me classe possèdent trois asymptotes rectilignes, avec chacune desquelles elles convergent dans les deux sens; elles doivent donc posséder six branches illimitées, et, par suite, trois nappes, dont une seulement peut être anguinée ou conchoïdale; car, pour converger avec une seule asymptote, il faut que la courbe s'étende tout le long de cette droite, qu'elle peut couper ou ne pas couper à distance finie, selon que la convergence a lieu des deux côtés ou d'un seul côté; mais, dans tous les cas, cette nappe doit couper chacune des deux autres asymptotes, attendu qu'elles sont elles-mêmes sécantes à l'asymptote de cette nappe. Les deux autres nappes ne peuvent donc plus couper ces asymptotes, ce qu'elles devraient faire cependant toutes les deux, ou au moins l'une d'elles, si elles pouvaient être anguinées ou conchoïdales. L'observation qui précède montre que l'existence d'une partie anguinée ou conchoïdale exige l'intersection de la courbe avec au moins deux de ses asymptotes. Il s'ensuit qu'une pareille nappe ne peut se rencontrer que dans les deux premiers genres. Lorsquelle existe, les deux

autres nappes doivent forcément être inscrites. Nous ajouterons qu'elle exclut toute ovale séparée ou réunie, fût-elle même réduite à un point; car, en tirant à cette ovale une sécante parallèle à une des asymptotes des nappes inscrites, cette sécante devrait aussi couper la nappe anguinée : elle rencontrerait ainsi la courbe en trois points, ce qui est impossible à toute droite d'une direction asymptotique. L'ovale, le point, le nœud ou la pointe ne peuvent donc exister qu'avec trois nappes qui ne sont ni anguinées ni conchoïdales. L'ovale et ses analogues doivent toujours être inscrites dans le triangle asymptotique; le nœud ou la pointe ne sont, par conséquent, possibles qu'en cas où une des nappes puisse pénétrer dans l'intérieur de ce triangle, c'est-à-dire couper deux asymptotes. L'ovale et toutes ses dérivées sont impossibles avec une nappe cruciforme, qui peut être considérée comme le résultat de la réunion d'une nappe anguinée ou conchoïdale avec une autre nappe. Dans le 1$^{er}$ genre, lorsqu'il n'y a pas de nappe anguinée, l'une des nappes doit être circonscrite, une autre ambigène, et la dernière inscrite; dans le 2$^{me}$ genre, lorsqu'il n'existe pas de nappe conchoïdale, il peut y avoir deux nappes ambigènes avec une nappe inscrite, ou bien deux nappes inscrites avec une nappe circonscrite; dans le 3$^{me}$ genre, les trois nappes sont toujours inscrites.

### PREMIER GENRE.

58. *Caractères géométriques :* La courbe coupe chacune de ses asymptotes rectilignes en un point; elle possède trois nappes hyperboliques du 2$^{me}$ ordre.

*Conditions analytiques :* H, K et (BK — CH) différents de zéro.

Ces conditions exigent qu'aucune des racines de l'équation (I. 1) ne soit nulle et que $(\sqrt{x'}+\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}-\sqrt{x^{\text{iv}}})$, ainsi que $(\sqrt{x'}-\sqrt{x''}-\sqrt{x'''}+\sqrt{x^{\text{iv}}})$, ne le soient pas non plus; et, comme nous avons supposé H et K positifs, on doit avoir $\sqrt{x^{\text{iv}}}+\sqrt{x'}>\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}$. Cette hypothèse est compatible avec chacune des hypothèses $\sqrt{x^{\text{iv}}}-\sqrt{x'}\gtrless\sqrt{x''}+\sqrt{x'''}$; (BK—CH) peut donc être positif ou négatif. La supposition de K et H positifs a pour conséquence que la nappe convergente avec les deux axes coordonnés doit être circonscrite, et si nous y ajoutons l'hypothèse $\text{BK}-\text{CH}<o$, nous disons

par là que la nappe convergente avec l'axe des abscisses et la 3<sup>me</sup> asymptote doit être ambigène, et, par suite, que celle qui converge avec la 3<sup>me</sup> asymptote et l'axe des ordonnées doit être inscrite. De cette manière, la position de chacune des trois nappes à l'égard de leurs asymptotes, se trouve fixée.

Lorsque l'équation de la courbe est de la forme (L), les trois asymptotes sont données par les équations $x=o$, $y=o$ et $By+Cx+F=o$. La courbe coupe donc les deux asymptotes prises pour axes aux points $y=-\frac{L}{H}$ et $x=-\frac{L}{K}$, et la droite qui passe par ces deux points a pour équation $Hy + Kx + L = o$. En combinant cette équation avec celle de la courbe, on a $Bxy^2 + Cx^2y + Fyx = xy\,(By + Cx + F) = o$, ce qui indique que la droite passant par les deux points d'intersection de la courbe avec les deux asymptotes prises pour axes, passe aussi par son point d'intersection avec la 3<sup>me</sup> asymptote. Les trois points d'intersection de la courbe avec ses asymptotes sont donc en ligne droite.

59. Les racines réelles de même signe de l'équation (I. 1) doivent être en nombre pair. Lorsqu'elles sont toutes réelles, elles peuvent être toutes de même signe; il se peut aussi que deux soient positives et les deux autres négatives. S'il n'y a que deux racines réelles, elles doivent être de même signe. Enfin les quatre racines peuvent être imaginaires. En cas de quatre racines réelles de même signe, elles peuvent offrir les combinaisons suivantes : les quatre racines sont inégales; deux d'entre elles sont égales, et l'égalité existe entre les deux racines moyennes ou entre les deux racines extrêmes; il y a deux couples de racines égales; trois des racines sont égales; enfin les quatre racines sont égales. Le cas de deux couples de racines réelles de signes différents permet l'inégalité des racines d'un même couple, l'égalité des racines d'un seul couple et celle des deux racines de chaque couple. Lorsqu'il n'y a que deux racines réelles, elles peuvent être inégales ou être égales; enfin l'hypothèse de quatre racines imaginaires n'admet qu'un seul cas.

60. Les hypothèses d'égalité de deux ou de trois racines dont la valeur numérique est la plus grande, sont incompatibles avec celles de H et K positifs; car en supposant $x^{\text{iv}}=x'''$, la relation de condition du signe de K se réduit à $\sqrt{x'} > \sqrt{x''}$, relation inexacte; il en est de même si l'on suppose $x^{\text{iv}}=x'''=x''$; tandis que les suppositions de $x'=x''$, ou de $x''=x'''$, ou

de $x' = x'' = x'''$ donnent $x^{\text{iv}} > x'''$, ou $\sqrt{x^{\text{iv}}} + \sqrt{x'} > 2\sqrt{x''}$, relations dont l'une est vraie et dont l'autre peut l'être : cela est d'ailleurs évident, car l'ovale étant inscrite dans le triangle asymptotique, la nappe à laquelle elle se réunit doit pénétrer dans ce triangle, ce qui n'est possible que pour la nappe circonscrite, qui, d'après nos hypothèses, est celle qui converge avec les deux axes.

61. L'hypothèse de deux couples de racines égales, n'importe qu'ils soient de même signe ou de signes contraires, ainsi que celle de quatre racines égales, rendent K et L nuls à la fois; elles font dégénérer l'équation (L) en une équation complexe, puisqu'elles la rendent divisible par $y$. Ces hypothèses doivent donc être écartées.

62. L'hypothèse de quatre racines réelles, deux à deux de signes contraires, exige le changement de signe de deux des racines de l'équation (I. 1). En introduisant cette modification dans les expressions théoriques du § 56, on trouve que toutes les racines des équations (II. 1. 2) et (III. 1. 2) deviennent imaginaires; on peut en conclure que l'hypothèse de quatre racines imaginaires, dans l'équation (I. 1), rend également imaginaires les quatre racines de l'une des équations (II. 1) ou (III. 1), et laisse celles de l'autre réelles, en plaçant un couple de tangentes-limites de chaque côté de leur asymptote : il suffit, pour s'en assurer, de faire $x' = \mp \alpha + \beta\sqrt{-1}$; $x'' = \mp \alpha - \beta\sqrt{-1}$; $x''' = \mp \gamma + \delta\sqrt{-1}$; $x^{\text{iv}} = \mp \gamma - \delta\sqrt{-1}$. On en conclut encore que la courbe doit exister sans discontinuité dans les deux sens de l'une de ses asymptotes; la nappe qui converge avec cette asymptote doit donc être anguinée. D'après ce qui précède, l'hypothèse de deux couples de racines réelles de signes contraires, et celle de quatre racines imaginaires ne fournissent qu'une seule et même espèce. Il en est de même pour l'hypothèse de deux couples de racines réelles de signes contraires, dont l'un est formé par deux racines égales, et pour celle de deux seules racines réelles égales. Chacune des hypothèses restantes du cas de quatre racines réelles et de celui de deux racines réelles fournit une espèce distincte; car, dans chacun, les tangentes de chacune des trois directions asymptotiques sont en même nombre, de même nature et placées de la même manière par rapport à leurs asymptotes respectives. Il en résulte que le 1er genre de la 2me classe contient sept espèces.

63. Chaque fois que les quatre racines sont réelles et de même signe, le signe de F ne peut changer, ainsi que sa valeur théorique le démontre. Il en est de même dans le cas de deux racines imaginaires, lorsque leur partie réelle est nulle, ou de même signe que les deux racines réelles; tandis que, dans le cas contraire, ainsi que dans celui de deux couples de racines réelles de signes différents, F peut rester positif ou devenir nul ou négatif. Dans le premier cas, le triangle asymptotique reste dans l'angle des coordonnées négatives, et toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de leur asymptote tourné vers l'intérieur de ce triangle. Dans le second cas, les trois asymptotes passent par un même point (l'origine). Dans le troisième enfin, le triangle asymptotique est transporté dans l'angle des coordonnées positives, et toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de leur asymptote tourné vers l'extérieur dudit triangle; mais ce changement de position est produit par la seule translation de la 3$^{me}$ asymptote parallèlement à elle-même, laquelle, dans sa marche, a entraîné les quatre tangentes de sa direction; le nombre des tangentes, leur nature et leur position par rapport à leur asymptote, restent donc toujours les mêmes. La variation du signe de F et l'annulation de ce coefficient ne constituent donc pas des espèces diverses : elles donnent seulement naissance à des sous-espèces de chacune des espèces dans lesquelles ces variations sont possibles. Néanmoins, comme, dans le cas de deux couples de racines réelles de signes contraires, la translation du triangle asymptotique s'opère par le mouvement de l'asymptote de la nappe anguinée, et comme, dans chacune des positions de cette asymptote, il y a toujours deux tangentes-limites du côté de cette droite tourné vers l'intérieur du triangle asymptotique, et deux autres du côté tourné vers l'extérieur dudit triangle, l'espèce répondant au cas n'admet que deux sous-espèces distinguées par les conditions de F différent de zéro et de F nul; tandis que chacune des autres espèces dans lesquelles F peut varier de signe, admet les trois sous-espèces résultant des hypothèses $F \gtreqless o$.

64. Première espèce (1$^{re}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes extrêmes, disjointes, et d'une ovale intermédiaire, séparée des nappes.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (I. 1) sont réelles, de même signe et inégales : $x' < x'' < x''' < x^{\text{iv}}$.

*Exemple :* $xy^2 + 4x^2y + 66xy + 160y + x - 240 = o$. (*Fig.* 13.)

65. Deuxième espèce (4$^{\text{me}}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes disjointes, et d'un point conjugué isolé.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (I. 1) sont réelles et de même signe, et les deux racines moyennes sont égales.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 8xy + 9y + x = o$. (*Fig.* 14.)

66. Troisième espèce (2$^{\text{me}}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes disjointes, dont celle qui est circonscrite, est nouée.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (I. 1) sont réelles et de même signe, et les deux racines extrêmes dont les valeurs numériques sont les plus petites, sont égales.

*Exemple :* $xy^2 + 4x^2y + 30xy + 24y + 57x + 20 = o$. (*Fig.* 15.)

67. Quatrième espèce (3$^{\text{me}}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes disjointes, dont celle qui est circonscrite, est pointue.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (I. 1) sont réelles et de même signe, et les trois racines dont les valeurs numériques sont les plus petites, sont égales.

*Exemple :* $xy^2 + 4x^2y + 42xy + 96y + 9x + 32 = o$. (*Fig.* 16.)

68. Cinquième espèce (5me, 6me et 24me espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes pures, disjointes.

*Conditions analytiques :* L'équation (I. 1) n'admet que deux racines réelles; elles sont de même signe et inégales.

*a.* Première sous-espèce (5me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de l'asymptote de leur direction tourné vers l'intérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) est de même signe que les racines réelles; $F > o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 10xy + 64y + 25x = o$. (*Fig.* 17.)

*b.* Deuxième sous-espèce (24me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes se coupent au même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) est nulle; $F = o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 120y + 49x - 360 = o$. (*Fig.* 18.)

*c.* Troisième sous-espèce (6me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de l'asymptote de leur direction tourné vers l'extérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) d'un signe différent de celui des racines réelles; $F < o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y - 4xy + 288y + 213x - 888 = o$. (*Fig.* 19.)

69. Sixième espèce (7^me, 8^me et 25^me espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe cruciforme, et d'une nappe ordinaire, inscrite.

*Conditions analytiques :* Les deux seules racines de l'équation (I. 1) sont égales.

*a.* Première sous-espèce (7^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Le point de croisement se trouve au-dessus d'un côté du triangle asymptotique, dans un de ses angles intérieurs, et la nappe inscrite tombe entre les côtés de l'angle extérieur, opposé au sommet à l'angle intérieur précité.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) est de même signe que les deux racines réelles; $F > o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 2xy + 25y + 16x = o$. (*Fig.* 20.)

*b.* Deuxième sous-espèce (25^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes se coupent en un même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) est nulle; $F = o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 15y + 8x - 24 = o$. (*Fig.* 21.)

*c.* Troisième sous-espèce (8^me espèce de Newton.)

*Caractères géométriques :* Le point de croisement se trouve dans un des angles extérieurs du triangle asymptotique, et la nappe inscrite tombe entre les prolongements des côtés de l'angle intérieur opposé au sommet à l'angle extérieur précité.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I.1) est d'un signe différent de celui des racines réelles; $F < o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y - xy + 10y + 4x - 24 = o$. (*Fig.* 22.)

70. Septième espèce (9^me^, 26^me^ et 27^me^ espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes extrêmes pures, et d'une nappe anguinée intermédiaire.

*Conditions analytiques :* Les quatre racines de l'équation (I. 1) sont réelles, deux à deux de signes contraires, et celles qui sont de mêmes signes, sont inégales.

*a*. Première sous-espèce (9^me^ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes ne passent pas par un même point.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) n'est pas nulle; $F \gtrless o$.

*Exemple :* $16xy^2 + 16x^2y + 104xy + 192y + 617x + 448 = o$. (*Fig.* 23.)

*b*. Deuxième sous-espèce (26^me^ et 27^me^ espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes passent par un même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I. 1) est nulle; $F = o$.

Les lignes de cette sous-espèce sont susceptibles de posséder un centre de symétrie inverse, ce qui a lieu si chacune des deux racines d'un signe est

isolément égale à une des racines de l'autre signe; c'est la variété dont Newton a formé sa 27^me^ espèce.

*Exemples :* $4xy^2 + 4x^2y + 48y + 79x + 90 = o.$
$4xy^2 + 4x^2y + 8y + 9x = o.$ (*Fig.* 24)

DEUXIÈME GENRE.

**71**. *Caractères géométriques :* Deux asymptotes dont chacune coupe la courbe en un point, et une troisième asymptote qui ne la rencontre pas à distance finie. La courbe est directement symétrique par rapport à une droite; elle possède six branches illimitées, dont quatre sont de nature hyperbolique du 2^me^ ordre, et les deux autres sont de nature hyperbolique, spéciale au 3^me^ ordre.

*Conditions analytiques :* L'une des quantités H, ou K, ou BK — CH) est nulle; les deux autres sont différentes de zéro.

Quelle que soit l'asymptote non sécante, elle pourra toujours être prise pour axe des ordonnées; la condition analytique du 2^me^ genre sera alors $H = o$, avec K différent de zéro. Dans ce cas, les deux branches illimitées de la direction de l'axe des ordonnées convergent avec cet axe d'un seul côté : ce sont donc elles qui ont la nature hyperbolique du 3^me^ ordre, dont la courbe $Mxy^2 + N = o$ est le type. L'axe de symétrie est la médiane du côté formé, dans le triangle asymptotique, par l'asymptote non sécante, et passe par le sommet formé par les deux asymptotes sécantes.

72. La condition $H = o$ réduit l'équation (I. 1) à $C^2x^4 + 2FCx^3 + (F^2 - 4BK)x^2 - 4BLx = o = x[(C^2x^3 + 2FCx^2) + (F^2 - 4BK)x - 4BL]$; l'une des racines de cette équation doit donc être nulle, et les trois autres sont données par l'équation $C^2x^3 + 2FCx^2 + (F^2 - 4BK)x - 4BL = o$ (I'); et comme, d'après nos hypothèses, la racine de l'équation (I. 1) dont la valeur numérique est la moindre, a été désignée par $-x'$, on doit avoir $x' = o$. Portant cette valeur dans les expressions du § 56, on obtient les valeurs théoriques appropriées au 2^me^ genre.

Par suite de $H = o$, l'hyperbole bissectrice des cordes de la direction de l'axe des ordonnées dégénère en une droite $2By + Cx + F = o$, qui est l'axe de symétrie. Les deux autres hyperboles continuent à subsister; la combinaison de leurs équations donne $Cx\,[2By + Cx + F] = o$, ce qui indique qu'elles se coupent sur l'axe des ordonnées et sur l'axe de symétrie. Ces points d'intersection sont donnés par $y = -\frac{F}{2B} \pm \frac{1}{2B}\sqrt{F^2 - 4BK}$ et $y = -\frac{F}{6B} \pm \frac{1}{6B}\sqrt{F^2 + 12BK}$. Les deux hyperboles bissectrices se rencontrent donc toujours au moins en deux points situés sur l'axe de symétrie, si K est positif, et sur l'axe des ordonnées, si K est négatif. En outre, dans le 1[er] cas, ces deux bissectrices se coupent sur l'axe des ordonnées, s'y touchent, ou ne s'y rencontrent pas, selon que $F^2 - 4BK \gtreqless o$, et, dans le second cas, elles se coupent sur l'axe de symétrie, s'y touchent, ou ne s'y rencontrent pas, selon que $F^2 \gtreqless 12KB$.

73. Dans le 1[er] genre, les nappes sécantes ont été déterminées par l'ensemble des conditions de H et K positifs, et de $(BK - CH)$ négatif. Lorsque H est nul, l'ensemble de ces conditions devient impossible; car elles se réduisent alors à $K > o$ et $K < o$, relations qui ne peuvent exister en même temps. Il en résulte que, si K est positif, les deux nappes qui convergent avec l'axe des ordonnées coupent chacune sa deuxième asymptote, et que, si K est négatif, c'est la nappe qui converge avec l'axe des abscisses et avec la 3[me] asymptote qui coupe chacune de ces droites. Mais le signe de K n'exerce aucune influence ni sur le nombre des tangentes-limites, ni sur leurs positions relatives; la variation de ce signe ne constitue donc pas des espèces différentes; néanmoins on doit en tenir compte, en partageant en deux sous-divisions chacune des espèces dans lesquelles cette variation est possible. Le signe de K dépend de celui de $(\sqrt{x^{\text{v}}} - \sqrt{x''} - \sqrt{x'''})$; il s'ensuit que K ne peut varier de signe que si les trois racines sont de même signe et inégales, ou si $x'' = x'''$, ou bien encore s'il n'existe qu'une seule racine réelle; dans tous les autres cas, K est invariable de signe et négatif. Les hypothèses différentes possibles à l'égard des racines de l'équation (I. 1) sont au nombre de sept, dont chacune fournit un cas différent et, par suite, elles donnent naissance à sept espèces, qui sont les 8[me] à 14[me] de la 2[me] classe.

74. Tous les cas du 1[er] genre dans lesquels F est invariable de signe,

ainsi que ceux dans lesquels F peut changer de signe, ont leurs analogues dans le 2me genre, et dans tous les cas où le signe de F peut varier, chacune des trois hypothèses $F \gtreqless o$ constitue une sous-espèce, même dans celui de trois racines réelles de signes différents; car, si, dans le cas analogue du 1er genre, les deux hypothèses $F \gtrless o$ ne forment qu'une seule sous-espèce, c'est que la nappe étant anguinée, possède une tangente-limite de chaque côté de son asymptote; tandis que, dans le 2me genre, cette nappe étant conchoïdale, doit rester en entier, soit d'un côté, soit de l'autre de l'asymptote, selon que F est positif ou négatif.

75. Huitième espèce (10me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe possède trois nappes disjointes, et une ovale conjuguée.

*Conditions analytiques* : Les trois racines de l'équation (I') sont réelles, de même signe et inégales.

$\alpha$. Première sous-division.

*Caractères géométriques :* Chacune des deux nappes convergentes avec l'asymptote non sécante coupe une des deux autres asymptotes, ou bien la courbe est formée de deux nappes ambigènes, d'une nappe inscrite et d'une ovale. (Ce cas a été omis par Newton; il a été donné par Cramer.)

*Conditions analytiques :* K positif.

*Exemple :* $xy^2 + 4x^2y + 26xy + 13x - 108 = o$. (*Fig.* 25.)

$\beta$. Deuxième sous-division (10me espèce de Newton.)

*Caractères géométriques :* La nappe qui converge avec les deux asymptotes sécantes coupe chacune d'elles, ou bien la courbe possède une nappe circonscrite, deux nappes inscrites et une ovale.

*Conditions analytiques :* K négatif.

*Exemple :* $xy^2 + 2x^2y + 16xy - 5x - 54 = o.$ (*Fig.* 26.)

76. Neuvième espèce (13^me^ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes disjointes, et d'un point conjugué isolé.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I′) sont réelles et de même signe, et les deux racines qui ont les moindres valeurs numériques, sont égales.

$\alpha$. Première sous-division.

*Caractères géométriques :* L'une des nappes est inscrite et les deux autres sont ambigènes. (Ce cas a été omis par Newton; il a été donné par Cramer.)

*Conditions analytiques :* K positif.

*Exemple :* $16xy^2 + 16x^2y + 104xy + 9x - 144 = o.$ (*Fig.* 27.)

$\beta$. Deuxième sous-division (13^me^ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* L'une des nappes est circonscrite et les deux autres sont inscrites.

*Conditions analytiques :* K négatif.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 8xy - x - 2 = o.$ (*Fig.* 28.)

77. Dixième espèce (11^me^ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes inscrites, et d'une nappe circonscrite, nouée.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I′) sont réelles

et de même signe, et les deux racines dont la valeur numérique est la plus grande, sont égales.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 24xy - 9x - 50 = o.$ (*Fig.* 29.)

78. Onzième espèce (12[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes inscrites, et d'une nappe circonscrite, pointue.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I′) sont réelles, de même signe et égales.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 18xy - 27x - 108 = o.$ (*Fig.* 30.)

79. Douzième espèce (14[me], 15[me], 16[me], 17[me], 28[me] et 29[me] espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de trois nappes pures.

*Conditions analytiques :* L'équation (I′) n'admet qu'une seule racine réelle.

$\alpha$. Première sous-division (15[me], 17[me] et 29[me] espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* L'une des nappes est inscrite et les deux autres sont ambigènes.

*Conditions analytiques :* K positif.

*a*. Première sous-espèce (15[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de l'asymptote de leur direction tourné vers l'intérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I′) est de même signe que la racine réelle; $F > o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 25xy + 104x - 225 = o$. (*Fig.* 31.)

*b.* DEUXIÈME SOUS-ESPÈCE (29[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes se coupent au même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I′) est nulle; $F = o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 11x - 150 = o$. (*Fig.* 32.)

*c.* TROISIÈME SOUS-ESPÈCE (17[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Toutes les tangentes-limites sont situées du côté de l'asymptote de leur direction tourné vers l'extérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I′) est d'un signe différent de celui de la racine réelle; $F < o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y - 8xy + 11x - 100 = o$. (*Fig.* 33.)

*β.* DEUXIÈME SOUS-DIVISION (14[me], 16[me] et 28[me] espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* L'une des nappes est circonscrite et les deux autres sont inscrites.

*Conditions analytiques :* K négatif.

*a.* PREMIÈRE SOUS-ESPÈCE (16[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de l'asymptote de leur direction tourné vers l'intérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est de même signe que la racine réelle ; $F > o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 5xy - 6x - 25 = o$. (*Fig.* 34.)

*b.* DEUXIÈME SOUS-ESPÈCE (28[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes se coupent au même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est nulle ; $F = o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y - 5x - 18 = o$. (*Fig.* 35.)

*c.* TROISIÈME SOUS-ESPÈCE (14[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Toutes les tangentes-limites se trouvent du côté de l'asymptote de leur direction tourné vers l'extérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est d'un signe différent de celui de la racine réelle ; $F < o$.

*Exemple :* $16xy^2 + 16x^2y - 8xy - 27x - 36 = o$. (*Fig.* 36.)

80. TREIZIÈME ESPÈCE (20[me], 21[me] et 31[me] espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes extrêmes inscrites, et d'une nappe intermédiaire conchoïdale.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I') sont réelles, et l'une est d'un signe différent de celui des deux autres, qui sont inégales.

*a.* PREMIÈRE SOUS-ESPÈCE (20[me] espèce de Newton.)

*Caractères géométriques :* La partie conchoïdale se trouve du côté de son asymptote tourné vers l'intérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est de même signe que les deux racines de même signe; $F > o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 16xy + 15x + 42 = o$. (*Fig.* 37.)

*b.* Deuxième sous-espèce (31^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes passent par un même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est nulle; $F = o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 7x + 6 = o$. (*Fig.* 38.)

*c.* Troisième sous-espèce (21^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La partie conchoïdale se trouve du côté de son asymptote tourné vers l'extérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est d'un signe différent de celui des deux racines de même signe; $F < o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y - xy + 13x + 27 = o$. (*Fig.* 39.)

81. Quatorzième espèce (18^me, 19^me et 30^me espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe inscrite et de deux nappes ambigènes, dont la réunion forme une nappe cruciforme.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I') sont réelles; l'une d'elles est d'un signe différent de celui des deux autres, qui sont égales.

*a.* Première sous-espèce (19^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Le point de croisement est situé du côté de

l'asymptote non sécante tourné vers l'extérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est de même signe que la racine double; $F > o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + xy + 2x - 1 = o.$ (*Fig.* 40.)

*b.* DEUXIÈME SOUS-ESPÈCE ($30^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes se coupent au même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est nulle; $F = o$.

*Exemple :* $4xy^2 + 4x^2y + 3x - 2 = o.$ (*Fig.* 41.)

*c.* TROISIÈME SOUS-ESPÈCE ($18^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Le point de croisement se trouve du côté de l'asymptote non sécante tourné vers l'intérieur du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I') est d'un signe différent de celui des deux racines égales; $F < o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y - xy + 4x - 9 = o.$ (*Fig.* 42.)

### TROISIÈME GENRE.

82. *Caractères géométriques :* La courbe ne rencontre aucune de ses asymptotes à distance finie. Elle possède trois axes de symétrie directe, qui se coupent en un même point. Ses six branches illimitées sont hyperboliques du $3^{me}$ ordre.

*Conditions analytiques :* H et K nuls.

Ces conditions ramènent l'équation (L) à la forme $Bxy^2 + Cx^2y + Fxy + L = o$. Cette forme indique que si L est nul, la courbe se réduit à ses trois asymptotes.

Puisque H et K sont nuls, on doit avoir $x' = o$ et $\sqrt{x^{iv}} = \sqrt{x''} + \sqrt{x'''}$. En introduisant ces conditions dans les expressions du § 56, on aura les valeurs théoriques propres au $3^{me}$ genre.

83. La condition de H et K nuls réduit les équations (I.1.2.), (II.1.2.) et (III.1.2.) comme suit :

$$\text{I}'' \begin{cases} 1.\ x\,[\,C^2x^3 + 2CFx^2 + F^2x \quad -4BL\,] = o \\ 2.\ [\,y \pm \tfrac{1}{o}\,]\,[\,4B^2y^3 + 2BFy^2 \ + 2CL\,] = o. \end{cases}$$

$$\text{II}'' \begin{cases} 1.\ y\,[\,B^2y^3 + 2BFy^2 + F^2y^2 \quad -4CL\,] = o \\ 2.\ [\,x \pm \tfrac{1}{o}\,]\,[\,4C^2x^3 + 2CFx^2 \ + 2BL\,] = o. \end{cases}$$

$$\text{III}'' \begin{cases} 1.\ [\,x \pm \tfrac{1}{o}\,]\,[\,4C^2x^3 + 2CFx^2 \ + 2BL\,] = o \\ 2.\ [\,y \pm \tfrac{1}{o}\,]\,[\,4B^2y^3 + 2BFy^2 \ + 2CL\,] = o. \end{cases}$$

Ces équations indiquent que chaque asymptote ne peut rencontrer la courbe qu'à l'infini. Il en résulte aussi que les racines des équations (III''. 1.2) sont respectivement les mêmes que celles des équations (II''. 2) et (I''. 2.) dont les racines sont dans le rapport de $\frac{x}{y} = \frac{B}{C}$, rapport qui existe également entre les racines des équations (I''. 1) et (II''. 1). Ces relations entre les racines des six équations qui précèdent démontrent que toutes les hypothèses possibles à l'égard de l'une d'elles doivent exister à l'égard des racines de chacune des autres. On peut en conclure que, dans le $3^{me}$ genre, le nombre des racines réelles, leur nature et leur signe doivent être les mêmes dans chacune des six équations; d'où il résulte que les racines réelles de l'équation (I''. 1) ne peuvent être de signes différents. Il n'y a donc que les hypothèses des trois racines réelles de même signe, et d'une racine réelle qui soient permises. En supposant ces racines négatives, le dernier terme de l'équation (I''. 1) doit être positif, et, par suite, L doit être négatif dans l'équation de la courbe, qui sera donc $Bxy^2 + Cx^2y + Fxy - L = o$, et l'équation des tangentes-limites sera $C^2x^3 + 2FCx^2 + F^2x + 4BL = o$.

84. En cas de réalité des trois racines, la condition $K = o$ donne $\sqrt{x^{iv}} =$

$\sqrt{x''} + \sqrt{x'''}$, relation qui exclut l'hypothèse d'égalité, soit entre $x^{iv}$ et $x''$, soit entre $x^{v}$ et $x'''$ : elle ne permet que celle de l'égalité entre $x''$ et $x'''$. La réalité des trois racines ne donne donc lieu qu'à deux cas distincts qui constituent deux espèces, les 15$^{me}$ et 16$^{me}$ de la 2$^{me}$ classe.

85. La supposition d'une seule racine réelle ne peut donner naissance qu'à un seul cas, qui forme la 17$^{me}$ et dernière espèce de la 2$^{me}$ classe; mais comme, dans ce cas, F peut être positif, nul ou négatif, cette dernière espèce admet les trois sous-espèces distinguées par les conditions $F \gtreqless o$.

86. Quinzième espèce (omise par Newton).

*Caractères géométriques :* Trois nappes inscrites entre les côtés des angles extérieurs du triangle asymptotique, et une ovale conjuguée, inscrite dans l'intérieur de ce triangle. (Cette espèce a été décrite par Cramer).

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I''. 1) sont réelles, de même signe et inégales; $27BCL - F^3 < o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 7xy - 9 = o.$ (*Fig.* 43.)

87. Seizième espèce (omise par Newton).

*Caractères géométriques :* Trois nappes pareilles à celles de l'espèce précédente, et un point conjugué, situé dans l'intérieur du triangle asymptotique. (Cette espèce a été décrite par Cramer.)

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (I''. 1) sont réelles et de même signe, et celles qui ont les moindres valeurs numériques, sont égales; $27BCL - F^3 = o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 3xy - 1 = o.$ (*Fig.* 44.)

88. Dix-septième espèce (22$^{me}$, 23$^{me}$ et 32$^{me}$ espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en trois nappes pures, inscrites.

*Conditions analytiques :* L'équation (I″. 1) n'admet qu'une seule racine réelle; $27BCL - F^3 > o$.

*a.* PREMIÈRE SOUS-ESPÈCE (22^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois nappes sont inscrites entre les côtés des angles extérieurs du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I″.1) est de même signe que la racine réelle; $F > o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y + 2xy - 4 = o.$ (*Fig.* 45.)

*b.* DEUXIÈME SOUS-ESPÈCE (32^me de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois asymptotes se coupent au même point (l'origine).

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I″. 2) est nulle; $F = o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y - 2 = o.$ (*Fig.* 46.)

*c.* TROISIÈME SOUS-ESPÈCE (23^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* Les trois nappes sont inscrites entre les prolongements des côtés des angles intérieurs du triangle asymptotique.

*Conditions analytiques :* La somme algébrique des racines de l'équation (I″. 1) est d'un signe différent de celui de la racine réelle; $F < o$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2y - xy - 25 = o.$ (*Fig.* 47.)

89. Dans la 2^me classe, les espèces où F peut varier de signe sont les seules qui admettent un centre général des diamètres, et dans ces espèces, ce ne sont que les sous-espèces données par la condition $F = o$ qui possèdent un pareil centre, lequel est la conséquence de l'intersection des trois asymptotes en un même point.

## TROISIÈME CLASSE.

**90.** *Caractères géométriques :* Deux directions asymptotiques, dont l'une est simple et l'autre double.

*Forme générale de l'équation :* $Bxy^2 + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$ (M).

*Conditions analytiques :* D nul, et B différent de zéro.

La forme (M) indique que chacun des deux axes possède une direction asymptotique; que la direction simple a été attribuée à l'axe des ordonnées, qui est en même temps l'asymptote de cette direction, et que l'axe des abscisses possède la direction double. Cet axe ne peut cependant être l'asymptote de cette direction qu'en cas de G et de K nuls, et alors il en est l'unique asymptote.

**91.** En résolvant l'équation (M) par rapport à $y$, on trouve que l'équation des tangentes-limites de la direction simple est

$$x^3 + \frac{K}{G}x^2 + \frac{L}{G}x + \frac{H^2}{4BG} = o \text{ (N)}.$$

Il n'y a donc que trois tangentes-limites à distance finie; la 4^me^ est rejetée à l'infini. La courbe est, par conséquent, illimitée, d'un côté, dans le sens des abscisses, et elle est limitée de l'autre côté. Le signe de G indique de quel côté elle est limitée. La résolution de la même équation (M) par rapport à $x$ donne pour équation des tangentes-limites de la direction double :

$$y^4 + \frac{2K}{B}y^2 - \frac{4GH}{B^2}y + \frac{K-4GL}{B^2} = o \text{ (P)}.$$

Il peut donc y avoir quatre tangentes-limites, ou deux, ou aucune; mais, en tout cas, la courbe doit s'étendre à l'infini dans les deux sens des ordonnées, attendu que dans la partie sous-radicale de la valeur de $x$, le terme en $y^4$ est essentiellement positif.

On voit aussi par cette valeur de $x$ que les cordes de la direction asymptotique double ont pour bissectrice une parabole dont l'équation est $By^2 + 2Gx + K = o$. Elle coupe l'axe des abscisses au point $x = -\frac{K}{2G}$, qui est son sommet, et elle dirige ses branches dans le sens des abscisses de signe contraire à celui de G. Lorsque $G = o$, cette parabole dégénère en deux droites parallèles, $By^2 + K = o$, qui sont imaginaires, ou réelles et différentes, ou réelles et coïncidentes, selon que $K \gtreqless o$. Dans le premier cas, les branches paraboliques de la courbe du 3^me^ ordre sont imaginaires; dans le second cas, elles existent au nombre de quatre, dont deux sont dirigées dans le sens des $x$ positifs, et les deux autres dans celui des $x$ négatifs; dans le 3^me^ cas, il n'y a que deux branches paraboliques, dirigées dans un même sens des abscisses, indiqué par le signe contraire à celui de L.

### PREMIER GENRE.

92. *Caractères géométriques :* La courbe coupe l'asymptote de la direction simple; elle ne possède pas, à distance finie, des asymptotes rectilignes dans la direction double, mais elle y possède deux branches paraboliques du 2^me^ ordre.

*Conditions analytiques :* G et H différents de zéro.

Si nous désignons les racines de l'équation (N) par $-x'$, $-x''$, $-x'''$, tous les termes de cette équation doivent être positifs; par suite, G, K et L doivent être négatifs dans l'équation (M), et, à cause de G négatif, la courbe sera illimitée dans le sens des $x$ positifs; mais la désignation qui précède présuppose l'existence de trois racines réelles de même signe. Il est cependant toujours permis de supposer que les racines négatives sont en nombre impair, alors G sera négatif dans l'équation (M), et les deux autres coefficients pourront aussi y être négatifs. On pourra donc donner à l'équation du 1^er^ genre la forme $Bxy^2 - Gx^2 + Hy - Kx - L = o$ (M'), et alors les équations (N) et (P) seront :

$$x^3 + \frac{K}{G}x^2 + \frac{L}{G}x + \frac{H^2}{4BG} = o, \quad \text{et} \quad y^4 - \frac{2K}{B}y^2 + \frac{4GL}{B^2}y + \frac{K^2 - 4GL}{B^2} = o.$$

93. Sept hypothèses sont possibles à l'égard des racines de l'équation (N), et toutes fournissent des cas différents. Il y a donc sept espèces dans le 1[er] genre. Dans les cinq premières, l'équation (P) admet au moins deux racines réelles et différentes. Il existe donc, dans chacune de ces cinq espèces, au moins une zone dans la direction double, et, par suite, les deux branches hyperboliques ne peuvent appartenir à une même nappe. Dans la 6[me] espèce, les quatre racines de l'équation (P) sont imaginaires; la courbe existe donc sans discontinuité dans les deux sens des ordonnées; et les deux branches hyperboliques appartiennent à une même nappe qui, par conséquent, doit être anguinée. Dans la 7[me] espèce, l'équation (P) admet deux racines réelles qui sont égales, et les deux autres sont imaginaires; la courbe existe donc aussi sans discontinuité dans les deux sens des ordonnées, mais elle possède un point de croisement, résultant de la réunion des deux nappes.

La résolution de l'équation (N) par la méthode de Cardan fait connaître que la nature de ses racines dépend du signe et de la valeur du polynôme $(8BK^3 - 36BGKL + 27G^2H^2)^2 - 64B^2(K^2 - 3GL)^3$, ou bien $H^2 - \frac{4B}{27G^2}[K(9GL - 2K^2) \pm 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$; ce polynôme fournit donc aussi les conditions analytiques des espèces.

94. **Première espèce** (46[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe possède deux nappes hyperbolo-paraboliques, dont l'une est ambigène et l'autre inscrite, et une ovale conjuguée.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (N) sont réelles, de même signe et inégales; $H^2 < \frac{4B}{27G^2}[K(9GL - 2K^2) + 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 11x + 8y - 26 = o.$ (*Fig.* 48.)

95. **Deuxième espèce** (49[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes pareilles à celles de l'espèce précédente, et d'un point conjugué isolé.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (N) sont réelles et de même signe, et les deux racines dont les valeurs numériques sont les plus fortes, sont égales; $H^2 = \frac{4B}{27G^2}[K(9GL - 2K^2) - 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 9x + 8y - 24 = o.$ (*Fig.* 49.)

96. Troisième espèce (47^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes hyperbolo-paraboliques, dont l'une est ambigène et nouée, et l'autre inscrite.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (N) sont réelles, de même signe, et les deux racines dont les valeurs numériques sont les plus faibles, sont égales; $H^2 = \frac{4B}{27G^2}[K(9GL - 2K^2) + 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 13x + 12y - 40 = o.$ (*Fig.* 50.)

97. Quatrième espèce (48^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes hyperbolo-paraboliques, dont l'une est ambigène et pointue, et l'autre inscrite.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (N) sont réelles et égales; $K^2 = 3GL$ et $27G^2H^2 = 4BK^3$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 12x + 16y - 48 = o.$ (*Fig.* 51.)

98. Cinquième espèce (50^me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes hyperbolo-paraboliques pures, dont l'une est ambigène et l'autre inscrite.

*Conditions analytiques :* L'équation (N) n'admet qu'une seule racine réelle; $H^2 > \frac{4B}{27G^2}[K(9GL - 2K^2) + 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 17x + 26y - 65 = o.$ (*Fig.* 52.)

99. Sixième espèce ($52^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe hyperbolique anguinée, et d'une nappe parabolique.

*Conditions analytiques :* L'une des trois racines de l'équation (N) est d'un signe différent de celui des deux autres, qui sont inégales; $H^2 < \frac{4B}{27G^2} [K(2K^2 - 9GL) + 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2 + 7x + 12y = o.$ (*Fig.* 53.)

100. Septième espèce ($51^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une nappe cruciforme, *dont* deux branches sont hyperboliques et les deux autres paraboliques.

*Conditions analytiques :* Les trois racines de l'équation (N) sont réelles, et l'une d'elles est d'un signe différent de celui des deux autres, qui sont égales; $H^2 = \frac{4B}{27G^2} [K(2K^2 - 9GL) + 2\sqrt{(K^2 - 3GL)^3}]$.

*Exemple :* $xy^2 + x^2 + 20x + 48y + 48 = o.$ (*Fig.* 54.)

DEUXIÈME GENRE.

101. *Caractères géométriques :* La courbe ne rencontre pas, à distance finie, l'asymptote de la direction simple. Elle possède un axe de symétrie directe. La direction double est dépourvue d'asymptotes rectilignes; mais il y existe deux branches paraboliques du $2^{me}$ ordre. Les deux branches de la direction simple sont hyperboliques du $3^{me}$ ordre.

*Conditions analytiques :* G différent de zéro, et H nul.

La condition $H = o$ réduit l'équation (N) à $x^3 + \frac{K}{G}x^2 + \frac{L}{G}x = x\left(x^2 + \frac{K}{G}x + \frac{L}{G}\right) = o$; d'où $x = o$ et $x^2 + \frac{K}{G}x + \frac{L}{G} = o$ (N'). Elle réduit l'équation (P) à $y^4 - \frac{2K}{B}y^2 + \frac{K^2 - 4GL}{B^2} = \left(y^2 - \frac{K}{B}\right)^2 - \frac{4GL}{B^2} = o$; d'où $y = \pm\sqrt{\frac{K}{B} \pm \frac{1}{B}\sqrt{4GL}}$ (P').

Les deux racines de l'équation (N′) sont réelles, de même signe, et inégales, ou égales, ou imaginaires, selon que $K^2 - 4GL \gtreqless o$. Si G et L sont de signes différents, ces racines sont réelles et de signes contraires. L'équation (N′) n'admet donc que quatre hypothèses; mais, comme elle est indépendante de B, les hypothèses de G et L de même signe, avec $K^2 - 4GL \geqq o$, ne déterminent pas complétement la nature des racines de l'équation (P′); il faut encore savoir si B et K sont de même signe, ou s'ils sont de signes contraires. Chacun des cas de $K^2 - 4GL \geqq o$ produit donc deux espèces différentes; par suite, le 2me genre contient six espèces, qui sont les 8me à 13me de la 3me classe.

102. Huitième espèce (omise par Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes hyperbolo-paraboliques inscrites, et d'une ovale conjuguée, séparée des deux nappes par l'asymptote de la direction simple. (Cette espèce est décrite par Cramer.)

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (N′) sont réelles, de même signe, inégales et négatives. Les quatre racines de l'équation (P′) sont réelles et inégales; G, K et L sont de même signe et négatifs dans l'équation (M′), et $K^2 - 4GL > o$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 10x - 16 = o.$ (*Fig.* 55.)

103. Neuvième espèce (omise par Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes pareilles à celles de l'espèce précédente, et d'un point conjugué, isolé, séparé des deux nappes par l'asymptote de la direction simple. (Cette espèce a été décrite par Cramer.)

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (N′) sont réelles, égales et négatives, et l'équation (P′) admet quatre racines réelles dont deux sont égales; G, K et L sont négatifs dans l'équation (M′), et $K^2 - 4GL = o$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 - 8x - 16 = o.$ (*Fig.* 56.)

104. Dixième espèce (53[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes hyperbolo-paraboliques pures, inscrites.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (N′) sont imaginaires, et il en est de même de deux des racines de l'équation (P′), dont les deux autres racines sont réelles et inégales; G et L sont négatifs, et K peut être positif, négatif ou nul; $K^2 - 4GL < o$.

*Exemple :* $4xy^2 - 4x^2 - 16x - 25 = o.$ (*Fig.* 57.)

105. Onzième espèce (55[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe hyperbolique conchoïdale, et d'une nappe parabolique. Ces deux nappes sont disjointes, et sont situées d'un même côté de l'asymptote de la direction simple.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (N′) sont réelles, de même signe, inégales et positives. Les quatre racines de l'équation (P′) sont imaginaires; G et L sont négatifs dans l'équation (M′), et K y est positif; $K^2 - 4GL > o$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 + 25x - 144 = o.$ (*Fig.* 58.)

106. Douzième espèce (54[me] espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une nappe cruciforme, dont deux branches sont hyperboliques et les deux autres paraboliques.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (N′) sont réelles, positives et égales. L'équation (P′) admet deux racines réelles et égales, et deux racines imaginaires; G et L sont négatifs dans l'équation (M′), et K y est positif; $K^2 - 4GL = o$.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 + 4x - 4 = o.$ (*Fig.* 59.)

107. TREIZIÈME ESPÈCE (56me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe conchoïdale, et d'une nappe parabolique, séparée de la première par l'asymptote de la direction simple.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (N′) sont réelles et de signes contraires, et les quatre racines de l'équation (P′) sont imaginaires; G est négatif dans l'équation (M′), L y est positif et K peut être quelconque.

*Exemple :* $xy^2 - x^2 + 3x + 4 = o.$ (*Fig.* 60.)

TROISIÈME GENRE.

108. *Caractères géométriques :* La courbe coupe l'asymptote de la direction simple. La direction double est dépourvue d'asymptotes et de branches illimitées.

*Conditions analytiques :* G est nul, H est différent de zéro, et K est de même signe que B.

Ces conditions donnent à l'équation de la courbe la forme $Bxy^2 + Kx + Hy \pm L = o$ (M″). En résolvant cette équation par rapport à $y$ et par rapport à $x$, on trouve, pour la détermination des tangentes-limites de la direction simple, $x^2 \pm \frac{L}{K}x - \frac{H^2}{4BK} = o$ (N″), et pour celles de la direction double $(By^2 + K)^2 = o$ (P″). Mais l'équation (M″) donne $x = -\frac{Hy \pm L}{By^2 + K}$. Or, si $By^2 + K = o$, la valeur de $x$ devient infinie. Les tangentes-limites de la direction double, lorsqu'elles existent, sont, par conséquent, des asymptotes, ce qui a lieu pour tous les genres dans lesquels G est nul. Lorsque K est positif, la direction double est dépourvue de tangentes-limites et d'asym-

ptotes; la courbe doit donc exister sans discontinuité dans les deux sens des ordonnées, et comme elle ne possède des branches illimitées que dans cette direction, elle se réduit à une seule nappe hyperbolique anguinée, qui ne peut être coupée qu'en un seul point pour toute droite de la direction asymptotique double. L'équation (N″) n'admet qu'une seule hypothèse, celle de deux racines réelles de signes contraires. Il n'y a donc dans le 3me genre qu'une seule espèce, qui est la 14me de la 3me classe (61me et 62me espèces de Newton). Les courbes de cette espèce peuvent être munies d'un centre de symétrie inverse, ce qui a lieu si les deux racines de l'équation (N″) ont les mêmes valeurs numériques. C'est de cette spécialité que Newton a formé sa 62me espèce.

*Exemples :* $xy^2 + 2x + 8y + 4 = o.$

$xy^2 + x + 4y = o.$ (*Fig.* 61.)

QUATRIÈME GENRE.

109. *Caractères géométriques :* La courbe ne rencontre pas, à distance finie, l'asymptote de la direction simple; ses deux branches sont hyperboliques du 3me ordre; elle possède un axe de symétrie directe, et elle est dépourvue de branches paraboliques.

*Conditions analytiques :* G et H sont nuls, et K est positif, c'est-à-dire de même signe que B.

Ces conditions réduisent l'équation (N″) à $x \pm \frac{L}{K} = o$, mais elles ne modifient pas l'équation (P″); il n'y a donc qu'un seul cas possible et, par suite, qu'une seule espèce, qui est la 15me de la 3me classe (63me espèce de Newton). Dans cette espèce, la courbe consiste en une seule nappe conchoïdale, que toute droite de la direction asymptotique double doit couper en un point, et ne peut couper qu'en un seul point.

*Exemple :* $xy^2 + x - 4 = o.$ (*Fig.* 62.)

### CINQUIÈME GENRE.

110. *Caractères géométriques :* La courbe coupe l'asymptote de la direction simple, et elle possède dans cette direction deux branches illimitées qui sont de nature hyperbolique du $2^{me}$ ordre. Elle possède, dans la direction double, deux asymptotes parallèles avec chacune desquelles elle converge dans les deux sens. Les quatre branches illimitées qui sont dans la direction double sont d'une nature parabolique particulière au $3^{me}$ ordre.

*Conditions analytiques :* G est nul, H est différent de zéro, ainsi que K, dont le signe diffère de celui de B.

Ces conditions donnent à l'équation (N″) la forme $x^2 \pm \frac{L}{K} x + \frac{H^2}{4BK} = o$ (N‴), et elles réduisent l'équation (P″) à $(y^2 - \frac{K}{B})^2 = o$ (P‴). Cette dernière équation indique qu'il y a dans la direction double deux tangentes-limites distinctes, équidistantes de l'axe des abscisses. Ces tangentes, qui sont des asymptotes, partagent la courbe en trois parties séparées. L'équation (N‴) doit avoir ses racines de même signe; elles peuvent être réelles et inégales, ou réelles et égales, ou imaginaires, selon que $BL^2 - KH^2 \gtreqless o$. Mais si $BL^2 - KH^2 = o$, l'équation de la courbe devient $Byx^2 - Kx \mp L \pm Ly\sqrt{\frac{B}{K}} = o = (y - \sqrt{\frac{K}{B}})$ $(Bxy + x\sqrt{BK} \mp L\sqrt{\frac{B}{K}})$; elle devient donc complexe; l'hypothèse de deux racines égales doit, par conséquent, être écartée. Celles de deux racines réelles inégales et de deux racines imaginaires donnent seules des lignes réelles du $3^{me}$ ordre. Elles produisent deux espèces, qui sont les $16^{me}$ et $17^{me}$ de la $3^{me}$ classe. Dans le premier cas, la courbe est interrompue, dans le sens des abscisses, par le zone comprise entre les deux tangentes-limites de la direction simple, et elle coupe l'asymptote de cette direction au delà de l'une des deux asymptotes de la direction double. Dans le second cas, elle s'étend sans discontinuité dans les deux sens de l'axe des abscisses, qu'elle coupe au point $x = \pm \frac{L}{K}$, et elle coupe l'asymptote de la direction simple entre les deux asymptotes de la direction double.

111. Seizième espèce ($57^{me}$ espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes extrêmes, hyperbolo-paraboliques, l'une ambigène et l'autre inscrite, et d'une nappe intermédiaire parabolique.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation $(N''')$ sont réelles et inégales ; $BL^2 - KH^2 > o$.

*Exemple :* $xy^2 - 4x + 8y - 20 = o.$ (*Fig.* 63.)

112. Dix-septième espèce ($58^{me}$ et $59^{me}$ espèces de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose de deux nappes extrêmes, hyperbolo-paraboliques inscrites, et d'une nappe intermédiaire, parabolique anguinée.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation $(N''')$ sont imaginaires ; $BL^2 - KH^2 < o$.

Les lignes de cette espèce peuvent être pourvues d'un centre de symétrie inverse, ce qui a lieu lorsque les racines imaginaires sont dépourvues de parties réelles ; $L = o$. C'est de cette spécialité que Newton a formé sa $59^{me}$ espèce.

*Exemples :* $xy^2 - x + 2y - 1 = o.$ (*Fig.* 64.)

$xy^2 - x + 4y = o.$ (*Fig.* 65.)

## SIXIÈME GENRE.

113. *Caractères géométriques :* La courbe ne coupe pas l'asymptote de la direction simple ; les deux branches illimitées qu'elle possède dans cette direction sont de nature hyperbolique du $3^{me}$ ordre ; elle est pourvue d'un axe de symétrie directe et elle possède, dans la direction double, quatre branches de nature parabolique du $3^{me}$ ordre.

*Conditions analytiques :* G et H sont nuls, et K est d'un signe différent de celui de B.

La condition $H = o$ réduit l'équation $(N''')$ à $x \pm \frac{L}{K} = o$, et laisse subsister l'équation $(P''')$; il ne peut donc exister qu'un seul cas et, par suite, qu'une seule espèce, qui est la 18^me^ de la 3^me^ classe (60^me^ espèce de Newton). Elle comprend les courbes qui se composent de deux nappes extrêmes, hyperbolo-paraboliques inscrites, et d'une nappe intermédiaire parabolique.

*Exemple :* $$xy^2 - 4x - 12 = o.$$ (*Fig.* 66.)

SEPTIÈME GENRE.

114. *Caractères géométriques :* La courbe coupe l'asymptote de la direction simple. Elle possède, dans la direction double, une asymptote qui coïncide avec l'axe des abscisses vers lequel elle converge des deux côtés, dans un même sens.

*Conditions analytiques :* G et K nuls, H différent de zéro.

Les conditions qui précèdent réduisent l'équation $(N''')$ à $x \mp \frac{H^2}{4BL} = o$, et l'équation $(P''')$ à $y^2 = o$. Il ne peut donc exister qu'un seul cas : il donne naissance à la 19^me^ espèce de la 3^me^ classe (64^me^ espèce de Newton). Les courbes de cette espèce se composent de deux nappes hyperbolo-paraboliques, dont l'une est ambigène et l'autre inscrite. Deux branches sont de nature hyperbolique du 2^me^ ordre, et les deux autres sont de nature parabolique du 3^me^ ordre.

*Exemple :* $$xy^2 + 2y - 1 = o.$$ (*Fig.* 67.)

HUITIÈME GENRE.

115. *Caractères géométriques :* La courbe ne coupe pas l'asymptote de la direction simple; elle est pourvue d'un axe de symétrie directe, qui est la seule asymptote de la direction double avec laquelle elle converge des deux côtés, dans un seul et même sens. Deux de ses branches sont de nature hyperbolique du 3^me^ ordre, et les deux autres sont de nature parabolique du même ordre.

*Conditions analytiques :* G, H et K nuls.

L'équation (N''') se réduit à $x = o$, et l'équation (P''') à $y^2 = o$; il n'existe donc qu'un seul cas qui forme la vingtième et dernière espèce de la 3^me classe (65^me espèce de Newton).

Les lignes de cette espèce sont les types de la nature hyperbolique du 3^me ordre; elles sont en même temps le type d'une des natures paraboliques particulières à cet ordre, à cause de leur convergence avec une droite double, des deux côtés de cette droite et dans un seul de ses deux sens.

*Exemple :* $xy^2 - 4 = o.$ (*Fig.* 68.)

---

### QUATRIÈME CLASSE.

116. *Caractères géométriques :* Une seule direction asymptotique, triple.

*Forme générale* de l'équation :

$$Dx^3 + Ey^2 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = o \text{ (G)}.$$

*Conditions analytiques :* A, B et C nuls; D différent de zéro.

La forme (G) a été obtenue par la seule détermination de la direction de l'axe des ordonnées; la position de cet axe, ainsi que la direction et la position de l'axe des abscisses restent indéterminées et peuvent servir à l'évanouissement de trois termes de l'équation (G), laquelle peut, par ce moyen, être réduite à ne contenir que tout au plus quatre termes. On ne peut cependant, dans chacun des trois genres, faire évanouir les trois mêmes termes.

#### PREMIER GENRE.

117. *Caractères géométriques :* La courbe ne possède aucune asym-

ptote rectiligne à distance finie; elle est pourvue d'un axe de symétrie directe, et elle possède deux branches illimitées d'une nature spéciale.

*Conditions analytiques :* E doit être différent de zéro.

En résolvant l'équation (G) par rapport à $y$, on trouve que la droite $2Ey + Fx + H = o$ est un axe de symétrie directe de la courbe. Cette droite coïncide avec l'axe des abscisses, si F et H sont nuls. Dans ce cas, l'équation (G) est réduite à $Dx^3 + Ey^2 + Gx^2 + Fx + L = o$, et elle peut encore être privée d'un terme par la détermination de la position de l'axe des ordonnées. En remplaçant $x$ par $(x' + a)$, on trouve que l'évanouissement du terme en $x$ n'est pas toujours possible, mais que celui du terme en $x^2$, ou celui du dernier terme, est toujours praticable, en prenant pour l'évanouissement du terme en $x^2$, $a = -\frac{G}{3D}$, et pour celui du dernier terme $a^3 + \frac{G}{D}a^2 + \frac{K}{D}a + \frac{L}{D} = o$. Or, $x = -\frac{G}{3D}$ est le diamètre de la direction de l'axe des abscisses. Pour faire évanouir le terme en $x^2$, il faut donc transporter l'axe des ordonnées au centre de la moyenne distance des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, et pour faire évanouir le dernier terme, il faut transporter cet axe à l'un desdits points d'intersection, qui, par suite de la symétrie directe par rapport à l'axe des abscisses, sont en même temps les points de contact des tangentes-limites de la direction de l'axe des ordonnées. Il faut donc prendre l'une de ces tangentes-limites pour axe. L'équation de la courbe aura alors la forme : $Dx^3 + Ey^2 + Gx^2 + Kx = o$, et, par suite, toute la courbe se trouvera du côté des $x$ négatifs. Avec cette forme, c'est une des tangentes-limites extrêmes qui a été prise pour axe des ordonnées, laquelle peut, en certains cas spéciaux, appartenir à la partie illimitée de la courbe, mais qui, en général, ne lui appartient pas. Si l'on veut que ce soit toujours la tangente-limite de cette partie qui serve d'axe des ordonnées, il faut changer le signe de E; l'équation de la courbe sera alors $Dx^3 - Ey^2 + Gx^2 + Kx = o$ (Q), et la recherche des espèces dépendra de la discussion de l'équation $x(Dx^2 + Gx + K) = o$, ou simplement $x^2 + \frac{G}{D}x + \frac{K}{D} = o$ (R). Dans cette équation, l'une des racines peut être nulle, et elles peuvent l'être toutes les deux; ces racines ne peuvent toutefois être réelles

et de signes contraires. Il y a donc cinq hypothèses possibles à l'égard des racines de l'équation (R). Chacune de ces hypothèses donne naissance à une espèce distincte ; par suite, le 1er genre comprend cinq espèces, dans chacune desquelles la courbe possède deux branches illimitées, dont l'une et l'autre sont dirigées dans le sens des $x$ positifs et en même temps dans un des deux sens de l'axe des ordonnées.

118. Première espèce (67me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe parabolique en forme de cloche, et d'une ovale conjuguée.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (R) sont réelles et inégales ; $G^2 - 4KD > o$, et K différent de zéro.

*Exemple :* $x^3 - y^2 + 13x^2 + 36x = o.$ (*Fig.* 69.)

119. Deuxième espèce (69me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe se compose d'une nappe parabolique en forme de cloche, et d'un point conjugué isolé.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (R) sont égales ; $G^2 - 4KD = o$ ; G et K différents de zéro.

*Exemple :* $x^3 - y^2 + 18x^2 + 81x = o.$ (*Fig.* 70.)

120. Troisième espèce (68me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une seule nappe parabolique nouée.

*Conditions analytiques :* L'une des racines de l'équation (R) est nulle ; $K = o$ ; G différent de zéro.

*Exemple :* $x^3 - y^2 + 4x^2 = o.$ (*Fig.* 71.)

121. Quatrième espèce (70me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une seule nappe parabolique pointue.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (R) sont nulles; G et K nuls.

*Exemple :* $x^3 - y^2 = o.$ (*Fig.* 72.)

122. Cinquième espèce (71me espèce de Newton).

*Caractères géométriques :* La courbe consiste en une seule nappe parabolique pure.

*Conditions analytiques :* Les deux racines de l'équation (R) sont imaginaires; $G^2 - 4KD < o$; G peut être quelconque, K doit être différent de zéro.

*Exemple :* $x^3 - y^2 - 6x^2 + 25x = o.$ (*Fig.* 73.)

123. Les lignes du 1er genre de la 4me classe ont une grande analogie de forme avec les lignes du 2me genre de la 1re classe; mais ces dernières convergent vers une asymptote rectiligne à distance finie, et sont limitées dans les deux sens de l'axe de symétrie; tandis que les premières sont illimitées dans un des sens de cet axe, et elles ne possèdent aucune asymptote rectiligne à distance finie avec laquelle elles convergent. C'est pour ce motif que Newton leur a donné le nom de *paraboles divergentes*. L'analogie de forme que nous venons de mentionner pourrait faire croire que les branches illimitées de ces cinq espèces participent en quelque sorte de la nature hyperbolique du 3me ordre. Ce serait une erreur : elles possèdent une nature toute spéciale qui ne se rencontre dans aucune ligne d'un ordre inférieur au 3me et qui, même dans cet ordre, n'appartient qu'à elles. Les lignes de la 4me

espèce peuvent être considérées comme les types de cette nature. S'il nous était permis de nous exprimer ainsi, nous dirions que, dans le 1^er^ genre, il y a trois asymptotes rectilignes, dont deux sont imaginaires et la 3^me^ est située à distance infinie.

### DEUXIÈME GENRE.

**124.** *Caractères géométriques :* La direction asymptotique contient une asymptote à distance finie qui ne coupe pas la courbe, tandis que toute autre droite de cette direction peut et doit la couper en un point. La courbe possède quatre branches illimitées, dont deux convergent avec l'asymptote rectiligne de chaque côté, dans des sens opposés. Les deux autres branches convergent avec une parabole du 2^me^ degré.

*Conditions analytiques :* L'équation de la courbe est privée du terme en $y^2$ ($E = o$); et elle doit contenir celui en $xy$ (F différent de zéro).

Les conditions précitées donnent à l'équation de la courbe la forme : $Dx^3 + Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = o$, d'où $y = -\frac{Dx^3+Gx^2+Kx+L}{Fx+H}$. Cette valeur indique que la droite $Fx + H = o$ est l'asymptote qui, par conséquent, est prise pour axe des ordonnées, lorsque $H = o$. Dans ce cas, l'équation doit forcément contenir le dernier terme, sans quoi elle serait divisible par $x$. Les deux termes $Hy$ et L ne peuvent donc pas disparaître ensemble, et l'évanouissement de trois termes de l'équation ci-dessus ne peut produire que les deux formes : $Dx^3 + Fxy + L = o$ (S) et $Dx^3 + Fxy + Hy = o$ (S'). La première indique que l'asymptote de la direction triple est prise pour axe des ordonnées, et que l'axe des abscisses est une droite tangente à la parabole $3Dx^2 + Fy = o$, au point de son intersection avec l'axe des ordonnées. C'est cette parabole qui converge avec les deux branches paraboliques et qui dirige ses branches dans le sens des ordonnées, de signe contraire à celui de F. La forme (S') indique que l'axe des abscisses est une tangente à la courbe, menée par son unique point d'inflexion, et que l'axe des ordonnées est une parallèle à l'asymptote menée par ledit point d'inflexion. Deux branches de la courbe convergent avec cette asymptote des deux côtés, dans des sens opposés. Comme elle ne coupe pas la courbe, ces branches doivent

appartenir à des nappes différentes. Il en est de même des deux branches qui convergent avec la parabole $3Dx^2 + Fy = o$. Il y a donc dans le sens de l'axe des ordonnées dans lequel la convergence avec cette parabole a lieu, trois branches de la courbe du 3me ordre, et il n'y en a qu'une seule dans le sens opposé. C'est à cause de cette forme de la courbe que Newton lui a donné le nom de *trident*. Elle se compose d'une nappe anguinée et d'une nappe ordinaire. En cas d'une équation de la forme (S), cette dernière nappe est limitée par l'unique tangente de la direction de l'axe des abscisses dont le point de contact se trouve au point d'intersection de la courbe et de la parabole $3Dx^2 + Fy = o$. Le genre qui nous occupe ne forme qu'une seule espèce, qui est la sixième de la 4me classe (66me espèce de Newton).

*Exemple :* $x^3 - 2xy + 8 = o.$ (*Fig.* 74.)

Si l'on veut admettre que toute parabole du 2me ordre converge avec deux asymptotes rectilignes parallèles, situées à distance infinie (ce qui est vrai), on peut dire aussi que dans le 2me genre de la 4me classe, la direction triple contient trois asymptotes dont deux sont situées à l'infini.

TROISIÈME GENRE.

125. *Caractères géométriques :* La direction asymptotique ne contient aucune asymptote à distance finie, et toute droite de cette direction doit couper la courbe en un point et ne peut la couper qu'en un seul point. La courbe possède deux branches illimitées d'une nature parabolique toute spéciale dont elle est elle-même le type.

*Conditions analytiques :* L'équation de la courbe ramenée à la forme (G) est dépourvue des termes en $y^2$ et en $xy$ (G et F nuls), et elle doit contenir le terme en $y$ (H différent de zéro).

Il résulte de ces conditions que la détermination de la position de l'axe des ordonnées et celle de la direction et de la position de celui des abscisses, ne peuvent faire évanouir que les termes $Gx^2$, $Kx$ et L; l'équation se réduira alors à $Dx^3 + Hy = o$ (T). Cette forme indique que l'axe des abscisses est une

tangente menée par l'unique point d'inflexion de la courbe, et que celui des ordonnées passe par le même point. Elle indique aussi que l'origine est un centre de symétrie inverse. Ce genre ne forme qu'une seule espèce, qui est la 7me et dernière de la 4me classe (72me et dernière espèce de Newton). Les lignes de cette espèce consistent en une seule nappe anguinée, étendant chacune de ses branches illimitées dans un des sens des ordonnées, et aussi dans un des sens des abscisses. Comme suite à ce qui a été dit des asymptotes des deux premiers genres, nous dirons que, dans le 3me genre, la direction triple contient trois asymptotes situées à distance infinie. C'est à cause de l'absence complète d'asymptotes rectilignes à distance finie que, par analogie avec ce qui se passe dans les paraboles du 2me ordre, Newton a donné aux courbes du 3me genre le nom de *parabole cubique*.

*Exemple :* $x^3 - 8y = o.$ (*Fig.* 75.)

---

## RÉSUMÉ.

**126.** Les conditions analytiques de la division des lignes du 3me ordre en classes, genres et espèces ont été tirées de l'équation (B), résultant de la combinaison de l'équation générale d'une droite et de l'équation générale d'une ligne du 3me ordre. Les conditions d'annulation du coefficient du terme en $x^3$ de l'équation (B) fournissent les classes, et celles d'annulation successive des coefficients des termes en $x^2$ et en $x$ (celui en $x^3$ étant nul) produisent les genres. Du moment que le coefficient de la plus haute puissance de $x$ qui subsiste dans l'équation n'est pas nul, la discussion ultérieure de cette équation fournit les espèces. Il en résulte que les caractères géométriques distinctifs des classes et des genres doivent concerner les affections des parties illimitées de la courbe, et que ceux des espèces doivent se rapporter aux affections de la courbe dans l'espace limité. Nous avons en effet trouvé que les considérations du nombre et de la nature des directions asymptotiques sont les caractères géométriques des classes; que celles du

nombre et de la nature des asymptotes rectilignes et du nombre de leurs points communs avec la courbe à distance infinie, sont les caractères distinctifs des genres, et enfin que le nombre, la nature et la position relative des tangentes-limites, ou bien, ce qui revient au même, que le nombre et la position relative des parties distinctes dont la courbe se compose, forment les caractères géométriques distinctifs des espèces. Cette méthode de division fournit, pour le 3$^{me}$ ordre, quatre classes, qui contiennent ensemble cinquante-six espèces, réparties en seize genres, comme il suit :

| Classe | Genres | Total |
|---|---|---|
| 1$^{re}$ CLASSE : 2 *genres* . . . . . . . . | 1$^{er}$ genre ; 5 espèces. | 12 espèces. |
| | 2$^{me}$ genre ; 7 espèces. | |
| 2$^{me}$ CLASSE : 3 *genres* . . . . . . . . | 1$^{er}$ genre ; 7 espèces. | 17 espèces. |
| | 2$^{me}$ genre ; 7 espèces. | |
| | 3$^{me}$ genre ; 3 espèces. | |
| 3$^{me}$ CLASSE : 8 *genres* . . . . . . . . | 1$^{er}$ genre ; 7 espèces. | 20 espèces. |
| | 2$^{me}$ genre ; 6 espèces. | |
| | 3$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |
| | 4$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |
| | 5$^{me}$ genre ; 2 espèces. | |
| | 6$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |
| | 7$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |
| | 8$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |
| 4$^{me}$ CLASSE : 3 *genres* . . . . . . . . | 1$^{er}$ genre ; 5 espèces. | 7 espèces. |
| | 2$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |
| | 3$^{me}$ genre ; 1 espèce. | |

Ce nombre des espèces est de beaucoup inférieur à celui qui a été trouvé ou présumé par les divers auteurs qui se sont occupés de la même question ; cette différence provient principalement de ce qu'ils ont employé des méthodes de division autres que celles dont nous avons fait usage.

### EXAMEN SUCCINCT DES MÉTHODES D'EULER ET DE NEWTON.

**127.** Les principaux auteurs qui ont traité des lignes du 3$^{me}$ ordre sont Euler et Newton. Le premier a partagé ces lignes en seize familles qu'il nomme espèces et qui correspondent à nos genres. Le second les a divisées en espèces,

en ayant égard à leur conformation dans l'espace limité, et il en a trouvé soixante-douze, nombre qui a été porté à soixante-dix-huit par Stirling et par Cramer, ses continuateurs. Chacun de ces auteurs commence par distinguer quatre cas dans l'équation générale des lignes du 3$^{me}$ ordre.

### MÉTHODE D'EULER.

128. Chacun des quatre cas d'Euler répond à une de nos classes, c'est-à-dire à une des hypothèses possibles à l'égard des racines de l'équation (C). Sous ce rapport, notre méthode concorde avec celle de cet auteur; mais elle en diffère, en ce qu'il n'a pas, comme nous, admis ces quatre cas comme formant le 1$^{er}$ degré de division : ils produisent cependant quatre grandes familles de courbes bien distinctes. Elle en diffère encore, en ce qu'Euler n'a considéré la distinction de ces cas que comme des conditions analytiques, sans y attacher de signification géométrique; tandis que nous leur avons attribué le caractère géométrique qui leur est propre. Toute expression analytique a une signification géométrique : il est parfois assez difficile de la déterminer; elle n'en existe pas moins : le tout est de la trouver.

129. Le nombre des espèces d'Euler est le même que celui de nos genres. Euler attache aux conditions analytiques de ses espèces une signification géométrique; mais elle n'est pas la même que celle que nous attribuons aux conditions analytiques de nos genres. Euler distingue ses espèces, par le nombre des branches infinies de la courbe, et par la nature de ces branches qu'il détermine par celle de leurs asymptotes curvilignes. Pour tout ce qui concerne sa division en espèces, il se préoccupe principalement de ce qui se passe à la limite du fini, et il n'a pas égard aux phénomènes qui se passent dans l'espace limité, même lorsqu'ils sont produits par les asymptotes. Il ne peut pas en être autrement, du moment qu'il s'agit d'asymptotes curvilignes; car, sous cette dénomination, on ne doit pas entendre telle ou telle courbe déterminée, mais bien toutes les courbes d'une même nature, ou, pour mieux dire, toutes les parties de courbes douées de cette nature. Les caractères d'Euler sont difficiles à apprécier comme faits : leur recherche exige la connaissance et l'application des procédés du calcul infinitésimal. On ne peut,

d'ailleurs, apprécier toutes les natures diverses des branches illimitées de toutes les lignes d'un ordre, au moyen de la connaissance des natures des branches illimitées des lignes des ordres inférieurs; car il existe, dans chaque ordre, des lignes munies de branches illimitées de natures spéciales, étrangères aux lignes des ordres inférieurs, et parfois aussi à toutes les branches illimitées des autres lignes du même ordre. La méthode d'Euler exige donc la connaissance *a priori* de ces natures spéciales, ou bien elle exige que cette connaissance soit acquise par des moyens autres que ceux sur lesquels cette méthode est basée. Aussi fait-elle seulement connaître que ces natures sont spéciales à l'ordre ou à certains cas de cet ordre; mais elle n'indique pas comment les branches illimitées qui possèdent ces natures spéciales se comportent à distance finie vis-à-vis d'autres lignes plus simples et connues. Elle ne suffit donc pas pour se faire une idée exacte de la conformation de ces branches. Nous ajouterons, enfin, que si cette méthode se prête à une application générale, elle donne cependant, pour les ordres supérieurs au $3^{me}$, un nombre de genres plus grand que celui qu'on obtient par notre méthode. On doit du moins le croire, puisqu'Euler, en appliquant sa méthode au $4^{me}$ ordre, y trouve cent-quarante-six espèces (genres), tandis que les recherches que nous avons faites, au moyen de nos procédés, ne nous ont donné que cent-vingt genres.

L'adoption des asymptotes rectilignes et de leurs affections dans l'espace limité, comme caractères géométriques des genres, ne présente pas les inconvénients précités. Dans toutes les lignes d'un ordre quelconque, le nombre des asymptotes rectilignes est limité, et ces asymptotes sont déterminées de direction et de position. Leurs affections dans l'espace limité sont des faits réels, saisissables, et qui fournissent un moyen facile de se faire une idée exacte de la conformation des branches vers lesquelles elles convergent. Il est vrai qu'il y a des branches illimitées dépourvues d'asymptotes rectilignes, ou dont les asymptotes rectilignes sont situées à distance infinie; mais ces branches sont dans le même cas que celles des paraboles du $2^{me}$ ordre. Toutes convergent, en effet, avec de pareilles paraboles. L'absence d'asymptotes rectilignes à distance finie est donc elle-même un indice de la conformation de la courbe. La recherche des asymptotes rectilignes n'exige d'autres pro-

cédés de calcul que ceux de l'analyse élémentaire, et elle est d'une exécution générale très-facile. Enfin, notre méthode établit une propriété qui, si elle n'a pas été contestée, n'a cependant pas été formellement énoncée et admise jusqu'ici ; savoir, qu'une asymptote rectiligne d'une courbe d'un ordre quelconque $m$, rencontre celle-ci à distance finie en un certain nombre de points qui varie depuis $(m-2)$ jusqu'à zéro : par suite, notre méthode rectifie la définition restreinte et défectueuse, qu'une asymptote est une droite qui ne rencontre la courbe qu'à distance infinie. Par conséquent, tout en reconnaissant l'éminent mérite des principes établis par Euler, ainsi que leur supériorité scientifique, nous croyons cependant être en droit de soutenir que notre méthode, outre le mérite de la nouveauté, possède encore l'avantage d'être élémentaire, simple, précise, d'une application générale facile, et qu'elle fournit, pour les ordres supérieurs au $3^{me}$, un nombre de genres plus restreint que celle d'Euler.

### MÉTHODE DE NEWTON.

130. Newton distingue aussi quatre cas d'équations; mais les conditions analytiques de ses cas ne sont pas les mêmes que celles qui distinguent les quatre cas d'Euler. Newton établit ensuite quatorze divisions principales et, en dernier lieu, il partage les lignes de ces quatorze divisions en soixante-douze espèces. Il attache à ces divisions et à ces espèces certains caractères géométriques propres aux lignes du $2^{me}$ ordre; mais comme il se présente dans le $3^{me}$ ordre des phénomènes tout à fait étrangers au $2^{me}$ degré, Newton a dû chercher à établir des assimilations qui sont plus ou moins heureuses.

131. Newton distingue les courbes munies d'une asymptote rectiligne à distance finie, de celles dans lesquelles cette asymptote est située à l'infini. Les premières, dont les branches illimitées sont, d'après lui, d'espèce hyperbolique, sont représentées par des équations des deux premiers cas, et les autres, dont il dit que les branches illimitées sont d'espèce parabolique, répondent à des équations des deux derniers cas. Il distingue ensuite les courbes qui peuvent être coupées en deux points par les parallèles à l'asymptote rectiligne, de celles que ces parallèles ne peuvent couper qu'en un point.

Les premières appartiennent aux équations du premier et du troisième cas et les autres à celles du deuxième et du quatrième cas. Il en résulte que le premier cas de Newton comprend les trois premiers cas d'Euler, par conséquent, nos trois premières classes, et que les trois derniers cas de Newton sont compris dans le quatrième cas d'Euler, ou dans notre 4^me^ classe, dont chacun de ces cas forme un genre.

132. Pour établir ses quatorze divisions, Newton a eu égard au nombre et à la qualité des parties de la courbe munies de branches illimitées et, par suite, il partage les lignes du 3^me^ ordre en :

*Hyperboles redondantes* (1^re^, 2^me^, 3^me^ et 4^me^ divisions);
*Hyperboles défectives* (5^me^ et 6^me^ divisions);
*Hyperboles paraboliques* (7^me^ et 8^me^ divisions);
*Hyperbolismes* (9^me^, 10^me^ et 11^me^ divisions);
*Trident, paraboles divergentes et parabole cubique* (12^me^, 13^me^ et 14^me^ *divisions*).

Il distingue ensuite les hyperboles par le nombre de leurs diamètres, en prenant le mot dans l'acception restreinte du 2^me^ degré. Celles qui en sont dépourvues forment les 1^re^, 5^me^ et 7^me^ divisions, celles qui en possèdent un forment les 2^me^, 6^me^ et 8^me^ divisions, et la 3^me^ division comprend les hyperboles qui possèdent trois diamètres bissecteurs. Il forme, en dernier lieu, une division distincte des hyperboles redondantes dans lesquelles les trois asymptotes passent par un même point : c'est la 4^me^ division.

Dans tous les cas d'un ou de plusieurs diamètres bissecteurs, la courbe est symétrique par rapport à ces droites : ce sont les cas de non-intersection de la courbe avec l'asymptote. Les divisions de Newton, sauf la 4^me^, ne sont donc autre chose que nos genres; et s'il se fût abstenu de former une division dictincte des cas de réduction du triangle asymptotique à un point, s'il eût formé deux divisions de chacune des trois espèces d'hyperbolismes dans lesquelles il peut également exister un diamètre bissecteur, il eût obtenu un nombre de divisions égal à celui de nos genres. Nous ajouterons qu'en formant une division distincte des hyperboles redondantes dans lesquelles le triangle asymptotique est réduit à un point, circonstance indiquée par l'an-

nulation du coefficient $b$ qu'il donne au terme en $x^2$ de son équation générale, Newton aurait dû, pour opérer systématiquement, former également une division distincte des hyperboles défectives dans les équations desquelles le terme en $x^2$ manque. Il est vrai que ces hyperboles ne possèdent qu'une seule asymptote; mais elles possèdent, par contre, un système de diamètres conjugués qui forment avec l'asymptote un triangle, qui est l'analogue du triangle asymptotique des hyperboles redondantes et qui se réduit aussi à un point, en cas d'annulation du coefficient $b$. Les modifications qui en résultent dans les hyperboles défectives sont au moins aussi sensibles et aussi remarquables que celles que la réduction du triangle asymptotique produit dans les hyperboles redondantes.

**133.** Newton prend pour base principale de sa sous-division en espèces la discussion de l'équation fournie par le polynôme sous-radical de la valeur de $y$ : cette équation fournit les tangentes-limites. S'il se fût borné à ce moyen et s'il l'eût appliqué systématiquement, il eût obtenu le même nombre d'espèces que nous; mais il a, d'un côté, omis quatre cas, produits par la variation des tangentes-limites : ce sont ceux de nos 15$^{me}$ et 16$^{me}$ espèces de la 2$^{me}$ classe, et 8$^{me}$ et 9$^{me}$ espèces de la 3$^{me}$ classe. Il a aussi omis deux autres cas, qui forment les premières sous-divisions des 8$^{me}$ et 9$^{me}$ espèces de la 2$^{me}$ classe. D'un autre côté, il a, par contre, admis comme signes distinctifs d'espèces, des affections différentes de celles qui sont produites par la variation des tangentes-limites, savoir : d'abord, l'annulation du triangle asymptotique, qui a fourni neuf espèces, ses 24$^{me}$ à 32$^{me}$; ensuite, le changement de position de ce triangle, qui a donné ses 6$^{me}$, 7$^{me}$, 14$^{me}$, 16$^{me}$, 17$^{me}$, 19$^{me}$ et 23$^{me}$ espèces; en troisième lieu, dans les hyperboles redondantes munies d'un seul diamètre, la différence de position de l'hyperbole inscrite et de l'hyperbole circonscrite, ce qui a produit la 15$^{me}$ espèce et la 17$^{me}$ déjà citée; enfin, en dernier lieu, la symétrie inverse, qui a donné les 38$^{me}$, 59$^{me}$ et 61$^{me}$ espèces, ainsi que la 33$^{me}$ comprise dans les neuf hyperboles redondantes dans lesquelles le triangle asymptotique est réduit à un point.

Newton n'a cependant pas admis d'une manière sytématique, comme signes distinctifs d'espèces, les conditions analytiques des caractères précités. C'est ainsi qu'il n'a pas eu égard au changement de signe du coefficient $b$ et à son annulation dans les hyperboles redondantes munies d'une partie anguinée,

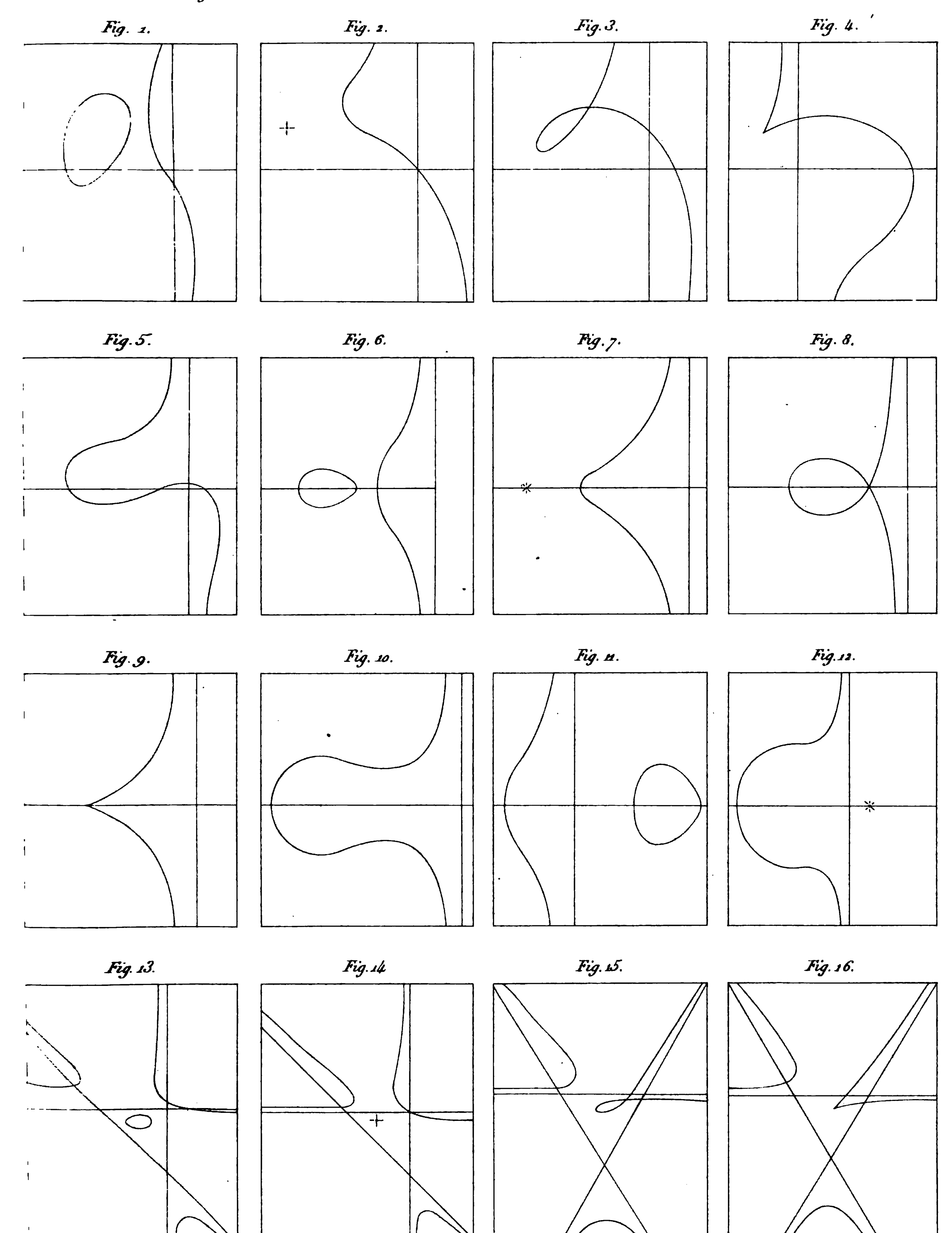
et en général dans les hyperboles défectives. S'il eût eu égard à ces circonstances chaque fois qu'elles peuvent se présenter, il eût trouvé dix-sept espèces de plus, lesquelles, ajoutées aux soixante-douze espèces qu'il a énumérées et aux six cas qu'il a omis, eussent produit en tout quatre-vingt-quinze espèces. Tel devrait être le nombre des espèces de lignes du 3$^{me}$ ordre, en appliquant, d'une manière systématique, toutes les conditions analytiques admises par Newton pour distinguer ces lignes.

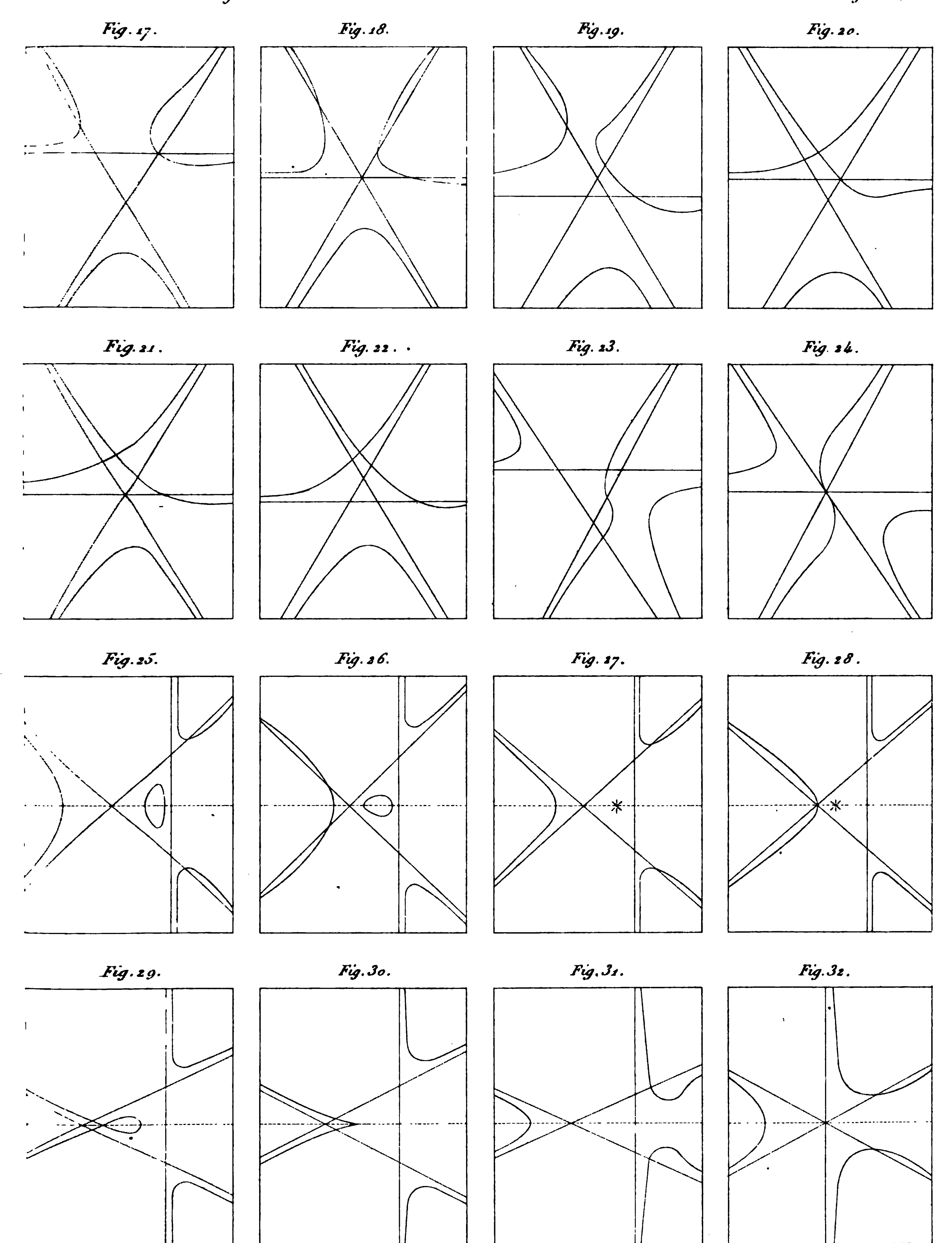
134. Nous avons admis la variation du nombre des tangentes-limites et de leur position relative comme seuls signes distinctifs des espèces. Quant aux autres affections, elles n'ont pas été négligées, mais elles ont été considérées comme des caractères distinctifs de sous-espèces ou de variétés d'une même espèce. En opérant de cette manière, nous sommes parvenu à réduire le nombre des espèces des lignes du troisième ordre à cinquante-six, sans omettre aucune des particularités que ces lignes peuvent présenter.

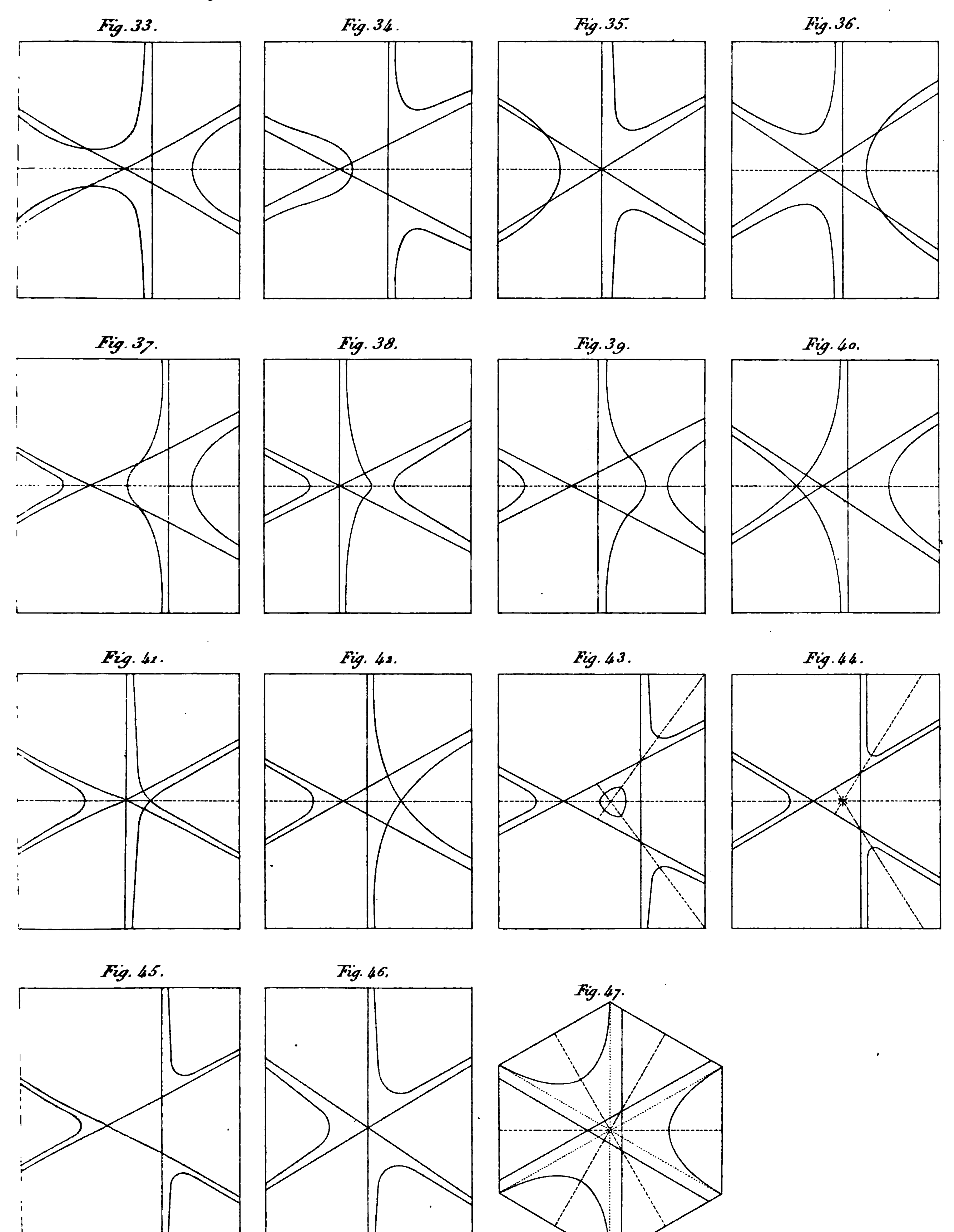
FIN.

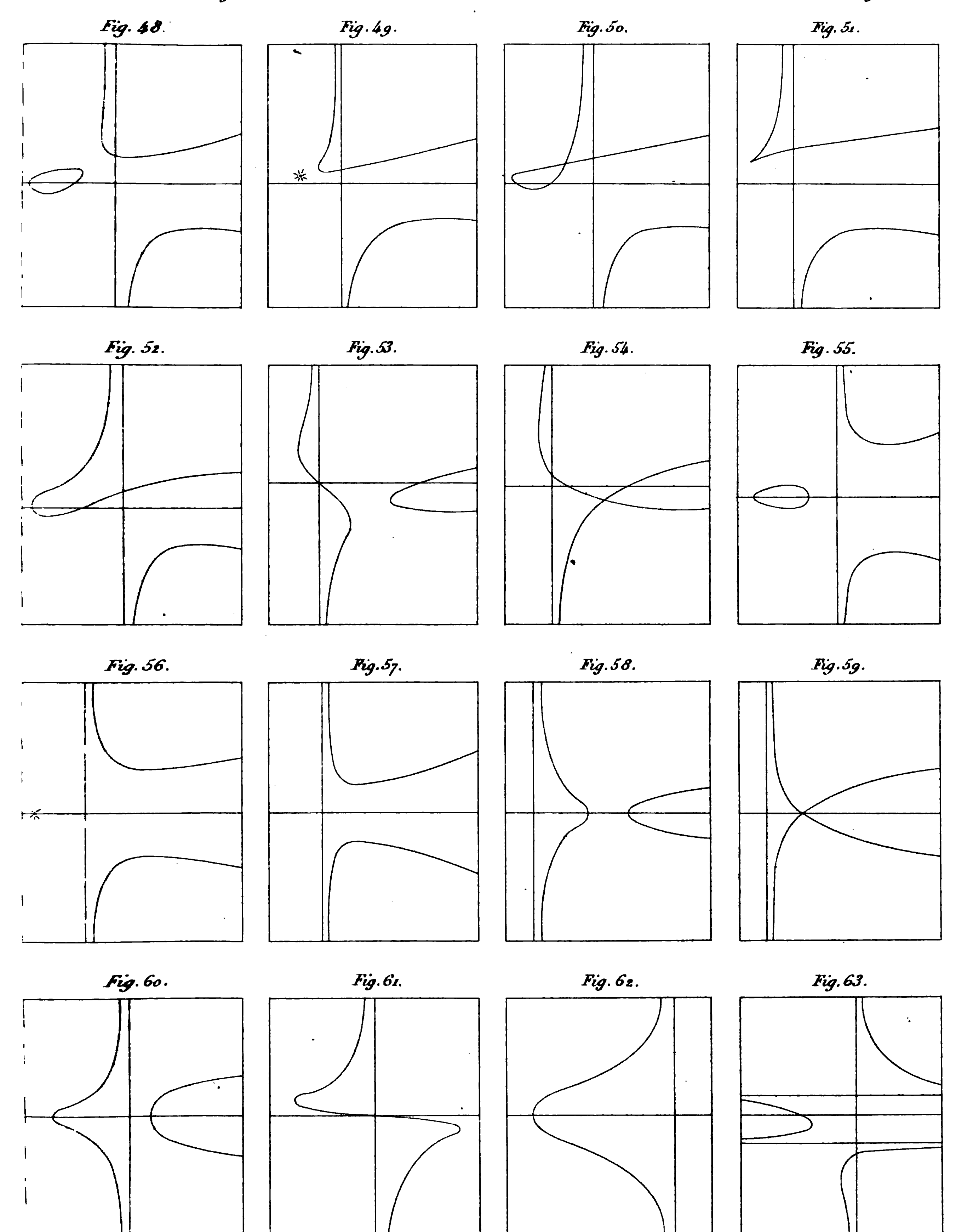
# ERRATA.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Page 12, 1[e] ligne. | Au lieu de | $Bz + D = o$, | il faut | $Bz^2 + D = o$. |
| — 13, 11[e] — | — | $D \overset{<}{\equiv} o$ | — | $D \overset{>}{\equiv} o$. |
| — 49, 15[e] — | — | (I) | — | (I′). |
| — 64, 23[e] — | — | par le zone | — | par la zone. |
| Planche I . . . . . . | — | (*Fig.* 10.) | — | (*Fig.* 11.) |
| — I . . . . . . | — | (*Fig.* 11.) | — | (*Fig.* 12.) |
| — I . . . . . . | — | (*Fig.* 12.) | — | (*Fig.* 10.) |


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.


Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.


Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.

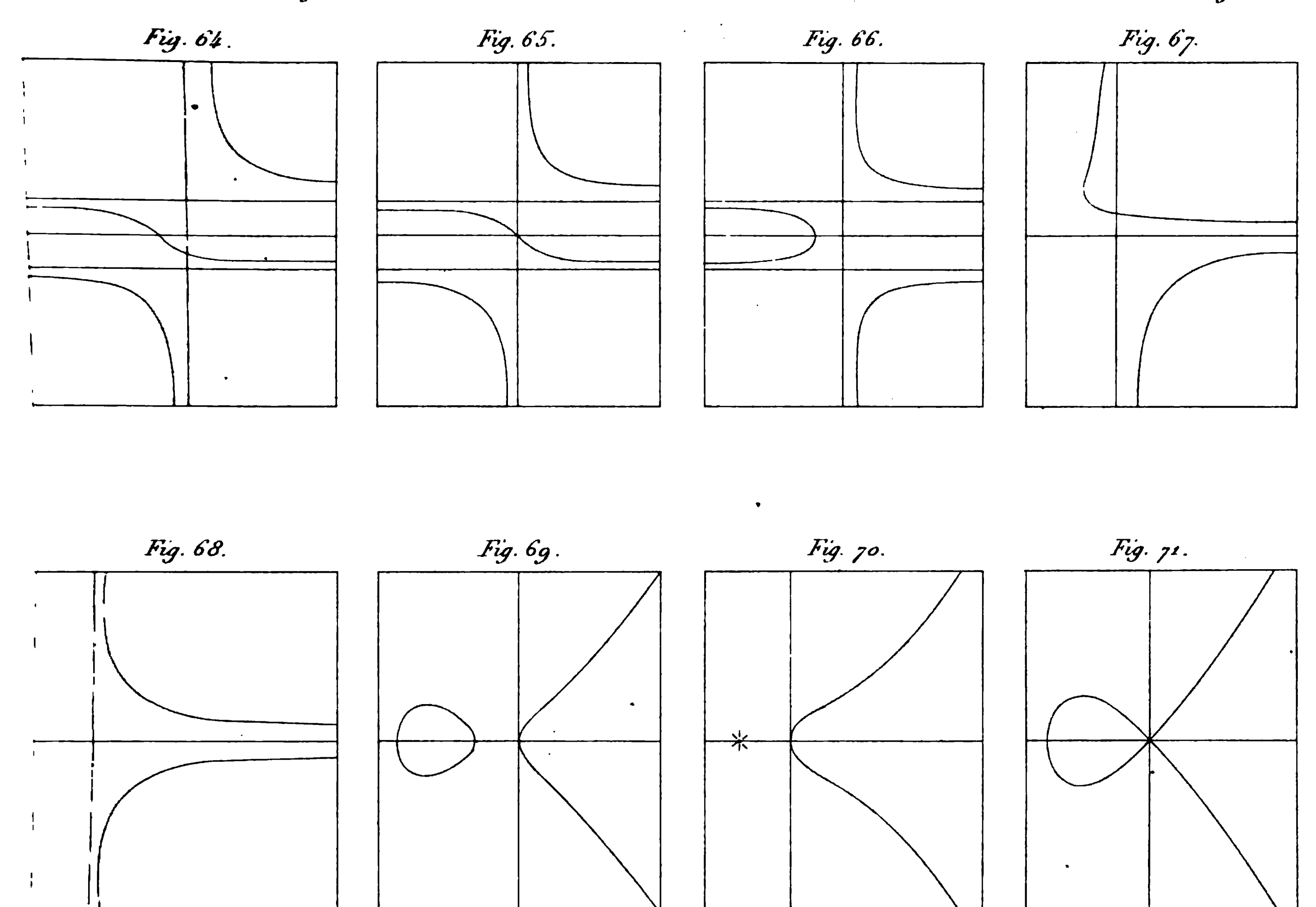


Fig. 64. Fig. 65. Fig. 66. Fig. 67.

Fig. 68. Fig. 69. Fig. 70. Fig. 71.

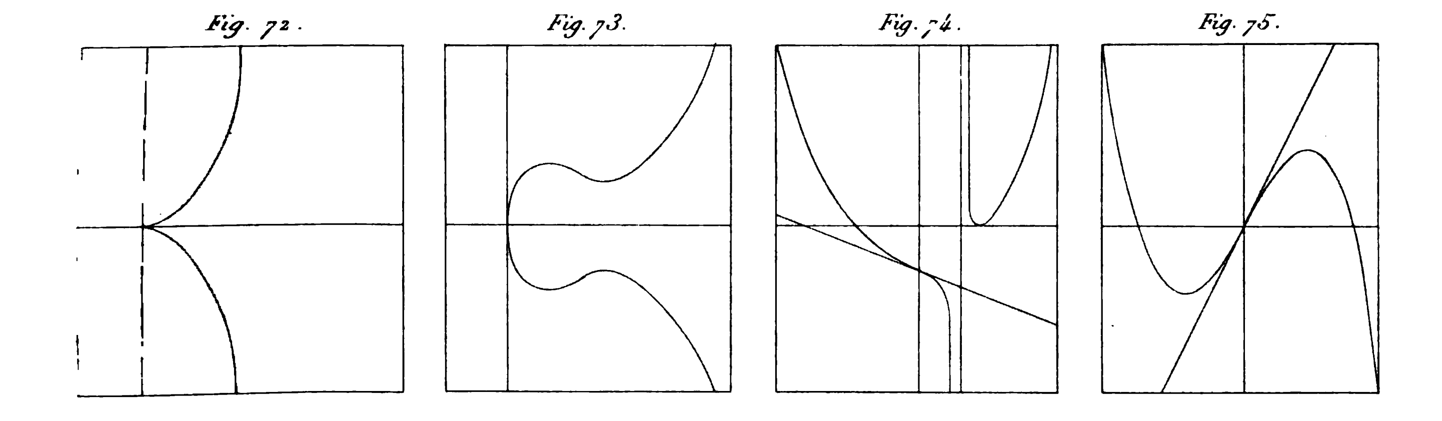


Fig. 72. Fig. 73. Fig. 74. Fig. 75.

# SUR UN POINT

DE

# LA THÉORIE DE LA FORMULE DE STIRLING,

PAR

HENRI LIMBOURG,

RÉPÉTITEUR D'ANALYSE A L'ÉCOLE DU GÉNIE CIVIL.

---

(Mémoire présenté le 2 juin 1860.)

# SUR UN POINT

DE

# LA THÉORIE DE LA FORMULE DE STIRLING.

§ 1. La question dont je vais m'occuper dans cette note est la suivante: *Si l'on prend d'une manière approchée pour développement de* $\log \Gamma(1+a)$,

$$\tfrac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1.}{1.2.a} - \frac{B_3.}{3.4a^3} + \frac{B_5.}{5.6a^5} \cdots\cdots + \frac{(-1)^{m-1}B_{2m-1}}{(2m-1).2m.a^{2m-1}},$$

*déterminer la valeur de* m *qui fournit la plus grande approximation;* ou, en d'autres termes, *déterminer* à priori *le nombre de termes qu'il faut prendre dans la formule de Stirling**, *pour que l'erreur soit la moindre possible.*

La série de Stirling, dont la haute importance pratique n'est pas discutable, mais dont la théorie est restée longtemps fort incomplète, a été, dans ces vingt dernières années, l'objet de travaux remarquables, et l'on a aujourd'hui diverses démonstrations de ce beau théorème qui fut un pas décisif dans cette théorie **.

* La formule citée est due à Stirling, seulement lorsque $a$ est un nombre entier. Nous la désignerons cependant toujours sous le nom de *formule de Stirling*.

** On peut consulter à ce sujet, dans le *Journal de Crelle*, les mémoires de M. Raabe, t. XXV et XXVIII, et un mémoire de M. Malmsten, t. XXXV; un mémoire de Cauchy, dans le t. II des *Exercices d'analyse et de physique mathématique;* enfin un mémoire de M. Schaar, dans le XXII[e] volume des *Mémoires des savants étrangers* de l'Académie de Bruxelles.

*Si on arrête la série de Stirling à un terme quelconque, l'erreur commise est moindre que le dernier terme conservé, et moindre encore que le terme qui aurait suivi.*

La question que je me suis proposée est relativement sans aucune importance. Il est rare, lorsqu'on emploie la formule de Stirling, que l'on pousse le calcul jusqu'au terme qui donnerait l'erreur *minimum*. Il suffit que l'on sache que chaque terme est une limite supérieure de l'erreur commise en calculant la série jusque-là, et que de plus, on ait démontré, comme l'ont fait Legendre et Cauchy, que les termes vont en décroissant aussi longtemps que $m$ n'est pas supérieur à $\pi a$. Mais lors même que leur utilité pratique serait tout à fait nulle, on ne doit pas moins étudier les points restés obscurs des théories importantes et qui n'ont pas encore été abordés par des méthodes rigoureuses. A ce titre, la présente recherche ne sera peut-être pas dénuée d'intérêt. On verra, du reste, qu'elle nous permettra d'énoncer sur la série de Stirling elle-même quelques propositions assez remarquables.

§ 2. Cauchy a démontré (*Exercices d'analyse et de physique mathématique*, t. II, pages 393 et suiv.) que l'on a rigoureusement pour toute valeur positive de $a$ :

$$\log \Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_3}{3.4a^3} \ldots\ldots + \frac{(-1)^{m-1} B_{2m-1}}{(2m-1).\,2m.\,a^{2m-1}}$$
$$+ (-1)^m \int_0^\infty v_m e^{-ax}\, dx,$$

où $B_1, B_3, B_5 \ldots B_{2m-1}$ représentent les nombres de Bernoulli, et

$$v_m = 2\left[\frac{x^{2m}}{(2\pi)^{2m}[(2\pi)^2+x^2]} + \frac{x^{2m}}{(4\pi)^{2m}[(4\pi)^2+x^2]} + \frac{x^{2m}}{(6\pi)^{2m}[(6\pi)^2+x^2]} + \ldots\ldots\right]$$

L'intégrale définie $\int_0^\infty v_m e^{-ax}\, dx$ est donc égale à

$$\Sigma_{r=1}^{r=\infty} \int_0^\infty \frac{2.\, x^{2m}\, e^{-ax}\, dx}{(2r\pi)^{2m}\,[(2r\pi)^2+x^2]}.$$

Si dans chacune des intégrales dont se compose cette somme, on rem-

place $x$ par $2r\pi x$, on aura :

$$\int_0^\infty v_m\, e^{-ax}\, dx = \Sigma_{r=1}^{r=\infty} \int_0^\infty \frac{1}{r\pi} \frac{x^{2m}}{1+x^2}\, e^{-2r\pi ax}\, dx.$$

Et comme :

$$\Sigma_{r=1}^{r=\infty} \frac{1.}{r}\, e^{-2r\pi ax} = \log \frac{1}{1-e^{-2\pi ax}},$$

on aura pour le terme sommatoire la forme remarquable

$$\int_0^\infty r_m\, e^{-ax}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} \log \frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}\, dx.$$

Ainsi on a pour toute valeur de $a$ positive, la formule rigoureuse :

$$\log \Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi\, a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_3}{3.4a^3} \ldots\ldots + \frac{(-1)^{m-1} B_{2m-1}}{(2m-1)2ma^{2m-1}}$$
$$+ (-1)^m \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} \log \frac{1}{1+e^{-2\pi ax}}\, dx,$$

dont on peut voir la démonstration directe dans le mémoire cité de M. Schaar, qui a le premier présenté sous cette forme élégante le terme sommatoire de la formule de Stirling *.

Ainsi la valeur absolue de l'erreur commise, en prenant, dans la série de Stirling, $m$ termes à partir de $\frac{B_1}{1.2a}$, est représentée par

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^2} \log \frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}.$$

* Remarquons en passant que, sous cette forme, le théorème énoncé au § 1 est évident; car l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2} \log \frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}\, dx,$$

étant essentiellement positive, il résulte que l'erreur est toujours de signe contraire au dernier terme conservé, et comme les termes sont alternativement positifs et négatifs, l'erreur change de signe à chaque terme, ce qui exige qu'elle soit moindre que le dernier terme conservé, et moindre que celui qui aurait suivi.

Si l'on avait pris un terme de moins, cette erreur aurait été exprimée par

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

La différence entre ces deux erreurs est exprimée par l'intégrale définie

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}.$$

Si je considère cette intégrale définie en elle-même et comme une fonction continue de $m$, je remarquerai que sa dérivée par rapport à $m$ est constamment négative. Cette intégrale va donc constamment en décroissant à mesure que $m$ croît. Si elle passe par zéro, elle ne peut y passer qu'une seule fois, et est constamment positive pour des valeurs inférieures de $m$, et constamment négative pour des valeurs supérieures. Représentons donc par $\mu$ la fonction de $a$ qui satisfait à l'équation transcendante

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-2}(1-x^2)\,dx}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}} = 0.$$

Puis représentons par $m'$ le nombre entier contenu entre $\mu-1$ et $\mu$, il est facile de voir que $m'$ sera la valeur de $m$; qui satisfera à la question posée. En effet, aussi longtemps que l'on n'aura pas $m > m'$, l'erreur, en prenant $m-1$ termes, serait plus forte qu'en prenant $m$ termes. En prenant $m'+1$ termes, au contraire, et d'autres valeurs plus grandes pour $m$, l'erreur serait constamment plus forte qu'en prenant un terme de moins.

Dans le cas où $\mu$ serait un nombre entier, il y aurait deux termes qui donneraient l'erreur *minimum*, et il serait indifférent de prendre, soit

$$\log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a}\cdots\cdots + \frac{(-1)^{\mu-2}B_{2\mu-3}}{(2\mu-3)(2\mu-2)a^{2\mu-3}}$$

ou

$$\log\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a}\cdots\cdots + \frac{(-1)^{\mu-2}B_{2\mu-3}}{(2\mu-3)(2\mu-2)a^{2\mu-3}} + \frac{(-1)^{\mu-1}B_{2\mu-1}}{(2\mu-1)\,2\mu.\,a^{2\mu-1}}.$$

L'erreur serait la même au signe près dans les deux cas, et on aurait alors exactement la valeur de $\log \Gamma(1+a)$ en prenant une moyenne entre ces deux valeurs, c'est-à-dire :

$$\log \Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2} \log 2\pi a + a(\log. a - 1) + \frac{B_1}{1.2a} \cdots\cdots + \frac{(-1)^{\mu-2} B_{2\mu-3}}{(2\mu-3)(2\mu-2)a^{2\mu-3}}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \frac{(-1)^{\mu-1} B_{2\mu-1}}{(2\mu-1)\, 2\mu.\, a^{2\mu-1}}.$$

Sauf ce cas, il existe une valeur $m'$ de $m$ qui donne une erreur moindre que toutes les autres : ce sera le plus grand entier contenu dans $\mu$. Nous allons donc essayer sinon de déterminer exactement $\mu$ en fonction de $a$, du moins de fixer des limites suffisamment resserrées entre lesquelles $\mu$ se trouve compris. Nous bornerons du reste cette recherche aux seuls cas où l'on emploie la formule de Stirling, c'est-à-dire que nous supposerons que $a$ est au moins égal à l'unité.

§ 3. *De la limite inférieure de* $\mu$. Posons

$$D = \frac{1.}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, dx \log \frac{1}{1-e^{-2\pi a x}},$$

on a

$$D = \Sigma_{r=1}^{r=\infty} \frac{1.}{r\pi} \int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2r\pi a x}\, dx.$$

Prenons la première des intégrales de cette somme

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi a x}\, dx,$$

et appelons $\mu'$ la valeur de $m$, qui rend cette intégrale égale à zéro. La dérivée de cette intégrale par rapport à $a$ est

$$-2 \int_0^\infty \frac{x^{2m-1}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi a x}\, dx.$$

Si

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi a x}\, dx$$

est supposé nul,

$$\int_o^\infty \frac{x^{2m-1}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx$$

est négatif, et, par conséquent, la dérivée de

$$\frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1+x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx$$

est positive. On en conclut que si

$$\frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx = o.$$

En remplaçant dans cette intégrale $a$ par d'autres valeurs plus grandes $2a$, $3a$... etc., toutes les intégrales nouvelles seront positives. Ainsi lorsqu'on a :

$$\frac{1.}{\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx = o,$$

toutes les intégrales de la somme

$$\Sigma_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2)}\, e^{-2r\pi ax}\, dx$$

sont encore positives, par conséquent, si l'on a :

$$\frac{1.}{\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2\mu-2}(1-x^2)}{1+x^2}\log\frac{1.}{1-e^{-2\pi ax}}\, dx = o, \text{ et } \frac{1}{\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2\mu'-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx = o,$$

il est démontré que $\mu > \mu'$.

Nous pourrons donc prendre la limite inférieure de $\mu'$ pour limite inférieure de $\mu$. Soit donc

$$D' = \frac{1.}{\pi}\int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx.$$

Or, remarquons que si, au dénominateur de cette intégrale définie, nous remplaçons $1+x^2$ par $1+x$, nous diminuons la partie positive de D′, et

nous augmentons sa partie négative; si, au contraire, nous remplaçons $1 + x^2$ par $x + x^2$, nous diminuons la partie négative, et nous augmentons la partie positive. Nous aurons donc:

$$\pi D' > \int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x} e^{-2\pi a x} dx \quad \text{et} \quad \pi D' < \frac{1}{\pi} \int_o^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{x+x^2} e^{-2\pi a x} dx.$$

D'où

$$\pi D' > \int_o^\infty x^{2m-2} e^{-2\pi a x} dx - \int_o^\infty x^{2m-1} e^{-2\pi a x} dx,$$

et

$$\pi D' < \int_o^\infty x^{2m-3} e^{-2\pi a x} dx - \int_o^\infty x^{2m-3} e^{-2\pi a x} dx.$$

Or on a en général

$$\int_o^\infty e^{-hx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{h^n},$$

donc :

$$\pi D' > \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} - \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}}$$

$$\pi D' < \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}},$$

ou

$$\pi D' > \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m}} [2\pi a - (2m-1)]$$

$$\pi D' < \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-1}} [2\pi a - (2m-2)].$$

Il est visible d'après cela que D′ sera constamment positif aussi longtemps que l'on n'aura pas

$$2\pi a - (2m-1) < o, \quad \text{ou} \quad m > \pi a + \tfrac{1}{2},$$

qu'il sera négatif au contraire dès que

$$m \overline{\overline{>}} \pi a + 1.$$

Ainsi la valeur de $\mu'$ est constamment supérieure à $\pi a + \frac{1}{2}$. Elle est infé-

rieure à $\pi a + 1$. Ces limites ne diffèrent entre elles que d'une demi-unité. Nous allons en trouver d'autres qui convergeront vers une valeur commune à mesure que $a$ augmentera.

Nous avons trouvé plus haut :

$$\pi D' > \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} - \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}}$$

et

$$\pi D' < \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}}.$$

Il est très-facile, en partant de la valeur exacte de $\pi D'$, de trouver les intégrales définies qu'il faut ajouter dans un cas, retrancher dans l'autre, pour retrouver la vraie valeur de $\pi D'$. On trouve ainsi :

$$\pi D' = \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} - \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} + \int_0^\infty \frac{x^{2m-1}(1-x)^2}{1+x^2} e^{-2\pi a x}\, dx$$

et

$$\pi D' = \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} - \int_0^\infty \frac{x^{2m-3}(1-x)^2}{1+x^2} e^{-2\pi a x}\, dx.$$

Si nous ajoutons ces deux égalités membre à membre, il vient :

$$2\pi D' = \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} - \int_0^\infty \frac{x^{2m-3}(1-x^2)(1-x)^2}{1+x^2} e^{-2\pi a x}\, dx.$$

Or, en faisant sur l'intégrale du second membre les mêmes raisonnements que ceux que nous avons faits sur

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2} e^{-2\pi a x}\, dx,$$

nous obtiendrons facilement les deux inégalités suivantes :

$$2\pi D' > \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} - \int_0^\infty x^{2m-4}(1-x)^3 e^{-2\pi a x}\, dx$$

$$2\pi D' < \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} - \int_0^\infty x^{2m-3}(1-x)^3\, e^{-2\pi a x}\, dx,$$

et par suite :

$$2\pi D' > \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}} \left\{ 4.\frac{2m-3}{2\pi a} - 1 - \frac{3(2m-2)(2m-3)}{(2\pi a)^2} \right\}$$

$$2\pi D' < \frac{\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} \left\{ 3 - \frac{4.(2m-1)}{2\pi a} + \frac{2m(2m-1)}{(2\pi a)^2} \right\}.$$

En égalant à zéro les quantités comprises entre parenthèses, résolvant par rapport à $m$, et choisissant la racine comprise entre $\pi a + \frac{1}{2}$ et $\pi a + 1$, on obtient pour nouvelles limites de $\mu'$ :

$$\mu' > \frac{15 + 8a\pi + \sqrt{(4a\pi - 6)^2 - 27}}{12}$$

et

$$\mu' < \frac{1 + 8a\pi - \sqrt{(4a\pi - 2)^2 - 3}}{4}.$$

Ces limites sont visiblement plus rapprochées que les premières, si $a$ n'est pas inférieur à l'unité. Elles convergent du reste rapidement toutes les deux vers $\pi a + \frac{3}{4}$, à mesure que $a$ augmente.

En procédant de la même manière que précédemment, on peut, dans les inégalités qui donnent les limites de $2\pi D'$, ajouter aux seconds membres les intégrales définies nécessaires pour rétablir l'égalité. L'on a ainsi :

$$2\pi D' = \frac{4.\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}} - \frac{3.\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} + \int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x)^4}{1+x^2}\, e^{-2\pi a x}\, dx,$$

$$2\pi D' = \frac{3.\Gamma(2m-1)}{(2\pi a)^{2m-1}} - \frac{4.\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} + \frac{\Gamma(2m+1)}{(2\pi a)^{2m+1}} - \int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x)^4}{1+x^2}\, e^{-2\pi a x}\, dx.$$

D'où, en ajoutant, il vient :

$$4\pi D' = \frac{\Gamma(2m+1)}{(2\pi a)^{2m+1}} - \frac{4.\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} + \frac{4.\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}}$$
$$+ \int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x^2)(1-x)^4}{1+x^2}\, e^{-2\pi a x}\, dx.$$

L'on en tire, par un raisonnement identique aux précédents :

$$4\pi D' > \frac{\Gamma(2m+1)}{(2\pi a)^{2m+1}} - \frac{4.\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} + \frac{4.\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}} + \int_a^\infty x^{2m-4}(1-x)^3 e^{-2\pi a x}\, dx,$$

et par conséquent :

$$4\pi D' > \frac{\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}}\left\{-1 + \frac{10(2m-2)}{2\pi a} - \frac{14(2m-1)(2m-2)}{4\pi^2a^2} + \frac{6(2m)(2m-1)(2m-2)}{8\pi^3a^3} - \frac{(2m+1)2m(2m-1)(2m-2)}{16\pi^4a^4}\right\}.$$

Comme, en égalant à zéro la quantité entre parenthèses, on aurait à résoudre une équation du quatrième degré, je me bornerai à remplacer, dans la parenthèse, la quantité $m$ par la valeur rapprochée

$$\pi a + \frac{3}{4} - \frac{k.}{\pi a},$$

$k$ étant un coefficient numérique que nous déterminerons.

Le résultat de la substitution donne pour reste dans la parenthèse :

$$\frac{64k-6}{16\pi^2a^2} - \frac{192k+10}{4.16\pi^3a^3} - \frac{34.16.k+15-2.16k^2}{16^2.\pi^4a^4} - \frac{k(12k+1)}{8\pi^5a^5} - \frac{k^2(32k+14)}{16\pi^6a^6} + \frac{2k^3}{\pi^7a^7} - \frac{k^4}{\pi^8a^8}.$$

Lorsque $a$ est au moins égal à l'unité, ce reste est constamment supérieur à :

$$\frac{64k-6}{16\pi^2a^2} - \frac{192k+10}{12.16\pi^2a^2} + \frac{34.16k+15-2.16k^2}{16^2\pi^4a^4} - \frac{k(12k+1)}{3.8.\pi^4a^4} - \frac{k^2(32k+14)}{16.9.\pi^4a^4} + \frac{2k^3}{\pi^7a^7} - \frac{k^4}{3.\pi^7a^7};$$

ou bien :

$$\frac{576k-82}{16.12.\pi^2a^2} + \frac{135+100.3.16k-104.16k^2-16.32.k^3}{16^2.9.\pi^4a^4} + \frac{6k^3-k^4}{3\pi^7a^7}.$$

Or, si je posais $576\,k - 82 = 0$, j'obtiendrais $k = \frac{82}{576}$, valeur très-voi-

sine de $\frac{1}{7}$. Et comme, en posant $k=\frac{1}{7}$, les termes restent positifs, j'en conclus que pour

$$m = \pi a + \frac{3.}{4} - \frac{1.}{7.\pi a}.$$

D' est encore positif, et, par conséquent, je puis poser $\mu'$, et *a fortiori*

$$\mu > \pi a + \frac{3.}{4} - \frac{1.}{7.\pi a}.$$

C'est la limite inférieure que nous garderons pour $\mu$. Nous allons maintenant procéder à la recherche de la limite supérieure de $\mu$.

§ 4. *De la limite supérieure de* $\mu$. — Nous avons posé :

$$D' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x)^2}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx = \Sigma_{r=1}^{r=\infty}\frac{1.}{r\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\,e^{-2r\pi a x}\,dx$$

$$= D' + \Sigma_{r=2}^{r=\infty}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{r\pi.\,1+x^2}\,e^{-2r\pi a x}\,dx,$$

*d'où*

$$8\pi D = 8\pi D' + \Sigma_{r=2}^{r=\infty}\frac{8}{r}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\,e^{-2r\pi a x}\,dx.$$

Or l'on a, en appliquant les mêmes raisonnements que précédemment :

$$\Sigma_{r=2}^{r=\infty}\frac{8}{r}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\,e^{-2r\pi a x}\,dx < \Sigma_{r=2}^{r=\infty}\frac{8}{r}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1+x^2)}{x+x^2}\,e^{-2r\pi a x}\,dx,$$

ou

$$< \Sigma_{r=2}^{r=\infty}\frac{8}{r}\int_0^\infty x^{2m-3}(1-x)\,e^{-2r\pi a x}\,dx, \text{ ou que } \Sigma_{r=2}^{r=\infty}\frac{8}{r}\left\{\frac{\Gamma(2m-2)}{r^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-1)}{r^{2m-1}}\right\}.$$

D'autre part, nous avons trouvé :

$$4\pi D' = \frac{\Gamma(2m+1)}{(2\pi a)^{2m+1}} - \frac{4.\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} + \frac{4.\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}}$$

$$+\int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x)^4(1-x^2)}{1+x^2}\,e^{-2\pi a x}\,dx.$$

Or comme on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x)^4(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx = \int_0^\infty x^{2m-4}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\, dx + \int_0^\infty \frac{x^{2m-3}(1-x)^6}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x)^4(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx = \int_0^\infty x^{2m-5}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\, dx - \int_0^\infty \frac{x^{2m-5}(1-x)^6}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx.$$

on en tire :

$$2\int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x)^4(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx = \int_0^\infty x^{2m-4}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\, dx + \int_0^\infty x^{2m-5}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\, dx;$$
$$-\int_0^\infty \frac{x^{2m-5}(1-x)^6(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx.$$

et comme

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-5}(1-x)^6(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx > \int_0^\infty x^{2m-5}(1-x)^7\, e^{-2\pi ax}\, dx,$$

on aura :

$$2\int_0^\infty \frac{x^{2m-4}(1-x)^4(1-x^2)}{1+x^2}\, e^{-2\pi ax}\, dx < \int_0^\infty x^{2m-4}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\, dx + \int_0^\infty x^{2m-5}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\, dx$$
$$-\int_0^\infty x^{2m-5}(1-x)^7\, e^{-2\pi ax}\, dx.$$

L'on aura donc :

$$8\pi D' < \frac{2.\Gamma(2m+1)}{(2\pi a)^{2m+1}} - \frac{8\Gamma(2m)}{(2\pi a)^{2m}} + \frac{8\Gamma(2m-2)}{(2\pi a)^{2m-2}} - \frac{2\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}}$$
$$+\int_0^\infty x^{2m-4}(1-x)^5\, e^{-2\pi ax}\,(3-x)\, dx$$

On trouve en développant l'intégrale du second membre.

$$8\pi D' < \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}}\Big(-1 + \frac{8.(2m-3)}{2\pi a} + \frac{35.(2m-2)(2m-3)}{4a^2\pi^2} - \frac{48.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{8a^3\mu^3}$$
$$+ \frac{27.2m.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{16a^4\pi^4} - \frac{8.(2m+1)2m.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{32a^5\pi^5}$$
$$+ \frac{(2m+2)(2m+1)2m.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{64a^6\pi^6}\Big).$$

Nous aurons donc :

$$8\pi D^{*} < \frac{\Gamma(2m-3)}{(2\pi a)^{2m-3}} \Big\{ \Sigma_{r=2}^{r=\infty} \frac{8}{r} \left( \frac{2m-3}{r^{2m-2}(2\pi a)} - \frac{(2m-2)(2m-3)}{r^{2m-1}\, 4a^2\pi^2} \right) + 1 - \frac{8(2m-3)}{2\pi a}$$

$$+ \frac{35.(2m-2)(2m-3)}{8a^3\pi^3} - \frac{48.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{8a^3\pi^3} + \frac{27.\,2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{16a^4\pi^4}$$

$$- \frac{8.(2m+1)2m.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{32a^5\pi^5} + \frac{(2m+2)(2m+1)\,2m.(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{64a^6\pi^6} \Big\}.$$

Si, dans la parenthèse, je substitue à $m$ la valeur $\pi a + \frac{3}{4}$, j'obtiens pour reste

$$\Sigma_{r=2}^{r=\infty} \frac{8}{r} \Big\{ \frac{1}{r^{2\pi a - \frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{3}{4\pi a}\right) - \frac{1}{r^{2\pi a + \frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{4\pi a}\right) \left(1 - \frac{3}{4\pi a}\right) \Big\}$$

$$- \frac{12}{16\pi^2a^2} + \frac{34}{16.\pi^3a^3} - \frac{170}{16^2\pi^4a^4} - \frac{252}{4.16^2.\pi^5a^5} - \frac{315}{16^3.\pi^6a^6},$$

quantité qui pour toute valeur de $a$ non inférieure à l'unité, est évidemment inférieure à

$$\frac{1}{2^{2\pi a - \frac{3}{2}}} + \frac{8}{3^{2\pi a + \frac{1}{2}}} - \frac{12}{16.\pi^2a^2}\ \frac{34}{16.\pi^3a^3}.$$

Or l'on reconnait que cette dernière quantité est négative si $\pi a + \frac{3}{4} = 5$ et pour des valeurs de $a$ supérieures à celle-là. Ainsi, dès que $\pi a + \frac{3}{4} = 5$, la valeur de $8\pi D$ pour $m = \pi a + \frac{3}{4}$ est négative; et l'on en conclut que $\mu > \pi a + \frac{3}{4}$ avec la restriction $\pi a + \frac{3}{4} \geqq 5$. Cette condition nous fait sortir un peu des limites que nous nous nous sommes imposées; puisque nous avons dit que nos formules seraient applicables dès que $a = 1$; mais nous allons y rentrer immédiatement pour la valeur de $m'$.

§ 5. *De la valeur de $m'$.* — Avant d'aller plus loin et de tirer des paragraphes précédents les conclusions sur la valeur de $m'$, nous remarquerons

* Avec un peu d'attention, l'on reconnaîtra pourquoi nous avons choisi certaines équations plutôt que certaines autres pour rechercher les limites inférieure et supérieure de $\mu$; et l'on verra que l'on a pris les équations les plus favorables dans les limites où l'on s'était placé.

que si on calcule la valeur numérique de l'intégrale définie :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}(1-x^2)}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}\,dx$$

pour la valeur particulière $m = \pi a + \frac{3}{4} = 4$, on trouve que cette intégrale est négative et comprise entre

$$-\,0,\,0000006 \quad \text{et} \quad -\,0,\,0000007.$$

On en conclut que la valeur de $\mu$, qui donne :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-2}(1-x^2)}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}\,dx = o,$$

est inférieure à 4 pour la valeur particulière $\pi a + \frac{3}{4} = 4$.

Or, si de cette équation nous tirons la valeur de $\frac{d\mu}{da}$, on trouve :

$$\frac{d\mu}{da} = \frac{\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-2}(1-x^2)\log x}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}\,dx}{\pi\int_0^\infty \frac{x^{2\mu-1}(1-x^2)}{1+x^2}\cdot\frac{1}{e^{2\pi ax}-1}\,dx},$$

et comme l'on pourrait procéder par un moyen identique à ceux que nous avons employés précédemment; que, pour toute valeur positive de $a$ au moins égale à l'unité, l'intégrale du dénominateur est négative pour $\mu = \pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7\pi a}$, et *a fortiori* pour la vraie valeur, qui est supérieure à celle-ci; que, de plus, l'intégrale du numérateur est essentiellement négative, on en conclura que $\frac{d\mu}{da}$ va en croissant dès que $a = 1$. On en conclut que $\mu$ est toujours inférieur à 4 pour toute valeur de $a$ qui donne $\pi a + \frac{3}{4} \leqq 4$. On en conclut aussi que $\mu$ est toujours inférieur à 5 pour toute valeur de $a$, telle que $\pi a + \frac{3}{4} \leqq 5$, puisqu'il est démontré que $\mu$ est inférieur à 5. Ainsi depuis $a$ égal à l'unité jusqu'à $\pi a + \frac{3}{4}$, on aura $m' = 3$; et depuis $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7.\pi a} = 4$ jusqu'à $\pi a + \frac{3}{4} = 5$, on aura $m' = 4$.

Ces considérations, jointes à ce que nous avons trouvé précédemment sur les limites de $\mu$, nous permettent d'énoncer sur le nombre $m'$, le théorème suivant :

*Si* a *n'est pas inférieur à l'unité, et qu'il n'y ait point d'entier compris entre* $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7.\pi a}$ *et* $\pi a + \frac{3}{4}$, *on obtendra la valeur de* m' *qui donne l'erreur* minimum, *en prenant pour* m' *le plus grand entier contenu dans* $\pi a + \frac{3}{4}$.

S'il tombe en entier entre ces deux limites, il y aura doute s'il faudra prendre ou cet entier ou celui qui le précède pour la valeur de $m'$; mais il faut remarquer que ces cas, très-rares d'ailleurs, sont les moins importants, car ce sont justement ceux où il est indifférent de prendre soit ce nombre entier, soit celui qui le précède, l'erreur étant à peu près la même dans les deux cas.

§ 6. Nous pouvons maintenant énoncer sur la formule de Stirling les théorèmes suivants :

I. Dans la formule de Stirling, l'erreur va constamment en décroissant, aussi longtemps que l'on n'a pas $m > \pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7.\pi a}$. Dès que $m$ atteint $\pi a + \frac{3}{4}$, l'erreur recommence à croître et croît indéfiniment.

II. Aussi longtemps que $m$ n'est pas supérieur à $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7.\pi a}$, l'erreur est moindre que la moitié du terme auquel on s'arrête.

III. Tant que $m$ n'est pas supérieur à $\pi a - \frac{1}{4} - \frac{1}{7.\pi a}$, l'erreur est moindre que la moitié du terme auquel on s'arrête, mais en même temps elle est plus forte que la moitié du terme qui aurait suivi.

IV. Si $m$ atteint $\pi a - \frac{1}{4}$, l'erreur est plus faible que la moitié du terme qui aurait suivi.

V. Si $m$ atteint $\pi a + \frac{3}{4}$, l'erreur est plus faible que la moitié du terme qui aurait suivi, et plus forte que la moitié du dernier terme.

VI. Enfin si $m$ n'est pas supérieur à $\pi a + \frac{3}{4} - \frac{1}{7.\pi a}$, on peut prendre indifféremment :

$$\log \Gamma(1 + a) = \tfrac{1}{2} \log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_3}{3.4a^3} \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} \frac{(-1)^{m-2} B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)a^{2m-3}},$$

ou bien

$$\log . \Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log 2\pi a + a(\log a - 1) + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_3}{3.4a^3} \ldots\ldots + \frac{(-1)^{m-2} B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)a^{2m-3}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{(-1)^{m-1} B_{2m-1}}{(2m-1).2m.a^{2m-1}},$$

l'erreur sera, dans les deux cas, de même signe que le dernier terme, et moindre numériquement que

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)a^{2m-3}} - \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m.a^{2m-1}}\right].$$

Tous ces théorèmes se démontrent avec la plus grande facilité. Le premier résulte évidemment des considérations sur lesquelles nous avons appuyé la recherche de $m'$ dans le § 2. Les 25, 35, 43 et 55 résultent de l'égalité

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}} = \Sigma_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r\pi}\int_0^\infty x^{2m-2}e^{-2r\pi ax}dx$$
$$= \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)(2m)a^{2m-1}},$$

et de l'égalité analogue :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m+2}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx = \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)a^{2m+1}}$$

Suivant que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx,$$

sera plus grand ou plus petit que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m-2}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx,$$

on aura :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi ax}}dx \gtrless \tfrac{1}{2}\frac{B_{2m-1}}{(2m-1).2m.a^{2m-1}}.$$

Suivant que cette même intégrale sera plus grande ou plus petite que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m+2}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx,$$

on aura :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi a x}}\,dx \gtrless \frac{1}{2}\,\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)\,a^{2m+1}}.$$

Enfin, quant au sixième, il suffira de remarquer que les erreurs étant, pour le théorème II, de même signe que le dernier terme, et, par conséquent, de signe contraire entre elles, le résultat véritable est compris entre les deux valeurs, et que, par conséquent, l'erreur est, dans les deux cas, moindre que la différence entre ces deux résultats, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\left[\frac{B_{2m-3}}{(2m-3)(2m-2)\,a^{2m-3}}-\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)\,2m.\,a^{2m-1}}\right].$$

§ 7. Nous remarquerons en terminant que la méthode qui nous a servi à résoudre, dans presque tous les cas donnés, le problème proposé, peut encore s'appliquer à d'autres séries que celle de Stirling; par exemple, à celle qui est analogue à celle-ci et qui donne le développement de $\frac{d.\log\Gamma(1+a)}{da}$, et aux séries auxquelles Cauchy a ramené le calcul des intégrales de la diffraction. En effet, ces intégrales sont, comme l'on sait

$$A=\int_0^m \cos\frac{\pi z^2}{2}\,dz=\int_0^\infty \cos\frac{\pi z^2}{2}\,dz-\int_m^\infty \cos\frac{\pi z^2}{2}\,dz=\frac{1}{2}-\int_m^\infty \cos\frac{\pi z^2}{2}\,dz.$$

$$B=\int_0^m \sin\frac{\pi z^2}{2}\,dz \qquad\qquad =\frac{1}{2}-\int_m^\infty \sin\frac{\pi z^2}{2}\,dz.$$

Or on a :

$$\int_{k'}^\infty \frac{\sin k}{k^n}\,dk=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{k'}^\infty dk.\,\sin k\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{n-1}\,dx.$$

$$\int_{k'}^\infty \frac{\cos k}{k^n}\,dk=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{k'}^\infty dk'\cos k'\int_0^\infty e^{-kx}\,x^{n-1}\,dx.$$

Et, si dans ces intégrales doubles, on intègre d'abord par rapport à $k$, on obtient :

$$\int_{k'}^{\infty} \frac{\cos k}{k^n}\, dk = \frac{1}{\Gamma(n)}\left[\cos k' \int_0^{\infty} \frac{e^{-k'x}\, x^n}{1+x^2}\, dx - \sin k' \int_0^{\infty} \frac{e^{-k'x}\, x^{n-1}}{1+x^2}\, dx\right],$$

$$\int_{k'}^{\infty} \frac{\sin k}{k^n}\, dk = \frac{1}{\Gamma(n)}\left[\cos k' \int_0^{\infty} \frac{e^{-k'x}\, x^{n-1}}{1+x^2}\, dx + \sin k' \int_0^{\infty} \frac{e^{-k'x}\, x^n}{1+x^2}\, dx\right].$$

Si, dans ces dernières intégrales, on fait $k = \frac{\pi s^2}{2}$, $k' = \frac{m^2\pi}{2}$, et $n = \frac{1}{2}$, il vient

$$\tfrac{1}{2} - \mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\left[\cos\frac{m^2\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-m^2\pi x}{2}}\, x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x^2}\, dx - \sin\frac{m^2\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-m^2\pi x}{2}}\, x^{\frac{3}{2}-1}}{1+x^2}\, dx\right],$$

$$\tfrac{1}{2} - \mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\left[\cos\frac{m^2\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-m^2\pi x}{2}}\, x^{\frac{3}{2}-1}}{1+x^2}\, dx + \sin\frac{m^2\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{-m^2\pi x}{2}}\, x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x^2}\, dx\right].$$

Le calcul des deux intégrales de diffraction est donc ramené à deux intégrales de la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{3}{2}-1}}{1+x^2} \quad \text{où} \quad l = \frac{m^2}{4}.$$

Or ces deux intégrales se développent facilement comme suit :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}-1}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}+2-1}\, dx + \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}+4-1}\, dx \,.....$$

$$..... + (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}+2(n-1)-1}\, dx + (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}+2n-1}}{1+x^2}\, dx,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{3}{2}-1}}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{3}{2}-1}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{3}{2}+2-1}\, dx + .....$$

$$..... + (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{3}{2}+2(n-1)-1}\, dx + (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-2\pi lx}\, x^{\frac{1}{2}+2n-1}}{1+x^2}\, dx.$$

En remplaçant dans les seconds membres les intégrales définies connues

par leur valeurs, on obtient immédiatement les formules de développement cherchées :

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\pi lx}\,x^{\frac{1}{2}-1}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m\pi} - \frac{1.3}{m^5\pi^5} + \frac{1.3.5.7.}{m^9\pi^5}\;\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(-1)^n\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\pi lx}\,x^{\frac{1}{2}+2n-1}}{1+x^2}\,dx.$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\pi lx}\,x^{\frac{3}{2}-1}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{m^3\pi^2} - \frac{1.3.5.}{m^7\pi^3}\;\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{2}}(-1)^n\int_0^{\infty}\frac{e^{-2\pi lx}\,x^{\frac{3}{2}+2n-1}}{1+x^2}\,dx.$$

les intégrales définies des seconds membres représentant les erreurs commises en prenant $n$ termes dans chacun d'eux. On obtiendra l'erreur *minimum* dans le premier cas en prenant pour $n$ le plus grand entier fourni par la relation :

$$\tfrac{1}{4} + n - \tfrac{1}{2} \gtrless \pi l + \tfrac{3}{4}, \quad \text{ou} \quad n \gtrless \pi l + 1,\; n \gtrless \frac{\pi m^2}{4} + 1,$$

et, dans le second cas, par la relation :

$$\tfrac{3}{4} + n - \tfrac{1}{2} \gtrless \pi l + \tfrac{3}{4}, \qquad n \gtrless \frac{\pi m^2}{4} + 1.$$

A moins qu'il n'y ait un entier voisin de moins de $\frac{1}{7.\pi l}$ ou de $\frac{1}{7}\frac{4}{\pi.m^2}$, la condition $l < 1$, étant remplacée ici par $m < 2$. Ainsi en attribuant successivement, comme on le fait dans la diffraction, à $m$ les valeurs 2, 3, 4, 5, etc., on aura successivement pour la première $n = 4$, $n = 8$, etc...., et pour la deuxième formule $n = 3$, $n = 7$, etc. — On peut, du reste, énoncer sur ces séries des théorèmes entièrement analogues à ceux que nous avons énoncés sur la formule de Stirling.

FIN.

# RECHERCHES

SUR

# LA CAPILLARITÉ,

PAR

M. E. BÈDE,

PROFESSEUR EXTRAORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

# INTRODUCTION.

Je me suis proposé d'étudier expérimentalement la plupart des questions relatives aux phénomènes capillaires, et dont l'analyse mathématique a constitué les théories célèbres de la capillarité.

Afin de mieux comparer aux résultats de l'observation ceux de ces théories, j'ai cru nécessaire d'en présenter un résumé succinct, qui forme la première partie de ce travail.

# RECHERCHES

SUR

# LA CAPILLARITÉ.

## PREMIÈRE PARTIE.

### EXAMEN DES THÉORIES DE L'ACTION CAPILLAIRE.

Les phénomènes capillaires se présentèrent d'abord comme des anomalies hydrostatiques. Les premiers observés furent l'élévation et la dépression des liquides dans les tubes étroits. Ces faits étaient des exceptions frappantes à la loi des vases communiquants, et l'on chercha à les expliquer par la cause que l'on savait alors capable de produire des effets semblables, c'est-à-dire par une différence de pression de l'air dans le tube et dans le vase ; on admettait que l'air, pénétrant difficilement dans un tube capillaire, s'y trouvait plus ou moins raréfié. Cette explication, déjà fort gênée en présence de la dépression du mercure, tomba tout à fait lorsque l'expérience vint à révéler que les phénomènes capillaires se produisaient aussi bien dans le vide que dans l'air ; mais ce ne fut que pour se relever à l'aide d'étranges hypothèses que je crois

inutile de rappeler ici; je ne puis mieux faire que de renvoyer, pour tous ces détails, au *Traité de la cohésion* de M. Frankenheim [1]. On trouvera dans ce livre plein d'érudition l'histoire et la bibliographie complètes de la capillarité.

C'est à Newton qu'il faut remonter pour trouver la source des théories actuelles. Ce puissant génie, après avoir formulé sa grande idée de l'attraction, sut montrer comment cette cause pouvait déterminer l'équilibre des atomes. Toutefois il dut renoncer à l'idée séduisante de l'unité d'une telle force, et admettre que certaines attractions, telles que la gravitation, le magnétisme, l'électricité, agissent à des distances sensibles, tandis que d'autres ne s'étendent qu'à des distances extrêmement petites; et peut-être, ajoute-t-il, que l'attraction électrique peut s'étendre à ces sortes de petites distances sans être même excitée par le frottement. Après avoir, par de nombreux exemples tirés de la chimie de cette époque, développé cette idée, après avoir émis cette hypothèse qu'il existe dans les particules des corps une espèce de vertu polaire en vertu de laquelle elles tournent leurs côtés homogènes du même sens, il se résume ainsi : « Pour moi, j'aime mieux conclure de la cohésion des corps, que leurs particules s'attirent mutuellement par une force qui, dans le contact immédiat, est extrêmement puissante; qui, à de petites distances, produit les opérations chimiques, et qui ne s'étend pas fort loin de ces particules par aucun effet sensible [2]. »

On voit que dans ces pages se trouvent toutes nos idées actuelles : attraction moléculaire insensible à des distances sensibles, orientation des axes des molécules, affinités chimiques; tout, jusqu'au germe de nos théories électro-chimiques, a été prévu par ce grand prophète de la science.

Immédiatement après avoir posé ces considérations, Newton les applique à quelques phénomènes capillaires. Il explique par l'attraction la hauteur considérable à laquelle le mercure peut se soutenir dans un tube barométrique, l'élévation de l'eau entre deux plans parallèles ou dans un tube étroit, ou encore dans les corps poreux, et enfin l'équilibre d'une goutte entre deux plans inclinés sur l'horizon, et qui font entre eux un très-petit angle.

[1] Frankenheim, *Die Lehre von der Cohäsion*. Breslau, 1835.

[2] Newton, *Traité d'optique*, livre III, traduction de M. Coste, II[de] éd., p. 571.

Newton admet ensuite et démontre l'existence d'une force répulsive naissant à la distance où cesse l'attraction; sa conclusion est celle-ci :

« La nature se trouvera très-simple et très-conforme à elle-même, produisant tous les grands mouvements des corps célestes par l'attraction d'une pesanteur réciproque entre ces corps; et presque tous les petits mouvements de leurs particules par quelques autres puissances attractives et repoussantes, réciproques entre ces particules. »

Ces mots ont été écrits il y a plus de cent cinquante ans. On n'a rien trouvé d'autre depuis.

Cette idée d'une double attraction est développée dans un travail de Jean Keill[1], inséré dans les Transactions philosophiques de 1708. Il y pose, sans démonstration, du reste, quelques principes remarquables, tels que ceux-ci :

Si un corps est formé de particules dont l'attraction décroît en raison inverse du cube ou d'une puissance supérieure de la distance, la force par laquelle ce corps attirera une particule placée en contact avec lui ou à une distance infiniment petite, sera infiniment plus grande que si cette particule était située à une distance finie.

La force attractive des particules, au contact même, dépasse de beaucoup la gravité; mais à une distance donnée elle s'évanouit.

L'adhérence des particules dépend de la grandeur du contact; les molécules sphériques ne pouvant que très-légèrement se toucher, adhèrent peu, ce qui explique la fluidité.

Ces idées s'éloignent fort peu des nôtres, le contact seul des molécules nous paraît inadmissible.

Il est remarquable que Jean Keill n'applique pas ses principes aux phénomènes capillaires; il mentionne seulement l'ascension de la séve dans les plantes.

Maintenant que nous avons reconnu l'origine de l'idée générale de l'attraction ou de l'idée particulière d'une attraction surpassant la gravité à de très-petites distances, mais absolument insensible à une distance finie, nous

[1] *Joannis Keill Epistola, in qua leges attractionis aliaque physices principia traduntur.* — Phil. Trans., 1708, n° 315.

pouvons entrer dans l'examen des théories fondées sur ces idées et concernant les phénomènes capillaires.

Je ne ferai que mentionner celle de Hausksbée[1] et celle de Jurin[2], théories imparfaites et opposées l'une à l'autre, la première attribuant l'élévation des liquides dans les tubes capillaires à l'attraction de la partie du tube en contact avec le liquide, la seconde l'attribuant à l'attraction du petit anneau du tube situé au-dessus de la colonne liquide.

On trouve un semblable essai de théorie dans le mémoire de Gellert[3] sur la dépression du plomb fondu dans les tubes de verre, travail qui date de 1740.

Ce fut en 1743 que parut la première théorie un peu complète sur l'action capillaire; elle est due à l'illustre Clairaut et elle est insérée dans sa théorie de la figure de la terre. Clairaut ne considère que le phénomène de l'élévation des liquides dans les tubes capillaires, et il traite cette question d'une manière fort remarquable. Il admet que l'attraction du verre et celle de l'eau suivent la même loi, par rapport à la distance, et ne diffèrent que par leur intensité. Il suppose en outre que ces attractions ne sont sensibles qu'à de très-petites distances, ce qui permet de supposer infinies la masse du liquide et celle du tube. En partant de ces principes, il détermine l'équilibre d'un canal infiniment étroit, formé de deux branches verticales et d'une horizontale, la première des deux branches verticales étant située dans l'axe même du tube, la seconde, ainsi que la branche horizontale, en étant assez éloignée pour que son attraction n'agisse pas sur elles. Voici un résumé rapide de son analyse : $p$, $h$, $k$ sont les intensités de la pesanteur, de l'attraction du verre et de l'attraction de l'eau; $f(x)$ est l'attraction d'un corps terminé par un plan, sur une molécule située à une distance $x$ de ce plan; cette fonction est indépendante des dimensions de ce corps; $f(b, x)$ est l'attraction d'un cylindre creux de rayon $b$ et terminé par un plan sur une molécule située à la distance $x$ de ce plan.

D'après cela, les forces qui agissent sur les deux branches verticales ML, IK (*fig.* 1) sont :

[1] *Phil. Trans.*, XXVI, n° 319.
[2] *Idem*, XXX, n°s 355-363.
[3] *Comment. Petrop*, XII (1740). (*De phoenomenis plumbi fusi, etc.* Gellert, p. 250.)

IK sont :

En ML, de haut en bas, $p.\,\mathrm{ML} + \int k dx\, f(x)$.
En IK, de haut en bas, $p.\,\mathrm{IK} + \int k dx\, f(x)$
$$-\int k f(b, x)\, dx - \int dx \quad f(b, x, h, k),$$

$f(b, x, h, k)$ étant l'attraction du volume liquide YZI, que nous appelons aujourd'hui *ménisque*.

Enfin nous avons, en IK de bas en haut :

$$(2h - 2k)\int dx\, f(b, x),$$

qui exprime l'attraction du tube de verre diminuée de celle d'un tube semblable d'eau située au-dessous, sur les molécules du canal situées au-dessus et au-dessous de l'extrémité inférieure du tube.

En rassemblant ces forces et égalant [illegible] 0 leur somme algébrique, on arrive à cette équation :

$$\mathrm{I}i = \frac{(2h - k)\int dx\, f(b, [illegible] - \int dx\, f(b, x, h, k)}{},$$

qui donne l'élévation du liquide en fo[illegible]ion du diamètre. Sans pousser plus loin son analyse, Clairaut observe qu'[illegible] grand nombre de fonctions donneront pour I$i$ une valeur très-sensible, [illegible]and $b$ sera très-petit, et qu'il y en aura une qui rendra I$i$ réciproque au [illegible]iamètre.

En outre, il déduit de cette formule [illegible] résultat remarquable, que l'eau peut s'élever dans un tube tant [illegible] de l'attraction de ce tube ne sera pas [illegible]oitié moindre [illegible].

[illegible] ensuite à montrer que la surface d'un liquide doit être en pa[illegible] cas concave vers le haut, et que l'élévation de l'eau dans un tube formé de deux parties d'inégal diamètre est la même que si le tube avait partout le même diamètre qu'au point où se trouve le haut de la colonne liquide.

Ce grand géomètre mentionne aussi comme dus aux mêmes causes d'autres phénomènes capillaires, tels que la courbure des surfaces liquides et la forme des gouttes ; mais il n'y applique pas son analyse.

# RECHERCHES

SUR

# LA CAPILLARITÉ,

PAR

M. E. BÈDE,

PROFESSEUR EXTRAORDINAIRE A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE.

quels est interposée une couche de liquide, et celle d'une goutte vers l'intersection de deux plans faisant entre eux un très-petit angle, et entre lesquels elle est comprise. Il attribue ces phénomènes à la pression négative de la surface du liquide.

Après l'examen de ces questions particulières, Young entre dans des considérations générales sur la *cohésion superficielle,* dont je ne pourrais résumer l'exposition extrêmement concise, et qui méritent d'ailleurs d'être rapportées en entier :

« On peut supposer que les particules des liquides, et probablement aussi celles des solides, possèdent un pouvoir répulsif qui, ainsi que Newton l'a démontré, est dû à un fluide aériforme, et varie en raison inverse de la distance. Dans les gaz et les vapeurs, cette force apparaît sans contrôle; mais dans les liquides, elle est contre-balancée par la force cohésive, de telle sorte que les particules conservent la faculté de se mouvoir dans toutes les directions; dans les solides, la même cohésion est accompagnée d'une résistance plus ou moins grande au mouvement latéral, résistance parfaitement indépendante de la force cohésive, et qui doit en être soigneusement distinguée. Il est simple de supposer que la force de cohésion est presque ou parfaitement constante dans sa grandeur à toutes les petites distances auxquelles elle s'étend, et doit son apparente diversité à l'action contraire de la répulsion, qui varie avec la distance. Actuellement, dans les parties intérieures du liquide, ces forces sont dans un parfait équilibre, les particules étant assez voisines pour que la répulsion devienne précisément égale à la force cohésive qui les rassemble; mais toutes les fois qu'il y a une surface courbe ou angulaire, on peut, en considérant les actions des différentes parties, reconnaître que la cohésion, l'emportant nécessairement sur la répulsion, pressera les parties superficielles en dedans avec une force proportionnelle à la courbure, et produira ainsi l'effet d'une tension uniforme de la surface. En effet, si l'on considère l'effet de deux particules quelconques d'une ligne courbe sur une troisième située au delà d'elles, à une distance égale à la leur, on trouve que la résultante de leurs forces attractives égales est bissectrice de l'angle formé par les directions de ces forces, tandis que des deux forces répulsives, l'une étant plus grande que l'autre dans le rapport de un à deux, leur résultante

formera avec celle-ci un angle égal au sixième de leur angle. Par suite, l'addition d'une troisième force sera nécessaire pour maintenir en équilibre ces deux résultantes, et cette force doit être dans un rapport constant avec l'angle infiniment petit qui est la mesure de la courbure, la distance des particules étant constante. Le même raisonnement peut être appliqué à toutes les particules qui sont dans la sphère d'activité (*within the influence*) de la force cohésive, et les conclusions sont également exactes si la cohésion n'est pas parfaitement constante, mais varie moins rapidement que la répulsion. »

Bien que ces considérations reposent sur des hypothèses généralement peu admises, j'ai cru intéressant de les transcrire parce qu'elles peuvent se rapporter non-seulement, comme l'observe Young, à différentes lois sur la cohésion, mais aussi à telles lois que l'on voudra, sur l'attraction et la répulsion, pourvu qu'en vertu de ces lois l'attraction diminue avec la distance moins vite que la répulsion.

Toutefois, je dois déclarer que ces raisonnements d'Young, même leurs bases admises, ne me satisfont pas entièrement; mais il y a toujours à gagner à rassembler sur des points délicats les opinions des hommes remarquables.

Young termine son beau travail par la considération de la cohésion entre un solide et un liquide, et il fait voir que la cohésion des particules du solide à celles du liquide est à la cohésion des particules liquides comme la moitié du sinus verse de l'angle sous lequel le liquide coupe le solide est au rayon; d'où il déduit le théorème de Clairaut.

On voit par cette analyse que Young a su donner une explication de la plupart des phénomènes capillaires; et si l'on doit reconnaître que sa théorie n'est qu'ébauchée, en revanche on ne peut refuser de lui accorder un remarquable caractère d'unité. Du reste, cet illustre physicien déclare franchement que l'ensemble de ses raisonnements doit être considéré plutôt comme une approximation que comme une stricte démonstration, et qu'il est seulement permis d'en conclure que tous les phénomènes de la capillarité peuvent être expliqués et mathématiquement démontrés, en partant de la loi de l'égale tension de la surface, et de la considération d'un angle de contact particulier à chaque combinaison de solide et de liquide.

Est-ce la réserve ou l'impuissance qui empêcha Young de s'avancer davan-

tage dans la voie qu'il venait de tracer? Quoi qu'il en soit, il eut le déplaisir de voir son œuvre promptement effacée par celle d'un homme tout-puissant en analyse, dont la théorie surgit à peu près en même temps que la sienne. Ce fut en 1806 et 1807 que parut le quatrième volume de la *Mécanique céleste*, contenant, entre autres chefs-d'œuvre mathématiques, deux théories de l'action capillaire. La première présente des analogies frappantes avec celle d'Young, et si l'on ne savait que Laplace était aussi noble de caractère que riche de gloire, on pourrait soupçonner qu'il avait eu, avant de commencer son travail, connaissance de celui d'Young, et qu'ainsi son œuvre n'était que celle du savant anglais corrigée et perfectionnée. Mais on voit, à la fin du volume de Laplace, que sa théorie devait être achevée quand il a connu celle d'Young. J'oserai même penser que Laplace n'avait pas lu en entier l'*Essay on the cohesion;* car dans le peu de mots qu'il en dit, il semble croire que l'auteur de ce mémoire n'a pas cherché à justifier l'hypothèse d'une tension uniforme de la surface, et nous avons rapporté le passage où se trouvent les considérations émises dans ce but; il me paraît que si Laplace les eût alors connus, il eût au moins consacré quelques lignes à la réfutation de principes directement contraires aux siens. Loin de moi donc l'intention d'ôter à Laplace la moindre partie de l'honneur que lui a valu sa belle théorie; mais je crois juste d'accorder à Young le mérite d'avoir précédé l'illustre géomètre, et d'avoir publié la première théorie une et générale de la capillarité.

La théorie de Laplace a été popularisée en France, par M. Biot[1] et par tous les auteurs remarquables qui l'ont suivi; en Allemagne, par Brandes[2], Gries[3], etc.; en Italie, par Pessuti[4]. Aussi est-elle généralement connue. Néanmoins, il est indispensable d'en rapporter ici les principes fondamentaux.

L'action capillaire n'est sensible qu'à des distances imperceptibles. Une masse fluide, terminée par une surface courbe, exerce sur un canal intérieur infiniment étroit et normal à cette surface, une action en vertu de laquelle

[1] Biot, *Traité de Physique*, t. I.
[2] *Gilb. Annal.*, XXXIII.
[3] *Gehlen Journ.*, IX.
[4] *Atti della Societa Italiana*, XIV.

le liquide contenu dans le canal exercera à son tour une certaine pression sur une base plane située dans l'intérieur de ce canal, perpendiculairement à ses côtés, à une distance quelconque sensible de la surface, cette base étant prise pour unité. Cette action, que l'on pourra déterminer en partant du principe précédent, sera plus petite ou plus grande, selon que la surface sera concave ou convexe, que si elle était plane. On verra que son expression analytique est composée de deux termes : le premier, beaucoup plus grand que l'autre, exprime l'action de la masse terminée par une surface plane; c'est à ce terme que sont dus la suspension du mercure dans un tube de baromètre à une hauteur deux ou trois fois plus grande que celle qui est due à l'atmosphère, le pouvoir réfringent, la cohésion et les affinités chimiques; le second terme exprime l'action du ménisque compris entre la surface courbe et le plan tangent au point qui sert de base au canal. C'est à ce terme, dépendant de la courbure de la surface, qu'est due l'action capillaire. C'est ainsi, par exemple, que l'on peut expliquer l'élévation d'un fluide dans un tube capillaire, en concevant par l'axe du tube un canal infiniment étroit qui, se recourbant un peu au-dessous du tube, irait aboutir à la surface plane et horizontale du liquide dans le vase. L'action du fluide du tube dans ce canal sera moindre, à cause de la concavité de sa surface, que l'action du liquide du vase sur le même canal. Le fluide devra donc s'élever dans le tube pour compenser cette différence.

On voit par cette relation à peu près textuelle des idées de Laplace, que, une fois qu'on a déterminé l'action du ménisque correspondant à un point quelconque de la surface, c'est-à-dire l'action du volume compris entre le plan tangent en un point quelconque et la surface sur un canal normal en ce point à celle-ci, cette action se traduisant en une pression, on pourra appliquer à la solution du problème les principes ordinaires de l'hydrostatique, et en particulier celui de l'équilibre d'un canal recourbé soumis à la pesanteur et à certaines pressions sur ses surfaces libres.

Pour déterminer l'action du ménisque, Laplace considère d'abord l'action d'une sphère sur un canal perpendiculaire à sa surface. En faisant, dans la valeur de cette action, le rayon de la sphère infini, on a l'action d'un corps terminé par un plan. En retranchant de cette action celle de la sphère, on

aura évidemment l'action de la masse comprise entre le plan et la sphère, c'est-à-dire l'action d'un ménisque terminé par une surface sphérique. On doit observer, d'ailleurs, qu'il n'y aura qu'une très-petite partie de ce ménisque qui agira : ce sera celle qui est comprise dans la sphère d'activité de l'attraction tout autour de la base infiniment petite du canal.

Pour obtenir l'expression analytique de ces différentes actions, Laplace admet que l'attraction de deux éléments de masse *dm*, *dm'* situés à une distance *f* est égale à

$$dm\ dm'\ \varphi(f),$$

$\varphi(f)$ étant une fonction qui décroît très-rapidement quand $f$ augmente, pour devenir tout à fait insensible à une distance finie.

Si, en partant de ce principe, on calcule l'action d'une sphère sur un filet extérieur qui lui est normal, on trouve qu'en faisant :

$$\int_o^f \varphi(f)\,df = -\Pi(f) + c,$$

$$\int_o^f \Pi(f)\,fdf = -\Psi(f) + c'.$$

$$K = 2\pi\int_o^\infty dz\ \Psi(z),$$

et

$$H = 2\pi\int_o^\infty zdz\ \Psi(z).$$

Cette action doit être

$$K - \frac{H}{b},$$

$b$ étant le rayon de la sphère. Les intégrales K et H devraient être prises depuis $o$ jusqu'à ce rayon, mais, à cause de la nature de la fonction $\Psi(z)$, il est indifférent de les prendre entre ces limites ou entre $o$ et l'$\infty$. L'intégrale H est très-petite par rapport à K, parce que dans le produit $z\,\Psi(z)$ une des quantités est toujours très-petite.

$K - \frac{H}{b}$ est aussi bien l'action du segment sphérique sensible sur lequel

repose le filet, que l'action de la sphère entière, puisque au delà de ce segment l'action est nulle.

K est l'action d'un corps terminé par un plan, auquel cas on a $b = \infty$. $\frac{H}{b}$ sera donc l'action du volume compris entre un segment sphérique et son plan tangent, c'est-à-dire du ménisque.

L'action d'une sphère sur un filet intérieur sera de même

$$K + \frac{H}{b}.$$

L'action d'un corps terminé par une surface quelconque sur un canal perpendiculaire à cette surface, se détermine en substituant à celle-ci son ellipsoïde osculateur; on trouve qu'elle doit être

$$K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B'}\right),$$

B, B′ étant les rayons de courbure de deux sections faites à angle droit dans la surface, au point où le canal lui est perpendiculaire; on devra prendre le signe + ou le signe —, selon que la surface sera concave ou convexe vers le canal.

C'est à l'aide du résultat précédent et du principe de l'équilibre d'un canal curviligne aboutissant par ses extrémités à deux points de la surface, que Laplace résout tous les problèmes de sa première théorie. En effet, on conçoit que l'équation générale d'une surface liquide sera

$$K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + gz = K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B'}\right),$$

R, R′ et B, B′ étant les rayons de courbure en deux points quelconques de cette surface, et $z$ la hauteur verticale du premier de ces points au-dessus du second.

Cette équation est aux différentielles partielles du second ordre, et son intégrale renfermera deux fonctions arbitraires qui se détermineront par

l'équation du corps solide en contact avec le liquide, et par l'inclinaison des plans extrêmes de la surface du fluide. Nous avons vu que Young pose en fait la constance de cet angle, pour un même liquide et un même solide. Laplace donne de cette constance une sorte de démonstration relative au cas particulier des tubes capillaires. Voici cette démonstration : « La distance à laquelle cesse l'action du tube étant imperceptible, la surface du tube peut être considérée comme plane, à très-peu près, dans un rayon égal à celui de sa sphère d'activité sensible : le fluide, dans cet intervalle, s'abaissera donc ou s'élèvera depuis cette surface, à très-peu près, comme si elle était plane. Au delà ce fluide n'étant plus soumis sensiblement qu'à la pesanteur et à son action sur lui-même, sa surface sera à peu près celle d'un segment sphérique, dont les plans extrêmes, étant ceux de la surface fluide aux limites de la sphère d'activité sensible du tube, seront, à très-peu près, dans les divers tubes, également inclinés à leurs parois. » —J'ai reproduit cette démonstration mot à mot, parce que j'aurai à l'invoquer plus tard. Elle a paru généralement peu satisfaisante, et nous verrons en effet qu'un raisonnement semblable, appliqué à une question analogue, peut conduire à des résultats absolument contraires à la vérité.

Il est un grand nombre de cas où l'équation générale de la surface capillaire peut se réduire à une équation aux différences ordinaires et être intégrée à l'aide de séries convergentes. C'est ainsi que Laplace obtient des résultats nombreux concernant soit l'élévation, soit la dépression dans un tube cylindrique à section circulaire, dans un tube à section annulaire, entre deux plans parallèles, contre un plan vertical; l'équilibre d'une goutte dans un tube conique incliné, ou entre deux plans inclinés sur l'horizon et faisant entre eux un petit angle, les attractions et répulsions apparentes des corps flottants.

Laplace examine ensuite quelle est la cause qui produit la forme concave ou convexe de la surface du liquide, dont dépendent, comme on vient de le voir, les phénomènes capillaires. Il la trouve dans l'attraction réciproque du tube et du liquide, comparée à l'action du fluide sur lui-même, et il admet, comme Clairaut, que ces deux attractions suivent la même loi, de sorte qu'à une même distance elles ne diffèrent que par leurs intensités.

En analysant les actions de ces forces, Laplace arrive au résultat déjà démontré par Clairaut et par Young, savoir, que la surface d'un liquide dans un tube est concave, plane ou convexe, selon que l'intensité de l'attraction du tube est supérieure, égale ou inférieure à la moitié de celle du liquide. Laplace montre en outre que, dans le cas où ces deux attractions sont égales, le fluide forme une demi-sphère concave, et il conjecture que ce cas est celui d'un tube mouillé par un liquide. Il trouve aussi que si l'attraction du tube est nulle, la surface du liquide est une demi-sphère convexe.

Laplace termine la première partie de sa théorie par la comparaison de ses résultats avec quelques expériences. Nous aurons dans la suite de ce travail l'occasion de connaître ces résultats et ces expériences, et nous serons mieux à même alors de juger de la valeur de leur accord.

Le supplément de la théorie de l'action capillaire contient une vérification analytique de l'équation de la surface capillaire, et une seconde explication de l'élévation ou de la dépression des liquides dans les tubes capillaires. Les premières pages de ce supplément, le chapitre *Sur l'équation fondamentale de la théorie de l'action capillaire,* sont, selon moi, la plus belle partie de l'œuvre de Laplace. C'est cependaut la partie la moins généralement connue, probablement à cause de la plus grande difficulté de son analyse. Au lieu de se fonder sur le principe de l'équilibre d'un canal fluide intérieur, Laplace part de ce principe, également connu, que la résultante des forces tangentielles à la surface d'un liquide en équilibre doit être nulle. Les forces seront, d'une part, la pesanteur décomposée suivant la surface, de l'autre, l'action du volume liquide compris entre la surface capillaire et son ellipsoïde osculateur, volume qui, étant du troisième ordre, avait pu être négligé à côté du ménisque, dont le volume était du second ordre. Il est clair d'ailleurs que l'action du volume compris entre l'ellipsoïde osculateur et son plan tangent, ne pourra pas donner de forces tangentielles. En calculant ces forces, Laplace trouve que l'équation d'équilibre entre elles et la composante tangentielle de la pesanteur, est exactement la différentielle de l'équation de la surface capillaire, ce qui devait être.

Cette analyse fort élégante est suivie d'une admirable intégration, au moyen de laquelle Laplace obtient l'expression rigoureuse du volume liquide sou-

levé ou déprimé dans un tube cylindrique. Cette expression fort simple est

$$V = \frac{H}{2gD} c \cos \pi,$$

dans laquelle H est l'intégrale définie rapportée précédemment, $g$ la gravité, D la densité du fluide, $c$ le contour du tube et $\pi$ l'angle sous lequel la surface du liquide coupe celle du tube.

La seconde théorie de Laplace n'est guère qu'un mélange de celles de Clairaut et de Jurin. L'analyse des forces qui déterminent l'élévation ou la dépression dans un tube capillaire est identique à celle de Clairaut, l'évaluation seule de ces forces en est différente : cette évaluation n'est qu'une application de cette idée de Jurin, que l'anneau de verre, supérieur à la colonne liquide, est la seule partie du tube qui agisse sur cette colonne.

Laplace considère dans cette seconde partie un grand nombre de phénomènes, savoir : l'élévation ou la dépression d'un liquide, ou de plusieurs liquides superposés, dans des tubes prismatiques de différentes formes et de différentes matières, verticaux ou inclinés, ou entre des plans parallèles également de différentes natures, la suspension d'une colonne fluide dans un tube, la perte ou l'augmentation de poids d'un corps plongé en partie dans un fluide qu'il élève ou qu'il déprime autour de sa surface, enfin l'élévation capillaire d'un fluide à différentes températures.

Le point le plus important de cette seconde théorie, est la relation de l'intensité de l'attraction du solide à celle du liquide. Laplace trouve que ce rapport est égal à $\cos^2 \frac{\omega}{2}$, $\omega$ étant toujours l'angle du solide ou du fluide. Nous avons vu que Young trouvait pour ce rapport la moitié du sinus verse ou $\frac{1 - \cos \omega}{2}$, mais il faut observer que Young prend cet angle $\omega$ dans le sens contraire à celui où Laplace le prend; c'est ainsi qu'il assigne à cet angle, pour le mercure, la valeur 140°. Il faut donc considérer l'angle $\omega$ de Young comme le supplément de celui de Laplace; alors les résultats de ces deux savants sont les mêmes, et nous devons reconnaitre que Young y est arrivé beaucoup plus simplement, et non par la comparaison de deux théories.

Laplace complète son étude de l'action capillaire par l'examen de quelques problèmes, qu'il résout à l'aide des principes de sa première théorie.

C'est ainsi qu'il soumet à une analyse plus étendue qu'il ne l'avait fait d'abord le phénomène de répulsion apparente de deux plans de nature différentes, plongés dans un liquide qui est élevé par un de ces plans et déprimé par l'autre; puis il calcule la force avec laquelle un disque adhère à une surface liquide, et enfin il détermine la figure d'une large goutte de mercure et la dépression de ce fluide dans un tube de verre d'un grand diamètre.

Dans les considérations générales qui terminent le quatrième volume de la *Mécanique céleste*, l'illustre auteur de cet admirable livre s'efforce d'établir la certitude du principe de l'insensibilité de l'attraction moléculaire à une distance sensible, tout en rejetant le principe plus absolu d'une attraction n'ayant lieu qu'au contact, qu'il considère comme incompatible avec certains phénomènes chimiques, tels que le partage d'une même base entre deux acides. Il rejette aussi les anciennes explications, fondées sur l'adhésion des liquides aux solides, et sur la viscosité; elles ne peuvent être que des causes perturbatrices et non des causes efficientes des phénomènes capillaires, et il signale, comme autres causes perturbatrices, le frottement et l'adhérence de l'air à la surface des corps.

Cherchant ensuite quelle peut être l'action de l'eau sur elle-même, d'après l'action qu'elle exerce sur la lumière, il trouve pour cette dernière une valeur tellement prodigieuse, qu'il n'ose en attribuer une semblable à la première. Toutefois, il admet que l'action de l'eau sur elle-même est extrêmement grande, et qu'il en résulte une très-forte compression dans les couches d'un liquide; cette compression croît rapidement à partir de la surface où elle est nulle, pour devenir constante dans l'intérieur de la masse liquide à une distance sensible de la surface.

Laplace reconnaît que cette forte compression peut faire varier sensiblement la densité des couches d'un liquide, très-près de sa surface, et que cette variation peut exercer une influence sensible sur les phénomènes capillaires. Il n'en est pas de même, affirme-t-il ensuite, de la pression atmosphérique et de la force répulsive de la chaleur, qui, étant les mêmes sur toute la surface du fluide, sont indépendantes de la courbure. La chaleur ne peut influer qu'en modifiant la densité, et la théorie mesure cette influence.

Laplace termine en signalant les imperfections que renferment, selon lui,

les théories de Jurin, de Clairaut, de Segner et de Th. Young. Il reproche seulement à ce dernier de n'avoir pas établi ses hypothèses sur le principe d'une attraction insensible à des distances sensibles, et décroissant rapidement avec les distances.

Plus tard, dans la *Connaissance des temps* de 1812, l'illustre géomètre publia un petit article sur les dépressions du mercure dans les tubes barométriques, et il y donna une table des dépressions correspondantes à différents diamètres. Nous examinerons plus tard les résultats auxquels Laplace est parvenu, et les principes sur lesquels ils reposent.

En 1813, M. Petit inséra dans le *Journal de l'École polytechnique* (16e cahier, t. IX) un mémoire sur la théorie de l'action capillaire. Il y assimile, comme Laplace l'avait déjà fait, la fonction $\varphi(f)$ qui représente l'attraction moléculaire à la distance $f$, à une exponentielle négative de la forme $Ae^{-if}$, dans laquelle A est un coefficient indépendant de $f$, $e$ la base des logarithmes népériens et $i$ un très-grand nombre positif. Il admet ensuite comme évident, que si l'on fait successivement

$$\int_o^f \varphi(f)\,df = H_1 - \varphi_1(f),$$
$$\int_o^f \varphi_1(f)\,df = H_2 - \varphi_2(f),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et si l'on suppose la fonction $\varphi(f)$ rapidement décroissante, les fonctions $\varphi_1(f)$, $\varphi_2(f)$,.... jouiront de la même propriété, et auront une valeur finie pour $f=o$. En partant de là, il démontre que les constantes $H_1$, $H_2$..... sont du même ordre que les intégrales

$$\int f df\, \varphi(f), \quad \int f^2 df\, \varphi(f)\ldots\ldots,$$

et que ces différentes intégrales sont toutes successivement négligeables les unes par rapport aux autres. Ces principes sont fort importants pour la théorie des phénomènes capillaires; mais nous montrerons plus loin qu'ils ne sont nullement généraux, et que, dans certains cas, ils sont absolument faux.

Le reste du mémoire de Petit n'est qu'une répétition, sous une forme très-

peu différente, de la théorie de Laplace. Toutefois, on doit reconnaître à ce travail le mérite d'une exposition claire et bien ordonnée.

Quelque admiration que doive inspirer le talent avec lequel Laplace a su, en partant d'un même principe, résoudre complétement des questions en apparence très-différentes, on doit reconnaître que sa théorie est toute à la fois moins élégante, moins générale et moins complète que celle de M. Gauss [1]. En effet, l'analyse de cet illustre géomètre s'attaque directement à ce vaste problème : Déterminer l'équilibre d'une masse fluide en contact avec un corps solide; pour le résoudre, elle n'a besoin que d'un principe mathématique, celui des vitesses virtuelles, et d'un principe hypothétique, celui de l'insensibilité de l'attraction moléculaire à une distance sensible.

Nous passerons, pour y revenir bientôt, sur les quelques objections que M. Gauss présente d'abord contre la théorie de Laplace. Nous ne faisons en ce moment que l'histoire des théories, nous réservant de les comparer ensuite et de signaler les imperfections qu'elles nous paraissent renfermer, et que nous reconnaîtrons plus facilement après un examen général.

Voici un résumé très-succinct de la théorie de M. Gauss.

L'équilibre d'un liquide en contact avec un solide, a lieu sous l'influence de trois espèces de forces : la pesanteur, les attractions des molécules liquides entre elles, et les attractions réciproques des molécules solides et des molécules liquides.

Soient $m, m'$ deux molécules liquides, M une molécule solide, et soient :

$$mm'\, f(\overline{m,m'})$$

l'attraction des deux molécules $m, m'$, et

$$m\mathrm{M}\mathrm{F}\;(\overline{m,\mathrm{M}})$$

celle des deux molécules $m$, M, en supposant, pour plus de généralité, les fonctions d'attraction différentes : $m, m'$ et $m$, M désignent les distances des molécules.

[1] *Comment. Soc. Gottingensis*, VII, 1828-32. — *Principia generalis theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii.* C.-F. Gauss.

En appelant $d\,(m, m')$ et $d\,(m, \mathrm{M})$ les déplacements virtuels projetés dans les directions de ces forces, et $dz$ le déplacement virtuel dans le sens de la pesanteur $g$, on aura pour le moment virtuel du point M :

$$- m\Sigma m' f(m, m')\, d\,(m, m') - m\Sigma \mathrm{MF}\,(m, \mathrm{M})\, d\,(m, \mathrm{M}) - gdz,$$

et l'équilibre du système exigera que l'on ait

$$\Sigma m\, [- gdz - \Sigma m' f(m, m')\, d\,(m, m') - \Sigma \mathrm{MF}\,(m, \mathrm{M})\, d\,(m, \mathrm{M})] = o.$$

Cela posé, si l'on fait

$$\varphi\,(x) = \int_1^\infty f(x)\, dx, \quad \text{et} \quad \Phi\,(x) = \int_1^\infty \mathrm{F}\,(x)\, dx),$$

l'expression précédente sera la différentielle totale de la suivante :

$$\Sigma m\, [- gz + \tfrac{1}{2} \Sigma m' \varphi\,(m, m') + \Sigma \mathrm{M} \Phi\,(m, \mathrm{M})].$$

En effet, bien que la différentielle $d\,(m, m')$ dans l'expression $mm' f\,(m, m')$ $d\,(m, m')$ soit seulement partielle par rapport au mouvement virtuel de $m$, la sommation $\Sigma$ apportera avec le terme $m'm\, f(m', m)\, d\,(m', m)$ la différentielle partielle complément de la précédente.

En représentant l'expression précédente par $\Omega$, on voit que l'équation d'équilibre se réduit à $d\Omega = o$.

La condition d'équilibre est donc que la quantité $\Omega$ soit un *maximum*.

Le facteur $\frac{1}{2}$ qui affecte le second terme de cette expression provient de ce qu'en donnant les termes : $mm'\ f\,(m, m')\, d\,(m, m')$ comme si $d\,(m, m')$ était une différentielle totale, nous sommons en réalité deux fois le même terme.

Si, au lieu de points détachés $m, m', \mathrm{M}$, on a des éléments $ds$, $ds'$ et $d\mathrm{S}$ de deux corps de densités uniformes $c$, C, remplissant des espaces continus $s$ et S, les sommes précédentes deviendront des intégrales, et l'on aura

$$\Omega = - gc \int z ds + \frac{c^2}{2} \int ds \int ds'\, \varphi\,(\overline{ds, ds'}) + c\mathrm{C} \int ds \int d\mathrm{S}\ \ \Phi(\overline{ds, d\mathrm{S}}).$$

Dans cette formule, $z$ est la hauteur de l'élément $ds$ au-dessus d'un plan horizontal quelconque.

Les deux intégrales précédentes sont des intégrales sextuples. M. Gauss, en considérant les éléments $ds'$, $dS$ comme des éléments de pyramides ayant leurs sommets en $ds$, parvient à ramener l'expression précédente à celle-ci :

$$\begin{aligned}\Omega = -gc\int z ds + \frac{c^2}{2} s\psi(o) - \frac{\pi c^2}{2} t\theta(o) + \pi c\,\mathrm{CT}\Theta(o) \\ + \frac{c^2}{2}\iint \frac{dt\,dt' \cos q \cos q'\, \theta(\overline{dt, dt'})}{(dt, dt')^2} \\ + c\mathrm{C}\iint \frac{dt\,d\mathrm{T} \cos q \cos \mathrm{Q}\,\Theta(\overline{dt, d\mathrm{T}})}{(dt, d\mathrm{T})^2}.\end{aligned}$$

Dans cette équation, $s$ représente le volume entier du liquide, $t$ sa surface, $dt$, $dt'$ deux éléments de cette surface, $q$ et $q'$ les angles que font les normales à ces éléments avec leur distance $\overline{dt, dt'}$, T la surface du liquide en contact avec le solide, $d\mathrm{T}$ un élément de cette surface et $q$, Q les angles des normales aux éléments $dt$, $d\mathrm{T}$ avec la ligne $\overline{dt, d\mathrm{T}}$ qui les joint. Enfin $\psi$, $\theta$, $\Theta$, sont des fonctions ainsi définies.

$$\psi(x) = -\int_x^\infty x^2 \varphi(x)\,dx,$$

$$\theta(x) = -\int_x^\infty \psi(x)\,dx,$$

$$\Theta(x) = -\int_x^\infty \Psi(x)\,dx = \int_x^\infty dx \int_x^\infty x^2 \Phi(x)\,dx.$$

Les deux dernières intégrales de la valeur de $\Omega$ sont des intégrales quadruples qu'il resterait à déterminer. Mais on peut reconnaître qu'elles sont généralement négligeables. Il suffit en effet d'observer que l'on a

$$\frac{dt' \cos q'}{(dt, dt')^2} = d\Pi,$$

$d\Pi$ étant l'élément de surface sphérique de rayon 1, compris dans les pyra-

mides dont la base est $dt'$ et le sommet $dt$; il résulte de là que la première des deux intégrales quadruples précédentes se réduit à

$$\int dt \int d\Pi \cos q\theta(\overline{dt, dt'});$$

on peut reconnaître que tous les éléments de cette intégrale seront très-petits, si l'on admet que la fonction $\theta(x)$ n'a pas de valeur sensible dès que $x$ est une quantité appréciable. En effet, si l'on suppose alors la distance $\overline{dt, dt'}$ sensible, le facteur $\theta(\overline{dt, dt'})$ sera très-petit; si au contraire on suppose cette distance insensible, on voit que sa direction sera à peu près tangente à la surface, de sorte que l'angle $q$ étant très-voisin d'un angle droit, $\cos q$ sera très-voisin de 0. Le même raisonnement s'applique à la seconde intégrale quadruple.

Mais nous devons remarquer avec M. Gauss que ces considérations se trouvent en défaut dans le cas où la surface du liquide offre certains points singuliers, ou lorsque le liquide forme en certains points une couche d'épaisseur insensible; on conçoit que, dans ces cas, l'angle $q$ peut être fort différent d'un angle droit, sans que la distance des éléments $dt$, $dt'$ soit sensible.

En écartant pour un moment ces cas d'exception, on voit que nous pouvons prendre

$$\Omega = -gc\int zds + \frac{c^2}{2}s\psi(o) - \frac{\pi c^2}{2}t\theta(o) + \pi c \mathrm{CT}\Theta(o),$$

pour la quantité qui devra être un *maximum;* si nous observons que, dans tous les changements que l'on peut faire subir à la figure du fluide, le volume reste le même, nous pourrons supprimer le terme $\frac{c^2}{2}s\psi(o)$ dont la variation sera toujours nulle; cela fait, en divisant par $gc$ et changeant les signes, nous aurons une expression

$$\mathrm{W} = \int zds + \frac{\pi c}{2g}t\theta(o) - \frac{\pi c}{g}\mathrm{CT}\Theta(o),$$

qui devra être un *minimum* dans l'état d'équilibre.

M. Gauss montre que les quantités $\frac{c\theta(o)}{2g}$, $\frac{c\Theta(o)}{2g}$ sont des aires, de sorte

qu'il peut poser

$$\frac{\pi c\, \theta(o)}{2g} = \alpha^2, \quad \frac{\pi C \Theta(o)}{2g} = \beta^2,$$

$\alpha$, $\beta$ étant des lignes dépendantes de la nature des corps. Enfin, appelant U la surface libre du liquide, on a $t = T + U$ et l'expression précédante devient :

$$W = \int z ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\, T + \alpha^2\, U.$$

On fera varier cette expression en donnant au liquide des mouvements infiniment petits, et l'on égalera à 0 la variation résultante $\delta W$.

Le premier résultat que M. Gauss déduit de cette manière est la loi qui établit l'élévation ou la dépression dans un tube en raison inverse du diamètre, ou plutôt en proportion directe du contour et en raison inverse de l'aire de la section intérieure du tube; seulement, il faut entendre par élévation ou dépression les hauteurs qui, multipliées par la section du tube, donnent le volume soulevé ou le volume déprimé.

Puis à l'aide d'une analyse très-savante, M. Gauss obtient l'équation de la surface capillaire donnée par Laplace et par Young; de plus il démontre mathématiquement la constance de l'angle du liquide et du solide, qui n'avait été qu'énoncée par Young et soumise à un faible essai de démonstration par Laplace. M. Gauss trouve que cet angle est donné par les formules.

$$\cos A = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{ou} \quad \sin \tfrac{1}{2} A = \frac{\beta}{\alpha}.$$

C'est le résultat donné par Young, et déduit par Laplace de la comparaison de ses deux théories.

L'inspection seule de la quantité $\frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\alpha^2}$ qui entre dans toutes les formules de M. Gauss conduit au théorème de Clairaut, il suffit de donner à $\alpha^2$, $\beta^2$ différentes valeurs relatives. L'illustre géomètre de Göttingue s'attache particulièrement au cas où l'on a $\beta^2 > \alpha^2$; il montre que c'est précisément celui où il se forme le long des parois des corps solides une couche liquide d'épaisseur insensible; c'est donc un de ceux que nous avons écartés d'abord. En y appliquant l'analyse, on reconnaît que l'équilibre est le même que dans

le cas où $\beta^2 = \alpha^2$, parce qu'alors la couche liquide remplace le corps solide. C'est ce que Laplace avait conjecturé.

M. Gauss termine son admirable mémoire par quelques considérations générales; il y indique, entre autres choses, la différence qui peut exister dans l'état de *repos* et l'état d'*équilibre*. Le premier correspondrait à une valeur de l'angle A différente de celle que la théorie assigne, et qui résulte de quelque cause de résistance.

La théorie de M. Gauss a été l'objet de deux travaux remarquables, l'un de M. Pagani, inséré dans le Journal de M. Crelle, travail purement analytique, et dans lequel le problème est traité, comme dans le mémoire de M. Gauss, à l'aide du calcul des variations, mais par des méthodes différentes; l'autre, de M. Bertrand, publié dans le Journal de M. Liouville, t. XIII, 1848. Ce dernier travail a pour but de simplifier cette belle théorie, et il est difficile, en effet, de la réduire à une expression plus simple que celle que M. Bertrand a su lui donner au moyen de considérations géométriques et mécaniques extrêmement ingénieuses. Ce travail contient en outre quelques résultats nouveaux, dont nous aurons l'occasion de parler dans la seconde partie de ce mémoire.

Poisson publia sa grande théorie de l'action capillaire [1] un an après l'apparition du mémoire de M. Gauss. Il avait déjà abordé la question de la capillarité dans son beau mémoire *Sur l'équilibre des fluides*, inséré dans les *Mémoires de l'Institut*, t. IX, 1830. Dans ce travail, il émettait cette opinion grave que, dans la seule hypothèse de Laplace, qui attribue les phénomènes capillaires à la courbure de la surface, ces phénomènes étaient impossibles. Il faudrait en outre, pour les expliquer, considérer la variation rapide de la densité près de la surface, variation que Laplace, ainsi que nous l'avons dit, avait signalée en admettant qu'elle pût, en certains cas, modifier les phénomènes. Mais il y avait loin de cette conjecture de Laplace à l'affirmation absolue de Poisson. Aussi, dans sa *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, ce grand géomètre, sentant toute la gravité de son assertion, cherche-t-il à la justifier de nouveau. Il observe que Laplace n'a pas tenu compte, dans sa

[1] Poisson. *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, 1831.

théorie, de l'action répulsive de la chaleur; nous avons vu, en effet, que dans la *Mécanique céleste* l'illustre auteur se borne à dire que l'action de la chaleur étant uniforme sur toute la surface du liquide ne peut, pas plus que la pression atmosphérique, modifier l'équilibre. Plus tard, dans une note insérée dans le *Bulletin de la Société Philomatique* de 1819, il corrige un peu sa première opinion, en indiquant que l'on devra considérer la fonction de l'attraction qui entre dans son analyse, comme la différence de l'attraction et de la répulsion; mais le caractère de cette fonction restant le même, les conséquences de la théorie subsistent. Poisson n'admet pas qu'il en soit ainsi, et il cherche à prouver que, du moment où l'on fait abstraction de la variation de densité dont nous avons parlé, la quantité K de l'analyse de Laplace, qui exprime l'action d'un fluide terminé par un plan sur un filet perpendiculaire à sa surface, est une quantité négative, loin d'être une quantité positive extrêmement considérable comme Laplace le veut. A cet effet, considérant un filet $OO_1$ (*fig.* 2) normal à la surface du liquide, il montre que les forces qui agissent sur ce filet sont la pression

$$\mu = -\frac{\Pi}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right),$$

due à la courbure au point O, où $\lambda$, $\lambda'$ expriment les deux rayons de courbure, plus la pression de l'air $\Pi$, plus l'action de la pesanteur, c'est-à-dire le poids du filet décomposé suivant la verticale ou $g\rho\alpha$ ($\rho$ étant la densité et $\alpha$ la différence de niveau des points O, $O_1$), plus enfin l'action du liquide inférieur terminé par le plan C, O, D, perpendiculaire au filet, action qui, d'après la définition même de K, sera égale à cette quantité. Il est clair d'ailleurs que, dans l'hypothèse d'une densité constante, le liquide compris entre le plan $C_1O_1D_1$ et le plan tangent COD, n'exercera aucune action. La somme des forces précédentes devant, pour l'équilibre, être nulle, on a :

$$K + \mu + g\rho\alpha + \Pi = o,$$

d'où l'on tire :

$$K = -\Pi - g\rho\alpha + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right).$$

Si la surface est plane, on aura simplement

$$K = -\Pi - g\rho x \quad \text{et à la surface} \quad K = -\Pi.$$

On voit donc bien que K sera une quantité négative; mais ce raisonnement, si même on le suppose fondé, ne faisait que relever une inexactitude dans les assertions de Laplace, sans détruire en rien sa théorie, attendu que cette quantité K s'éliminant dans les équations d'équilibre, peu importe sa nature. Mais Poisson va plus loin, et cherche à prouver que, dans l'hypothèse d'une densité constante, la quantité H des formules précédentes et de celles de Laplace doit être nulle. Pour cela, au lieu de considérer un filet cylindrique normal à la surface, il considère un filet à section variable, dont la section va en augmentant vers l'intérieur de la masse liquide. En appelant $s$ la distance OM (*fig.* 3), à la surface de l'élément O et $\omega'$ celle de la section du filet en M, on pourra prendre $\omega' = \omega(1 + ks)$, et concevoir le filet $OO_1$ comme partagé en deux, l'un cylindrique de base $\omega$, l'autre ayant une section variable exprimée par $\omega ks$. L'équilibre de la première partie aura lieu sous l'influence des forces que nous avons examinées tout à l'heure; l'équilibre de la seconde partie sera dû à des forces toutes semblables; seulement, deux de ces forces seront négligeables par rapport aux précédentes : ce sont l'action du ménisque et la pesanteur. Les seules forces qui resteront à considérer seront l'action sur $OO_1$ de la portion de liquide comprise entre les deux plans COD, $C_1O_1D$, et celle qui est au-dessous de ce dernier plan. En représentant ces actions par $V\omega k$ et $U\omega k$, l'équation d'équilibre sera :

$$K + \mu + g\rho x + \Pi + VK + UK = o.$$

qui, à cause de celle que nous avons posée, se réduit à

$$U + V = o.$$

Cela posé, au moyen de remarquables intégrations Poisson trouve

$$U = lK - H,$$
$$V = 2H - LK,$$

$l$ étant la longueur du filet $OO_1$. On aura par suite

$$H = o,$$

ce que Poisson voulait démontrer.

Non content de ce résultat, Poisson montre encore qu'il faut avoir égard à la compression que le liquide subit près de la paroi du tube, à cause de l'attraction de celui-ci. Appelant $\Delta$ le poids de liquide soulevé ou déprimé, $c$ le contour du tube, et $q, q'$ deux constantes relatives à la nature du liquide et à celle du tube, il établit dans l'hypothèse d'une densité constante, la formule posée par Laplace :

$$\Delta = (2q' - q)\, c.$$

Pour faire voir ensuite l'inexactitude du coefficient de $c$, il partage le liquide en plusieurs parties, au moyen d'un plan horizontal GH (*fig.* 4) mené à une distance sensible au-dessous de la surface AOB, et d'une surface cylindrique parallèle à la surface intérieure du tube, et distante de celle-ci d'une longueur KL insensible, mais plus grande cependant que le rayon d'activité des molécules du tube sur celles du liquide. Il désigne par C, C′ les parties du liquide comprises entre cette surface et la paroi, et par D, D′ celles qui sont dans l'intérieur de cette surface, puis il appelle Q, Q′, P, les actions verticales exercées sur C par D, D′, C′. En négligeant, à cause de l'insensibilité de l'épaisseur KL, le poids de C, et la pression exercée sur sa surface supérieure par l'atmosphère, on a pour l'équilibre de cette partie l'équation :

$$Q + Q' + P = o.$$

Observant que l'attraction du tube n'agit pas sur D, et que par suite le poids de cette partie, qui ne diffère de $\Delta$ que d'une quantité insensible, n'est soutenu que par l'action de C sur D égale à l'action réciproque Q de D sur C, Poisson admet

$$Q = \Delta.$$

L'action mutuelle de C et de D′ étant analogue à celle qu'exerce un tube

sur une colonne liquide placée dans son intérieur, on aura, en confondant le contour intérieur de $c$ avec le contour du tube :

$$Q' = cq.$$

Enfin, en intégrant l'expression de l'attraction de deux éléments des parties $c$, $c'$, on trouve,

$$P = 2cq.$$

Ces valeurs rassemblées donnent :

$$\Delta = cq.$$

Valeur qui ne peut s'accorder avec la précédente de $\Delta$, que dans le cas où $q = q'$, c'est-à-dire où le tube est de la même matière que le liquide; et dans ce cas, en effet, le liquide n'éprouve pas de compression près du tube.

Poisson ayant ainsi démontré, selon lui, la nécessité d'avoir égard aux variations de densité du liquide près de sa surface libre et de la surface du tube, ne pouvait plus considérer l'attraction de deux éléments de volume comme une fonction seulement des masses et de la distance; il fallait en outre introduire dans cette fonction les coordonnées des centres de masse de ces éléments.

Nous ne suivrons pas Poisson dans la longue et savante analyse qu'il a basée sur ce principe. Constatons seulement qu'il est arrivé à des résultats à peu près identiques à ceux de Laplace et de Gauss, et qu'il a su démontrer la constance de l'angle de contact d'un liquide et d'un solide, mais d'une manière bien moins élégante que le dernier de ces deux grands géomètres. Je n'entrerai pas non plus dans le détail de toutes les questions particulières qu'il a traitées; nous aurons dans le cours de ce travail l'occasion de parler de quelques-uns de ses résultats.

Ce qui doit nous intéresser le plus vivement en ce moment, c'est l'examen des deux objections fondamentales contre les théories précédentes, que nous venons de rapporter. C'est pour nous un profond sujet d'étonnement que cette négation absolue de la possibilité de résultats existants, et l'étonnement

redouble, lorsque l'on voit le même géomètre qui vient d'affirmer l'impuissance des principes théoriques d'autres grands géomètres, arriver, par une marche beaucoup plus pénible, aux conséquences mêmes de ces principes. Examinons donc les raisonnements précédents. Je commencerai par le second, dont la réfutation me paraît plus facile.

Après avoir bien réfléchi sur cet argument de Poisson, je dois dire ou que je ne l'ai nullement compris, ou que j'y trouve les plus étranges erreurs. En premier lieu, Poisson ne fait point intervenir dans l'équilibre de la partie C l'action du tube, qui cependant joue l'un des principaux rôles dans cet équilibre. Cette action s'exerçant verticalement, nous devons l'ajouter à la force P; la valeur de l'attraction de la partie T du tube, qui seule agit directement sur C, est $-cq$. On doit donc avoir pour l'équilibre de C

$$Q + Q' + P - cq' = o.$$

En second lieu, la valeur donnée à P, par Poisson, me parait singulièrement inexacte. En effet, au lieu d'intégrer l'action d'un élément de C sur un élément de C′, cet illustre géomètre aurait pu se borner à dire que ces deux parties exercent l'une sur l'autre la même action, de sorte que si C′ tire C vers le bas avec une force P, en revanche C tirant C′ vers le haut avec la même force, il en résulte une pression de C′ sur C qui détruit cette force P. On aurait donc en réalité $P = o$, mais il n'en est pas ainsi; car la partie de C′, située plus bas que le tube, est attirée par lui avec une force dirigée de bas en haut égale à $-cq'$, et cette pression se transmettant à travers la masse, on a en réalité une action de C′ sur C :

$$P = -cq'.$$

Enfin on a, comme Poisson le montre,

$$Q' = cq, \quad Q = \Delta,$$

d'où

$$\Delta = (2q' - q)\, c,$$

ce qui concorde avec le résultat obtenu par une autre méthode.

Si donc je ne m'abuse point, Poisson aurait commis cette double erreur de négliger la condition fondamentale du phénomène, et d'introduire au contraire une force qui s'annihile d'elle-même. Et remarquons ici que, pour rendre notre analyse plus complète, nous devrions voir comment disparaissent d'autres forces que nous n'avons pas prises en considération. Ainsi, pour poser l'égalité $Q = \Delta$, nous avons dit que la seule force équilibrant le poids $\Delta$ de D était l'action de C sur D. Cependant, la partie D′ agit également sur D, et Poisson n'avait pas plus de raisons d'omettre cette action que celle de C′ sur C. Nous dirons encore ici que l'action réciproque de D sur D′ détruit celle de D′ sur D, dans l'équilibre que nous considérons. De même la partie D est encore sollicitée par l'action de C′; mais cette action est détruite par la pression résultant de l'action de C sur D′. On pourrait dire de même que l'action Q de D′ sur C, dont nous avons tenu compte, doit être détruite par l'action égale et contraire de D sur C′. Pour réfuter cette objection, nous sommes forcé de descendre jusqu'au bas du tube, pour reconnaître que l'action de D sur C′ est détruite par l'action de D″ sur C′; mais aussi de même l'action de D′ sur C est détruite par celle de D′ sur C″. Nous trouvons donc vraiment ainsi $Q' = o$. Néanmoins, nous avons considéré cette force parce qu'elle existe réellement; pour la trouver, il faut quitter le système de considérations de Poisson, et retomber dans celui de Laplace; c'est-à-dire chercher cette force Q′ dans l'action de la partie de liquide T, qui se trouve sous le tube sur la colonne entière, ou si l'on veut sur C′, qui n'est nullement équilibrée comme les précédentes. Je le répète, ainsi modifiée, l'investigation de Poisson ne diffère plus essentiellement de celle de Laplace.

L'autre argument de Poisson me paraît plus difficile à réfuter, et je dois me borner à soulever contre lui des objections à mon sens importantes, et qui résultent d'un examen plus complet de la question.

Rappelons-nous d'abord que Poisson avait donné comme condition d'équilibre d'un filet cylindrique infiniment étroit et normal à la surface libre d'un liquide, l'équation suivante :

$$K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) + g\rho\alpha + \Pi = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle K et H sont des constantes dépendant de la nature du liquide, $\lambda$, $\lambda'$ les rayons de courbure de la surface liquide à la base du filet, $g$ la gravité, $\rho$ la densité du liquide, que l'on suppose constante, $\alpha$ la projection verticale de la longueur du filet et $\Pi$ la pression de l'air.

De cette équation, posée en négligeant la variation de densité près de la surface, Poisson déduisait d'abord que K doit être une quantité négative qui, à la surface, est égale à $-\Pi$ quand cette surface est plane.

Poisson considérait ensuite un filet à section verticale $\omega' = \omega\,(1 + ks)$, $\omega$ étant la section à la surface, et $\omega'$ la section à une distance normale $s$ de la surface; $k$ était une constante. Pour poser l'équation d'équilibre de ce filet, le savant géomètre le décomposait en deux parties, l'une cylindrique de section constante $\omega$, l'autre de section variable $k\omega s$. L'équilibre de la première partie avait lieu sous l'influence des forces dont la somme forme le premier membre de l'équation (1). L'équilibre de la seconde partie était déterminé : 1° par la pesanteur; 2° par l'action du ménisque C'C DD'; 3° par l'action du liquide compris entre le plan tangent COD et le plan parallèle $C_1O_1D_1$ situé à une distance insensible du premier; 4° par l'action du liquide situé sous ce plan $C_1O_1D_1$. Poisson néglige les deux premières forces, et représentant les deux dernières par $V\omega k$ et $U\omega k$, pose l'équation :

$$K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) + g\rho\alpha + \Pi + VK + UK = o \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

qui, à cause de (1), se réduit à

$$U + V = o \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

D'ailleurs, en calculant les intégrales représentées par ces deux lettres, on trouve

$$\begin{aligned} U &= lK - H \\ V &= 2H - lK, \end{aligned}$$

et l'égalité (3) se réduit à

$$H = o.$$

Donc, affirme Poisson, dans l'hypothèse d'une densité constante, la quantité H doit être nulle, et les phénomènes capillaires ne peuvent avoir lieu.

Nous irons plus loin, car nous ferons voir qu'en tenant compte des forces que néglige Poisson, on arrive à cette conséquence que la quantité H n'est pas nulle, mais négative comme K, de sorte que les phénomènes capillaires doivent également avoir lieu dans l'hypothèse d'une densité constante; seulement, ils devront être tout à fait contraires à ceux que prévoit Laplace; c'est-à-dire qu'il devra y avoir dépression là où Laplace trouve une élévation et réciproquement.

Pour plus de simplicité, supposons le filet vertical de sorte que $\alpha = l$, et admettons qu'à la base de ce filet, la surface du liquide soit de révolution et que l'on ait ainsi $\lambda = \lambda'$. L'équation (1) deviendra

$$K - \frac{H}{\lambda} + g\rho\alpha + \Pi = o.$$

Complétons l'équation (2) en y introduisant les forces que Poisson a négligées, savoir la pesanteur, dont l'expression sera

$$g\rho \int_o^l k\omega s ds = \frac{g\rho\, k\omega l^2}{2},$$

et l'action du ménisque que nous devrons calculer.

A cet effet, suivant la méthode de Laplace, nous déterminerons l'action d'une sphère sur un filet à section variable $k\omega s$ normal et extérieur à la surface. Soit $dm$ la masse d'un élément de ce filet, situé à une distance $r$ du centre $c$ de la sphère, et à une distance $f$ d'un élément $d$M d'une couche sphérique dont le rayon est $u$ : en appelant $\theta$ l'angle $m$CM et $\bar{\omega}$ l'angle du rayon CM avec un plan fixe passant par C$m$, on aura

$$dM = du\, d\bar{\omega}\, d\theta.\, u^2 \sin \theta,$$

et l'attraction de cet élément sur $dm$, décomposée suivant la distance C$m$, aura pour valeur, $\varphi$ étant la fonction d'attraction :

$$dm\, d\theta\, dr\, d\bar{\omega}\, u^2 \sin \theta \varphi(f) \frac{r - u \cos \theta}{f}.$$

En suivant l'analyse de Laplace, on reconnaît que l'attraction de toute la couche sphérique de rayon $u$ sur l'élément $dm$ est égale à

$$dm \frac{d}{dr}\left[\frac{2\pi u\, du}{r}\left(\Psi(r-u) - \Psi(r+u)\right)\right],$$

$\Psi$ étant donné par les formules :

$$\int df\ \varphi(f) = c' - \Pi(f),$$
$$\int f df\, \Pi(f) = c' - \Psi(f).$$

En admettant, comme Laplace et Poisson, que la fonction $\Psi(f)$ devienne nulle ou insensible, pour une valeur sensible de $f$, nous pourrons négliger $\Psi(r+u)$, $r+u$ étant toujours supérieur au rayon $b$ de la sphère entière, que nous supposons de grandeur sensible. Nous prendrons donc seulement pour l'attraction de la couche de rayon $u$ sur l'élément $dm$, la valeur

$$dm \frac{d}{dr}\left(2\pi u\, du\ \Psi\frac{r-u}{r}\right).$$

Remplaçons $dm$ par sa valeur, qui est

$$k\omega s ds,$$

$s$ étant la distance B$m$. On a $s=r-b$, $ds=dr$, donc

$$dm = k\omega(r-b)\, dr.$$

La valeur de l'attraction de la couche de rayon $u$ sur le filet supposé de longueur indéfinie sera :

$$2\pi u\, du \int_{r=b}^{r=\infty} k\omega(r-b)\, dr \frac{d}{dr}\frac{\Psi(r-u)}{r}.$$

Cette intégrale se décompose en deux autres :

$$2\pi k\omega u du\left(\int_{r=b}^{r=\infty} r dr \frac{d}{dr}\frac{\Psi(r-u)}{r} - b\int_{r=b}^{r=\infty} dr \frac{d}{dr}\frac{\Psi(r-u)}{r}\right),$$

la seconde intégrale se réduit à

$$b\,\frac{\Psi(b-u)}{b} \quad \text{ou} \quad \Psi\,(b-u);$$

la seconde, intégrée par parties, donne :

$$\Psi\,(b-u) - \int_b^\infty dr\,\frac{\Psi(r-u)}{r},$$

de sorte que l'attraction cherchée a pour valeur :

$$-\,2\pi k\omega u du \int_{r=b}^{r=\infty} dr\,\frac{\Psi(r-u)}{r}.$$

Pour déterminer cette intégrale nous faisons :

$$r-u=z, \quad \text{d'où} \quad r=u+z,$$

et nous remplaçons $\frac{1}{r}$ par son développement :

$$\frac{1}{u+z} = \frac{1}{u} - \frac{z}{u^2} + \frac{z^2}{u^3} - \ldots.$$

On aura ainsi

$$-\,2\pi k\omega u du \left(\frac{1}{u}\int_{z=b-u}^{z=\infty} dz\,\Psi(z) - \frac{1}{u^2}\int_{z=b-u}^{z=\infty} zdz\,\Psi(z) + \ldots\right).$$

Nous pouvons nous arrêter à ce second terme, les intégrales successives étant négligeables, chacune par rapport à celle qui la précède. Posons

$$2\pi\int_x^\infty dx.\ \Psi(x) = \mathrm{K}(x),$$

$$2\pi\int_x^\infty xdx.\ \Psi(x) = \mathrm{H}(x),$$

(on voit que pour $x=o$, on a les constantes K et H de Laplace) on aura,

au lieu de l'expression précédente ;

$$-k\omega du\,K(b-u)+k\omega\,\frac{du\,H(b-u)}{u}.$$

Enfin, en intégrant depuis $u=o$ jusqu'à $u=b$, on aura l'attraction totale cherchée de la sphère sur le filet. Le premier terme intégré donne

$$+\,K\omega\,K_1(o),$$

en faisant

$$-\int_x^\infty K(x)\,dx=K_1(x),$$

et négligeant $K_1(b)$.

Pour intégrer le second terme, on doit encore faire $b-u=y$, et développer $\frac{1}{u}=\frac{1}{b-y}$ suivant les puissances ascendantes de $y$ ; on trouve ainsi, en s'arrêtant au premier terme

$$\frac{K\omega\;H_1(o)}{b}.$$

L'action cherchée est donc

$$\left(K_1(o)+\frac{H_1(o)}{b}\right)k\omega.$$

Il est facile de reconnaître que $K_1(o)=H$. En effet :

$$K_1(x)=-\int_x^\infty K(x)\,dx=+\,xK(x)-\int_x^\infty xK'(x)\,dx$$

$$=xK(x)+\int_x^\infty x\,2\pi\,\Psi(x)\,dx,$$

d'où

$$K_1(o)=2\pi\int_o^\infty x\,\Psi(x)\,dx=H.$$

Quant à $H_1(o)$, on trouve de même que sa valeur est

$$2\pi\int_o^\infty x^2\,\Psi(x)\,dx.$$

En faisant $b = \infty$ on a $K_1(o)\,k\omega = Hk\omega$ pour l'action d'une masse terminée par un plan sur un filet normal à section variable $k\omega s$, et l'action d'un ménisque tel que celui que nous considérons sera

$$Hk\omega - K\omega\left(H + \frac{H_1}{b}\right),$$

ou

$$- K\omega\,\frac{H_1}{b}.$$

Tel est le dernier terme que nous avons à introduire dans l'équation (2), qui, complétée, devient

$$K - \frac{H}{b} + g\rho l + \Pi + k\left(U + V - \frac{H_1}{b} + \frac{g\rho l^2}{2}\right) = o.$$

En prenant le résultat des intégrations de Poisson

$$U + V = H,$$

on aura

$$K - \frac{H}{b} + g\rho l + \Pi + k\left(H - \frac{H_1}{b} + g\rho\,\frac{l^2}{2}\right) = o \qquad (3)$$

D'où l'on tire :

$$H - \frac{H_1}{b} + g\rho\,\frac{l^2}{2} = o \qquad (4)$$

$\frac{H_1}{b}$ étant très-petit par rapport à H, et $g\rho\,\frac{l^2}{2}$ étant positif, on voit que H doit être négatif.

Du reste, on démontrerait de même que $H_1$ doit être négatif aussi; il suffirait de considérer un filet dont la section variable serait à une distance $s$,

$$\omega' = \omega\,(1 + ks + k's^2).$$

On peut prévoir d'avance que l'on devra à l'équation (3) ajouter le terme

$$k'\left(H_1 - \frac{H_2}{b} + g\rho\,\frac{l^3}{3}\right).$$

ce qui donnerait encore

$$H_1 - \frac{H_2}{b} + g\rho\frac{l^3}{3} = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De même, en faisant $\omega' = \omega\,(1 + ks + k'\,s^2 + k''\,s^3)$ on trouverait

$$H_2 - \frac{H_3}{b} + g\rho\frac{l_4}{4} = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

et ainsi de suite, $H_2$, $H_3$,.... étant les valeurs des intégrales

$$2\pi\int_o^\infty x^3\,\Psi(x)\,dx, \quad 2\pi\int_o^\infty x^4\,\Psi(x)\,dx.....$$

Il est visible que si les égalités précédentes sont exactes, ces intégrales doivent être des constantes négatives.

En résumé donc, de l'analyse de l'équilibre d'un filet à section variable on déduirait cette conséquence, que toutes les intégrales définies de la forme

$$\int_o^\infty x^m\,\Psi(x)\,dx,$$

($m$ étant un nombre entier et positif, et $\Psi(x)$ une fonction décroissant très-rapidement quand $x$ augmente, jusqu'à devenir nulle quand cette variable a une valeur sensible) doivent être des quantités négatives.

Mais sans entrer plus avant dans cette discussion, une nouvelle correction apportée aux équations de Poisson nous fait reconnaître qu'elles ne peuvent être exactes. Poisson ne tient aucun compte de la pression de l'air sur la partie variable du filet; cependant cette pression transmise par le liquide environnant n'est pas plus négligeable par rapport à $H\omega$ que la pression $\Pi\omega$ ne l'est par rapport à $K\omega$. En effet, elle a pour valeur $\Pi k\omega l$, $k\omega l$ étant la projection de la surface de la partie variable du filet sur un plan perpendiculaire à la normale. En introduisant ce terme dans les équations précédentes,

on arrive à l'égalité :

$$H - \frac{H_1}{b} + \Pi l + \frac{g\rho l^2}{2} = o \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

Or, pour que cette égalité soit satisfaite, quelle que soit la valeur de la longueur arbitraire $l$, on doit avoir :

$$H - \frac{H_1}{b} = o,$$

et

$$\Pi + \frac{g\rho l}{2} = o.$$

Enfin cette dernière équation ne peut être satisfaite, quelle que soit la valeur de $l$, que si l'on a :

$$\Pi = o, \quad g\rho = o,$$

égalités absurdes toutes deux.

Je ferai remarquer ici que l'on peut arriver immédiatement à l'équation (5) en suivant les principes de Poisson, et à l'aide d'une analyse plus simple. Il suffit de considérer un filet de longueur $l$ à section variable, nulle à la surface et égale à $k\omega\rho$ à une profondeur $\rho$. L'équilibre de ce filet aura lieu sous l'influence : 1° de la pression de l'air, qui, comme nous venons de le voir, sera $\Pi k\omega l$; 2° du poids du filet que nous avons trouvé $= g\rho \frac{l^2}{2} k\omega$; 3° de l'action du ménisque MCODN, action égale, d'après ce qui précède, à $-\frac{H_1 k\omega}{b}$; 4° de l'action du liquide compris entre le plan tangent COD et un autre plan parallèle situé à une distance que l'on peut prendre infinie. Cette dernière action comprendra évidemment celles que Poisson appelle $Uk\omega$ et $Vk\omega$; elle aura pour valeur, en employant les notations précédentes :

$$X = k\omega \int s ds \int ds'. \; dr. \; r d\bar{\omega}. \; \varphi(f) \; \frac{s' - s}{f}.$$

Une intégration identique à celle que nous avons effectuée plus haut nous donne

$$X = 2\pi k\omega \int ds. s \int ds' \, (s' - s) \, \Pi \, (s' - s).$$

En intégrant depuis $s'=o$, jusqu'à $s'=\infty$, on a

$$X = 2\pi k\omega \int s ds\ \Psi(-s).$$

Enfin, intégrant depuis $s=o$ jusqu'à $s=l$ ou jusqu'à $s=\infty$, on a :

$$X = 2\pi k\omega\ \Psi(o) = k\omega\, H,$$

ce qui est le résultat de Poisson. En rassemblant ces différents résultats et divisant par $k\omega$, on aura l'équation (5)

$$H - \frac{H_1}{b} + \Pi l + g\rho \frac{l^2}{2} = o,$$

dont nous avons montré l'impossibilité.

Toutefois, la valeur précédente de X suppose que l'on a négligé la valeur de l'intégrale précédente pour $s=l$, c'est-à-dire la fonction $\chi(l)$ si l'on fait :

$$\text{const.} - \chi(x) = 2\pi \int x \Psi x dx,$$

ou

$$H - \chi(x) = 2\pi \int_o^\infty \Psi x dx.$$

Or, nous trouvons ici, chez Poisson, une contradiction évidente. En effet, lorsqu'il pose l'équation d'équilibre d'un filet cylindrique, il suppose la longueur $l$ quelconque; mais, lorsqu'il considère le filet à section variable, il suppose $l$ insensible, afin de pouvoir négliger le poids de la partie variable. Cependant, afin de pouvoir négliger aussi les intégrales telles que $\chi(l)$, il suppose $l$ plus grand que le rayon d'activité de l'attraction moléculaire. De là résulte qu'il peut donner aux trois intégrales qui forment la valeur U, les mêmes limites $o$ et l'$\infty$, bien que celle qui est relative à la quantité qu'il appelle $s_1$ et qui est égale à $l-s$, ne devrait être prise que de $o$ à $l$.

Enfin, plus loin Poisson dit que l'on peut négliger $l^2$K à côté de H, et ceci suppose que $l$ soit de l'ordre du rayon d'activité moléculaire; car l'intégrale $l^2$K est formée d'éléments tels que $l^2\Psi(x)$, tandis que l'intégrale H a pour éléments $x\Psi(x)$. Donc, pour que la première soit négligeable par rap-

port à la seconde, il faut que $l^2$ le soit par rapport à $x$; mais on ne peut considérer dans la valeur de H que les termes dans lesquels $x$ a une valeur inférieure à celle du rayon d'activité, la valeur de $\Psi(x)$ étant nulle dans tous les autres; donc, enfin, $l^2$ doit être négligeable par rapport au rayon d'activité, et, par suite, $l$ doit au plus être de l'ordre de ce rayon.

De là résulte que, pour rester conséquent avec l'hypothèse de $l$ insensible, nous n'avions point le droit de négliger ni la fonction $X(l)$, ni la fonction

$$\varkappa(l) = K - 2\pi \int_0^l \Psi(x)\, dx,$$

que nous eussions rencontrée, si nous avions intégré séparément les valeurs de U et de V. Et je dois dire, en passant, que cette intégration séparée n'offre aucune difficulté, bien que Poisson, pour une raison que je ne m'explique point, ait entrepris une analyse longue et pénible pour la valeur de V.

En effet, en suivant la marche précédente de l'intégration de X, on trouve :

$$U = 2\pi k\omega \int_0^l s\,ds \int_l^\infty ds' \int_{r=0}^{r=\infty} \varphi(f)\, df = 2\pi k\omega \int_0^l s\,ds \int_l^\infty ds' (s'-s)\, \Pi(s'-s),$$

et

$$V = 2\pi k\omega \int_0^l s\,ds \int_0^l ds' \int_{r=0}^{r=\infty} \varphi(f)\, df = 2\pi k\omega \int_0^l s\,ds \int_0^l ds' (s'-s)\, \Pi(s'-s),$$

ou

$$U = 2\pi k\omega \int_0^l s\,ds\, \Psi(l-s),$$

et

$$V = 2\pi k\omega \int_0^l s\,ds\, [\Psi(-s) - \Psi(l-s)].$$

On a enfin :

$$U = 2\pi k\omega \left\{ \int_0^l (l-s)\, d(l-s)\, \Psi(l-s) - l \int_0^l \Psi(l-s)\, d(l-s) \right\}$$
$$= k\omega\, [(lK - H - l\varkappa(l) + \chi(l)],$$

et

$$V = 2\pi k\omega \left\{ \int_0^l d(-s)(-s)\, \Psi(-s) - \int_0^l (l-s)\, \Psi(l-s)\, d(l-s) + l \int_0^l \Psi(l-s)\, d(l-s) \right\}$$
$$= k\omega\, [2H - \chi(-l) - \chi(l) - lK + l\varkappa(l)].$$

On voit qu'en négligeant les fonctions $\varkappa(l)$, $\chi(l)$, et $\chi(-l)$, on a les valeurs données par Poisson ; mais si nous conservons ces fonctions, nous trouvons :

$$U + V = H - \chi(-l).$$

Cela posé, prenons le développement de la fonction $\chi(-l)$, savoir :

$$\chi(-l) = \chi(o) - l\chi'(o) + \frac{l^2}{1.2}\chi''(o) - \frac{l^3}{1.2.3}\chi'''(o) + \ldots.$$

On a :

$$\begin{array}{lll}
\chi'\, x = -\, 2\pi.\, x\Psi x. & \text{d'où} & \chi'(o) = o \\
\chi''\, x = -\, 2\pi\,(\Psi x + \Psi x'\, x) & & \chi''(o) = 2\pi\Psi(o) \\
\chi'''\, x = -\, 2\pi\,(2\Psi' x + \Psi''\, x) & & \chi'''(o) = o \\
\chi^{\text{IV}}\, x = -\, 2\pi\,(3\Psi'' x + x\Psi''' x) & & \chi^{\text{IV}}(x) = 2\pi 3\Psi''(o) \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Donc

$$\chi(-l) = \chi(o) - 2\pi\frac{l^2}{2}\Psi(o) + 2\pi\frac{l^4}{8}\Psi''\, o - \ldots..$$

D'ailleurs on trouve sans peine,

$$\Psi''\, o = -\, \Pi(o).$$

On a ainsi

$$\chi(-l) = \chi(o) - 2\pi\frac{l^2}{2}\Psi(o) - 2\pi\frac{l^4}{8}\Pi(o) - \ldots..$$

Et à cause de $H = \chi(o)$

$$U + V = \pi l^2\left(\Psi(o) - \frac{l^2}{4}\Pi(o) - \ldots..\right).$$

Ainsi donc en supposant $l$ insensible, on trouve que la valeur de $U+V$ n'est que de l'ordre des quantités négligées par Poisson. Car on doit remarquer que tous les termes de la série contenue entre parenthèses sont du même ordre que le premier, c'est-à-dire que $\Pi(o)$ est de l'ordre de $\Psi(o)$ divisé par le carré d'une quantité insensible, et par suite $l^2\Pi(o)$ de l'ordre de $\Psi(o)$, et de même pour les termes suivants. Si $l$ était une quantité sensible, il n'en serait pas de même, et la série en question serait très-divergente. Mais aussi, dans ce cas, on devrait tenir compte non-seulement des forces négligées par

Poisson, mais d'autres aussi dont il ne fait point mention, telles que les pressions exercées sur la surface du filet par le liquide ambiant, pressions dues aussi bien aux actions moléculaires qu'à la pesanteur, et qui donnent des composantes parallèles à l'axe du filet, parce que la surface de celui-ci n'est point parallèle à cet axe.

Je ne m'arrêterai pas davantage à cette réfutation des arguments de Poisson. Je le répète, ou je m'abuse complétement sur leur portée, ou je crois pouvoir affirmer que cet illustre géomètre, aveuglé par une idée préconçue, s'est égaré dans une inutile complication de la question. Si Poisson s'était borné à montrer l'importance de la correction relative à la rapide variation de densité près de la surface d'un liquide, on n'aurait pu que discuter cette importance sans pouvoir nier la réalité de cette correction ; mais on ne pouvait *à priori* ajouter foi à ses raisonnements, lorsque, se posant un problème qui, au point de vue mathématique, peut être parfaitement posé, savoir l'équilibre d'un fluide incompressible, par conséquent de densité constante, dont les parties sont soumises à l'action de la pesanteur et de leurs attractions mutuelles, il arrivait, en traitant ce problème par des méthodes différentes, à des résultats contradictoires.

Il y a donc quelque point erroné dans les raisonnements de Poisson, et je soupçonne qu'il se trouve dans la manière dont cet illustre géomètre pose ses équations d'équilibre, et que j'avoue ne pas bien comprendre. Il me paraît que, dans ces questions délicates, l'on devrait toujours recourir aux principes les plus simples, tels que l'équilibre dans un canal recourbé aboutissant en deux points de la surface, principes qu'ont employé Clairaut, Laplace et plus loin Poisson lui-même. Or, c'est précisément l'inverse que fait ici Poisson, en introduisant la variabilité de la section des filets. Il avait, il est vrai, une raison d'agir ainsi : il se proposait de faire voir plus tard qu'en ayant égard à la variation rapide de la densité près de la surface, l'action du liquide sur le filet à section variable $OO_1$ ne diffère pas sensiblement de son action sur un filet cylindrique; je n'ai pas lu le passage où il prouve la vérité de cette assertion ; mais, *à priori*, il me paraît qu'elle ne peut être exacte, par cela seul que la variation $ks\omega$ du filet est tout à fait arbitraire, tandis que celle de la densité doit suivre une loi parfaitement déterminée.

En résumé, il me parait inadmissible que des principes qui, entre les mains de géomètres tels que Clairaut, Laplace et Gauss, ont fourni des résultats complets et concordants, n'aient pu le faire que grâce à des considérations inexactes; j'accepte la possibilité d'une variation de la densité; mais je ne puis accorder à cette variation d'autre importance que celle d'une correction dont je chercherai bientôt à montrer l'extrême petitesse.

Je terminerai cet examen incomplet de la théorie de Poisson en mentionnant un remarquable résumé du commencement de cette théorie, inséré par M. Linck dans les *Annales de Poggendorf*, t. XXV, 1832, p. 270. Je ferai observer aussi que la théorie de Young est entièrement à l'abri des objections de Poisson, ce qui suffit déjà pour montrer la possibilité d'expliquer les phénomènes capillaires sans recourir à son hypothèse.

Passons maintenant à l'examen des principes généraux des différentes théories.

Le principe de l'insensibilité de l'attraction moléculaire à une distance sensible a été entendu de différentes manières par les géomètres qui en ont fait usage, ainsi qu'on a pu le voir par l'examen rapide de leurs théories. Clairaut admet que cette insensibilité n'est pas absolue, puisqu'il suppose la possibilité de l'action d'un tube sur un canal infiniment étroit situé dans son axe. Young suppose seulement qu'elle est telle, que l'on puisse considérer comme constante la tension de la surface fluide. Laplace, Gauss et Poisson supposent le rayon d'activité moléculaire tout à fait inappréciable; Poisson surtout insiste sur ce point, en désignant comme incomparablement supérieures à ce rayon les plus petites longueurs que l'on puisse rencontrer dans la nature, par exemple, la hauteur des aspérités que présente toujours une surface quelque polie qu'elle soit. De plus, ces trois illustres géomètres caractérisent davantage la fonction qui lie l'attraction moléculaire à la distance, en supposant que cette fonction décroît avec une extrême rapidité quand la distance augmente, toujours, bien entendu, dans la sphère d'activité de l'attraction. Ils admettent aussi que les fonctions qui représentent la partie variable des intégrales de la fonction d'attraction $\varphi(r)$ multipliée par la différentielle $dr$ de la distance, et par une puissance entière positive de cette même distance, ont le même caractère que la fonction $\varphi(r)$, et même décroissent beaucoup plus rapide-

ment que cette fonction, quand $r$ augmente. Il en sera ainsi des fonctions

$$\Pi(r) = c - \int \varphi(r)\, dr,$$
$$\Psi(r) = c' - \int r\, \Pi(r)\, ar,$$

dans la théorie de Laplace, et des fonctions :

$$\varphi(r) = c - \int f(r)\, dr,$$
$$\psi(r) = c' - \int r^2 \varphi(r)\, dr,$$

dans la théorie de Gauss. On admet même qu'il en sera également ainsi pour des fonctions telles que la fonction $\theta$ de cette dernière théorie :

$$\theta(r) = c'' - \int \frac{\psi(r)}{r^2}\, dr.$$

Laplace considère comme évidente cette transmission des caractères de la fonction $\Pi(r)$ et $\Psi(r)$, de sorte qu'il sera toujours permis de remplacer, dans l'intégration de telles fonctions, une limite finie par l'infini; c'est ainsi que nous avons vu entrer dans la valeur de K l'intégrale $\int_o^\infty \Psi(z)\, dz$ au lieu de $\int_o^b \Psi(z)\, dz$. Gauss, plus prudent, montre que ces principes ne sont pas rigoureusement exacts, et que l'on peut imaginer un grand nombre de fonctions * ayant les caractères attribués à la fonction $\varphi(f)$ et pour lesquelles

* La fonction $l.\left(1 + \frac{a}{a+r}\right)$ dans laquelle $a$ désigne une quantité insensible, satisfait remarquablement aux conditions de la fonction $\varphi(r)$. Pour $r = o$, elle a une valeur finie sensible $l.2$; elle décroît très-rapidement quand $r$ augmente, pour devenir très-voisine de $o$ quand $r$ sera sensible, et par suite $\frac{a}{a+r}$ insensible. Enfin, pour $r = \infty$, elle sera nulle. Néanmoins, si, en admettant cette valeur de $\varphi(r)$, on calcule $\Pi(r)$, on trouve :

$$\Pi(r) = C + rl.\left(2 + \frac{a}{a+r}\right) + a\, l.\frac{(2a+r)^2}{a+r}.$$

Si l'on fait $r = o$, on a

$$\Pi(o) = C + a\, l.4a,$$

et par suite :

$$\Pi(r) - \Pi(o) = r\, l\left(1 + \frac{a}{a+r}\right) + a\, l.\frac{(2a+r)^2}{4a(a+r)}.$$

Le second membre a un tout autre caractère que la fonction $\varphi(r)$; car à mesure que $r$ devient de plus en plus insensible par rapport à $a$, la partie variable de $\Pi(r)$ s'approche de $o$. De plus, pour $r = \infty$ on a $\int_o^\infty \varphi(r)\, dr = \infty$.

On voit que ces résultats sont tout à fait contraires aux principes de Laplace et de Petit.

ces conclusions seront en défaut. Il indique comme preuve la fonction de la gravitation universelle $\frac{\alpha}{r^2}$, qui donnerait pour $\Psi(r)$, étendu à l'infini, une valeur infinie.

Toutefois, M. Gauss ne voit là qu'une question de formes; on évitera toute difficulté en étendant les intégrales seulement jusqu'à une quantité finie quelconque, comprise dans les dimensions des corps sur lesquels peut porter l'observation.

Mais cette réserve ne me paraît pas encore suffisante, et je crois que l'analyse ne peut être rigoureuse qu'en étendant les intégrations précédentes jusqu'au rayon d'activité moléculaire, sans aller au delà. Il suffit en effet de se rappeler l'ancienne observation de Newton, que la répulsion doit commencer là où cesse l'attraction, comme en algèbre les quantités négatives où cessent les positives. C'est cette remarque que nous retrouvons plus tard traduite dans l'indication d'un changement de signe de la fonction d'attraction. Considérons une série de molécules rangées en ligne droite, ou, pour que l'analyse infinitésimale soit applicable avec rigueur, un filet infiniment étroit d'un fluide continu. Soient AR et AR′ des longueurs égales, la première au rayon d'activité R de l'attraction, la seconde au rayon R′ de la répulsion, que l'on admet généralement plus grand que le précédent. Si $F(r)$ et $f(r)$ sont les fonctions qui représentent ces deux forces à la distance $Am = r$, il est clair que l'action du filet sur l'extrémité A sera :

$$A = \int_o^R F(r)\,dr - \int_o^{R'} f(r)\,dr,$$

et l'on ne pourra étendre au delà ces intégrations sans introduire des valeurs négatives des expressions $F(r)$, $f(r)$, qui n'exprimeront plus des forces réelles. Ainsi jusqu'à la distance R, l'attraction ira en décroissant et deviendra nulle en ce point; puis, à partir de là, cette fonction pourra devenir physiquement négative, pour constituer une partie de la répulsion, dont l'activité ne commencerait qu'au point R, et qui aurait pour expression également la fonction $F(r)$; dans cette hypothèse, on aura

$$A = \int_o^R F(r)\,dr - \int_R^{R'} F(r)\,dr - \int_o^{R'} f(r)\,dr.$$

Il en serait ainsi d'après Newton ; de plus, ce grand homme admet que la répulsion est en raison inverse de la distance, ce qui suppose évidemment son rayon d'activité infini. Alors l'intégrale $-\int f(r)dr$ peut être prise depuis $o$ jusqu'à l'infini, ce qui la rend infinie.

On esquive ces difficultés en admettant que les rayons d'activité de l'attraction et de la répulsion moléculaires sont réellement infinis, mais que leurs rayons d'activité *sensible* sont inappréciables. On admet donc ainsi que les fonctions $F(r)$, $f(r)$ ne peuvent pas changer de signe, mais qu'elles décroissent avec une excessive rapidité. Pour fixer les idées, on peut représenter les valeurs de ces fonctions par des ordonnées correspondantes aux distances prises comme abscisses. Les deux courbes qui relieraient les points ainsi obtenus devront couper l'axe des Y aux points dont les ordonnées sont $F(o)$ et $f(o)$. A partir de ces points, elles se rapprocheront très-rapidement de l'axe des $x$, de sorte qu'à partir d'une abscisse d'une longueur sensible R, les ordonnées des deux courbes seront insensibles. On voit immédiatement par la considération de ces courbes que les intégrales $\int_o^r F(r)\,dr$ et $\int_o^r f(r)\,dr$, représentent les aires comprises entre les courbes ; les axes des coordonnées et les ordonnées correspondantes à l'abscisse $r$, auront pour toute valeur finie de $r$ une grandeur sensiblement la même, quelle que soit cette valeur finie; mais on voit aussi que, dans la plupart des cas, ces intégrales étendues jusqu'à l'infini auront des valeurs infinies, comme le fait observer M. Gauss. On voit de plus combien doit être absolu le principe de l'insensibilité des forces moléculaires à une distance sensible, pour que l'aire comprise entre l'abscisse $X = R$ et une abscisse $x = b$ de grandeur finie assez considérable, et comprise seulement dans les dimensions des corps soumis à l'expérience, soit tout à fait insensible par rapport à l'aire FORM, quoique le rapport de $b$ à R soit un nombre immense auquel ne pourrait être comparé aucun rapport de distances connues. Au reste, je dois dire que Poisson seul pousse l'hypothèse à ce point. On peut voir que Laplace considère le rayon d'activité moléculaire comme moins inappréciable.

Les considérations précédentes ne me paraissent pas lever toutes les difficultés. En effet, considérons de nouveau le filet liquide AB; supposons-le vertical, et, pour plus de simplicité, placé dans le vide. D'après les idées qui

précèdent, l'action du filet sur une molécule de masse $\mu$ placée en A, sera :

$$\int_o^b [F(r) - f(r)]\, dr,$$

$b$ étant une quantité finie quelconque, comprise seulement dans les dimensions des corps sur lesquels on peut expérimenter. Le poids de cette molécule $\mu$ étant $\mu g$, on devra, pour son équilibre, avoir :

$$\mu g + \int_o^b [F(r) - f(r)]\, dr = o.$$

Ce qui indique que la répulsion $f(r)$ doit surpasser l'attraction $F(r)$. Ceci n'est au fond que l'argument à l'aide duquel Poisson démontre que la quantité K est négative, et la traduction analytique de cette idée généralement admise, que, dans les liquides, la répulsion surpasse légèrement l'attraction. Or, en présence de cette idée, je ne puis comprendre comment la théorie a pu immédiatement poser comme principe l'attraction de deux molécules, représentée par une fonction positive de la distance. Je comprends encore bien moins cette énorme action des liquides sur eux-mêmes, affirmée par Laplace et Poisson, et qui, selon eux, et selon Poisson plus particulièrement, peut produire une variation sensible de la densité, malgré l'excessive petitesse de la compressibilité des liquides. Je ne vois d'un point à un autre d'une masse liquide d'autre variation possible de la densité, que celle qui est due au poids des couches supérieures à ces points. Il peut en être autrement lorsque l'on considère un liquide en contact avec un solide : on comprend aisément que, le solide exerçant une véritable attraction non équilibrée par une répulsion, il puisse y avoir près de la surface commune du liquide et du solide des variations de densité dans les couches fluides; mais il me parait difficile d'admettre qu'elle soit beaucoup plus considérable que celle qui est due à la pesanteur, attendu que l'attraction du tube est une force comparable à la gravité.

Il serait inutile de rechercher quels changements apporterait dans les développements théoriques le signe — donné à la fonction $\varphi(r)$. Il est clair que

le résultat final de ce changement de signe sera de rendre négatives les constantes K et H des formules de Laplace, et la constante $\alpha^2$ de celles de Gauss. Cette hypothèse de $\alpha^2$ négatif, et par conséquent de $2\beta^2 - \alpha^2$ constamment positif, ne serait pas contraire aux phénomènes d'ascension dans les tubes capillaires et à d'autres semblables; mais elle le serait entièrement à ceux de dépression, et plus généralement à tous les phénomènes dans lesquels la surface du fluide doit être convexe. Au surplus cette même hypothèse serait la négation absolue de la cohésion des fluides, et comme cette cohésion ne peut pas être mise en doute, il faut pouvoir l'expliquer, tout en admettant l'existence des forces répulsives et leur supériorité sur les forces attractives, dans l'état d'équilibre d'un fluide pesant. Il suffit pour cela de recourir à l'explication, très-simple et très-connue, fondée sur cette hypothèse, que la force répulsive décroît beaucoup plus rapidement que l'attraction, lorsque la distance augmente. Nous verrons, en développant cette idée, dans la dernière partie de notre travail, qu'elle justifie parfaitement le point de départ des théories de Laplace et de Gauss, et mieux encore celui de Poisson et d'Young.

Les observations précédentes n'ont donc nullement pour but de nier l'exactitude ou plutôt la réalité des principes posés par ces illustres savants, principes généralement acceptés, et qui ne peuvent tout au plus qu'être incomplets, du moins considérés *à priori*. Il est possible que ces principes, en ce qu'ils ont de particulier, de purement hypothétique, soient entièrement faux ; mais c'est l'expérience seule qui a le droit de porter une telle décision. Nous avons voulu uniquement combler une lacune dans la théorie de l'action capillaire, en montrant la possibilité de l'excès d'attraction qu'elle admet en principe. Toutefois, il est juste de remarquer que cette lacune n'existe pas dans la théorie de Young; nous avons rapporté le passage où il s'efforce d'établir physiquement son principe de la cohésion, par la considération simultanée de l'attraction et de la répulsion.

Nous admettons donc, comme impossible à nier, le principe d'une attraction capable de dominer la répulsion et la pesanteur. Il nous resterait à examiner le degré de confiance que l'on peut accorder à la loi que l'on a admise pour cette attraction. Je le répète, l'expérience peut seule prononcer sur ce point, et deux chiffres nous en apprendront plus que ne le pourraient faire

toutes les spéculations métaphysiques. Néanmoins, je crois pouvoir entrer dans quelques considérations qui nous conduiront d'ailleurs à des conséquences importantes.

Nous aimons à rencontrer dans les lois de la nature le plus de simplicité et d'unité possible; c'est cette tendance de notre esprit qui a engendré et engendrera encore tant de lois inexactes, parce qu'elle applique la simplicité non pas aux principes mêmes des choses, mais aux conséquences de ces principes. Or, l'analyse montre bien que, dans la plupart des cas, des principes extrêmement simples conduisent aux formules les plus compliquées, et que, réciproquement, la simplicité d'une conséquence exige la complication du principe. C'est un peu ce qui arrive dans le cas actuel; on a vu toutes les hypothèses que l'on doit faire sur la fonction de l'attraction moléculaire et sur les fonctions qui s'en déduisent, pour arriver à expliquer les lois si simples des phénomènes capillaires; on a vu qu'il fallait supposer à cette fonction de l'attraction des formes toutes spéciales, telles que celle d'une exponentielle dont l'exposant est le produit d'un très-grand nombre négatif par la distance. Ici je me permettrai d'émettre cette pensée, au fond très-sérieuse, que la construction de l'immense édifice que nous appelons l'univers n'a pas dû être basée sur des calculs algébriques, et en particulier sur des calculs d'exponentielles. Dans cette admirable machine, chacune des pièces qui était un atome, apportait avec elle la force qui devait la réunir à d'autres et concourir à l'équilibre du système; mais cette force ne pouvait à son tour apporter avec elle cette chose idéale que nous nommons une *loi*. La loi devait donc se trouver dans l'existence même de la force. Sous ce point de vue, le principe de la gravitation universelle, et en général tous les principes qui font varier une action émanée d'un centre d'activité en raison inverse du carré de la distance, présentent un remarquable cachet de vérité. Car cette loi n'est alors qu'une conséquence géométrique de l'existence même de la force et de la manière dont elle étend son action. En est-il de même du principe de l'attraction moléculaire? Je ne le pense pas : les géomètres ont bien, à la vérité, énoncé que cette attraction dépendait de la forme et de la nature des molécules, tandis que l'attraction universelle en est indépendante; mais je ne crois pas qu'ils aient fait voir que cette dépendance

devait donner à la fonction de l'attraction une forme et un caractère tels qu'ils l'admettent. Ce principe n'aura donc aucun autre caractère de vérité que celui que lui donnera la vérification de ses conséquences.

Il est une hypothèse sur la nature des forces moléculaires qui peut conduire à une loi analogue à celle de l'insensibilité de l'attraction moléculaire à une distance sensible, et qui a été repoussée par Laplace comme lui paraissant peu naturelle. Elle consiste à admettre qu'une partie de l'attraction des molécules, celle qui est différente de la gravitation universelle, peut être absorbée de molécules en molécules. Quoi qu'en dise Laplace, je ne vois rien d'inadmissible dans cette idée, et je trouve qu'elle offre beaucoup d'analogie avec celles de la chaleur latente et de la chaleur sensible. Acceptons donc pour un instant cette conception sur la nature des attractions moléculaires, et voyons quelle loi elle nous fournira; considérons encore un filet rectiligne infiniment étroit, formé d'un fluide continu. Soient $m$, $m'$ deux éléments de ce filet, dont j'appelle la section $\omega$. J'imagine un cône dont $m$ soit le sommet et $m'$ la base. L'attraction émanée de $m$ vers $m'$ sera à l'attraction totale A de $m$, comme la portion de surface découpée par le cône que nous considérons dans la sphère de rayon 1, dont le centre est en $m$, est à la surface totale de cette sphère, c'est-à-dire à $4\pi$, ou comme $\omega$ est à la surface de la sphère dont le centre est en $m$, et dont le rayon est $mm' = r$. Elle sera donc $\frac{A\omega}{4\pi r^2}$. Mais une fraction seulement de cette attraction parviendra à $m'$; l'autre partie aura été absorbée par le fluide contenu dans le cône $mm'$. Cette partie absorbée sera naturellement proportionnelle au volume de ce cône, et par suite à sa hauteur $r$, de sorte que nous pourrons prendre pour l'action de $m$ sur $m'$ :

$$mm' \frac{\alpha(1 - kr)}{r^2},$$

$\alpha$ et $k$ étant des constantes qui dépendent de la nature du fluide. On voit que cette attraction sera sensible jusqu'à une distance $r = \frac{1}{k}$, et qu'au delà elle est absolument nulle. Le rayon d'activité $\frac{1}{k}$ sera d'autant plus grand que l'attraction sera moins absorbée.

Déterminons l'action du filet sur son extrémité A; elle sera :

$$\rho\omega m\alpha \int_{0}^{r=\frac{1}{k}} \frac{1-kr}{r^2}\,dr,$$

en substituant à $m'$ le produit de l'élément $\omega dr$ par la densité $\rho$.

Or, cette intégrale, prise entre ces limites, est infinie, et il est à observer que, réduite à son premier terme, qui n'est autre que le terme de l'attraction universelle, elle serait encore infinie. Il faut donc qu'il ne soit pas permis de prendre l'intégrale à partir de $o$, limite qui détermine cette valeur infinie. Et, en effet, on conçoit facilement l'interdiction de cette limite : en l'admettant, on comprend dans les actions des molécules du filet sur $m$, l'action de cette molécule sur elle-même, action qui est évidemment indéterminée, et même infinie, puisque l'on considère les atomes comme doués d'une résistance illimitée aux forces de la nature. La valeur infinie de l'intégrale précédente et de la force $\alpha\frac{1-kx}{x^2}$ elle-même pour $x=o$, n'exprime donc que l'insécabilité idéale des atomes.

On voit par là que, dans l'intégration précédente et dans toutes celles qui se rapporteront aux actions moléculaires, on ne devra jamais prendre pour limite inférieure $o$, mais bien une longueur $\varepsilon$ égale à l'intervalle de deux molécules, c'est-à-dire qu'il faudra commencer la sommation des actions exercées sur $m$ par celle de la molécule la plus voisine. Mais ceci n'est pas conciliable avec l'hypothèse d'un fluide continu, hypothèse nécessaire pour que l'on puisse appliquer l'analyse infinitésimale. Donc cette analyse ne peut pas s'appliquer avec rigueur à ces sortes de questions, et, à l'intégrale précédente, on devra substituer la somme :

$$\alpha mm'\Sigma_1^n \frac{1-k\varepsilon n}{n\varepsilon},$$

$n$ étant le nombre de molécules comprises dans la longueur du rayon d'activité sensible $\frac{1}{k}$.

Poisson est le seul, je pense, qui ait insisté sur l'emploi des différences finies dans ces sortes de questions. M. Gauss pose nettement l'hypothèse d'un

fluide continu; mais il faut remarquer que c'est toujours là ce qui a lieu dans la plupart des questions de physique mathématique et de mécanique, où l'on substitue à une question physique un problème mathématique analogue. L'exemple précédent a seulement pour but de montrer que le calcul des différences finies permettrait l'usage de certaines hypothèses que repousserait le calcul différentiel. En effet, la première de ces deux analyses bannissant des sommations la limite inférieure $o$, n'exigerait pas, comme la seconde, que les fonctions $\varphi(o)$, $\Psi(o)$ etc., des théories précédentes ne fussent pas infinies. De plus, elle introduirait dans les valeurs des constantes une donnée particulière à chaque fluide, savoir l'intervalle moyen de leurs molécules. Ainsi, par exemple, les constantes $\beta^2$, $\alpha^2$ des formules de M. Gauss ne seront plus simplement proportionnelles aux densités du solide et du liquide, comme elles devraient l'être si l'on admettait, chose vraisemblable, que les fonctions, $f(r)$, $F(r)$ ne varient pas de forme d'un liquide à un autre.

Le même exemple montre encore l'importance de la remarque faite plus haut, que l'on doit intégrer seulement jusqu'au rayon d'activité et point au delà. Il est facile de reconnaître que l'on aurait ici des valeurs très-différentes si, au lieu d'intégrer jusqu'à $r = \frac{1}{k}$, on prenait comme limite supérieure une quantité finie quelconque, et, à plus forte raison, l'infini, qui donnerait une valeur infinie à l'intégrale. Il est clair d'ailleurs que toute valeur de $r$ supérieure à $\frac{1}{k}$ introduirait une force négative qui n'existait pas, puisque l'attraction n'est pas détruite dans notre hypothèse par une répulsion, mais va en diminuant jusqu'à $o$, par le seul fait de son absorption. Et l'on doit bien remarquer que je n'ai pas supposé l'absorption de l'attraction proportionnelle à cette attraction même : la discussion précédente suppose, au contraire, que chaque molécule a un pouvoir absorbant donné, de sorte que, plus l'attraction qu'elle reçoit a perdu de son intensité, plus elle doit en absorber pour en être en quelque sorte saturée. Au reste, il est évident que ce ne sont là que de pures hypothèses, que je me garderai bien de vouloir faire entrer dans les théories, mais dont le développement m'a paru utile pour faire voir que les limites des intégrales de la théorie de l'action capillaire peuvent être inexactes. Observons encore, pour terminer ces considérations, que l'intégration jusqu'au rayon d'activité moléculaire seulement,

n'apportera pas de changement dans les résultats théoriques ; puisque ce n'est que substituer à une grandeur finie quelconque d'autres grandeurs très-petites constantes pour un même liquide et un même solide ; mais on voit que les constantes des phénomènes capillaires K, H, $\alpha^2$, $\beta^2$ renfermeront encore par là un nouvel élément variable d'un liquide à l'autre. Et cette introduction d'éléments spéciaux dans ces constantes, loin d'être défavorable aux théories, les met au contraire à l'abri de puissantes objections que leur ferait l'expérience.

Il nous reste un dernier mot à dire sur les théories dont nous avons fait l'histoire. On s'est étonné qu'elles aient pu conduire toutes aux mêmes résultats. Il est facile de reconnaître qu'il en devait être ainsi pour les théories de Laplace et de M. Gauss. Les principes de ces théories étant identiques, leurs résultats devaient l'être, et ils le sont en effet ; car on peut s'assurer sans peine que les constantes des formules de ces deux grands géomètres sont les mêmes. Ainsi, dans la théorie de Laplace, nous avons vu que l'on avait pour le volume de liquide soulevé dans un tube prismatique ou cylindrique :

$$V = \frac{H}{2gD} \cos \bar{\omega}.\ c.$$

Dans la théorie de M. Gauss on a :

$$V = \alpha^2 \cos \bar{\omega}.\ c.$$

On doit donc avoir $\alpha^2 = \frac{H}{2gD}$. Or, les valeurs des constantes $\alpha^2$ et H sont :

$$H = 2\pi D^2 \int_0^\infty r dr \int_r^\infty r dr \int_r^\infty f(r)\, dr.$$

On doit donc avoir :

$$2\int_0^\infty r dr \int_r^\infty r dr \int_r^\infty f(r)\, dr = \int_0^\infty dr \int_r^\infty r^2\, dr \int_r^\infty f(r)\, dr.$$

Pour vérifier cette égalité il suffira de poser :

$$f(r) = -\frac{d.\,\varphi(r)}{dr}, \quad r\varphi(r) = -\frac{d.\,\psi(r)}{dr},$$

$$\psi(r) = \frac{d.\,\varkappa(r)}{dr}, \quad \lambda(r) = -\frac{d.\,\lambda(r)}{dr},$$

on verra facilement qu'elle se réduit à l'identité

$$2\lambda(o) = 2\lambda(o).$$

La théorie d'Young ne doit pas non plus être en désaccord avec les précédentes, au moins dans toutes les questions qui dépendront de l'attraction du tube et de la pression due à la courbure de la surface. Car Young admet le même principe pour l'attraction du tube, et la même tension de la surface que Laplace et Gauss. La seule différence réside dans les principes qui conduisent à la valeur commune de cette tension; encore n'y a-t-il d'essentiellement différent dans ces principes que le rôle attribué par Young à la force répulsive; quant aux forces attractives, il admet aussi qu'elles ne s'étendent qu'à de très-petites distances.

La seule harmonie dont nous ayons lieu d'être surpris est celle qui règne entre les résultats de Poisson et ceux des autres géomètres. Cependant, il me paraît extrêmement simple de relier sa théorie avec celle d'Young, et par suite avec celles de Laplace et de Gauss. En effet, imaginons une série de surfaces semblables superposées et soumises à des tensions uniformes pour une même surface, mais croissantes d'une surface à l'autre depuis la surface supérieure jusqu'à la surface inférieure. Il est clair que l'action de chacune de ces surfaces sur une normale commune sera proportionnelle à la somme des courbures, et comme cette somme ne varie pas d'une surface à l'autre dans tous les points coupés par cette normale, les actions réunies de toutes ces surfaces donneront une pression normale égale à la somme des courbures multipliée par la somme des coefficients relatifs à chaque surface. Ainsi, si j'appelle $\alpha_1^2$ le coefficient relatif à la surface supérieure, et de même $\alpha_2^2, \alpha_3^2, \ldots \alpha_4^2$ les coefficients des autres surfaces, et R, R′ les rayons et courbures communes à tous les points coupés par la normale MN (*fig.* 5), l'action totale des surfaces suivant cette normale sera :

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + - + \alpha_n^2).$$

Il est évident que ces considérations peuvent s'appliquer à un fluide dont la

densité va en croissant à partir de la surface : il suffit d'imaginer une série de surfaces parallèles à celle-ci et s'étendant jusqu'au rayon d'activité moléculaire. Sur chacune d'elles la densité, et, par suite, la tension, sera uniforme; mais l'une et l'autre croîtront depuis la surface supérieure jusqu'à la surface inférieure. La formule précédente exprimera encore l'action de ces surfaces réunies, suivant une normale commune, et les coefficients $\alpha_1^2$, $\alpha_2^2$, .... $\alpha_n^2$ dépendront des densités croissantes, et iront également en croissant. Mais ces coefficients étant constants pour un même liquide, leur somme sera aussi un nombre constant, de sorte que la tension de la surface pourra être encore représentée par l'expression :

$$\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

On voit donc que le seul effet de l'hypothèse de Poisson sera, comme il l'indique lui-même, de donner aux constantes des valeurs différentes de celles qu'elles auraient sans cette hypothèse.

Le raisonnement précédent ne s'applique parfaitement qu'à la comparaison de la théorie de Poisson avec celle d'Young; mais il me paraît qu'on peut l'étendre sans peine à celles de Laplace et de M. Gauss, parce qu'elles conduisent en résultat à ce que Young avait admis en principe, c'est-à-dire que, d'après les résultats de ces théories, on pourra, pour faciliter l'analyse, y introduire la conception d'une tension uniforme de la surface admise comme point de départ par Young. C'est même ce qu'a fait M. Bertrand en différents points du travail que nous avons cité, et dans lequel il simplifie la théorie de M. Gauss.

Ainsi, l'on arrive à reconnaître l'accord des théories de l'action capillaire, en reliant la théorie si compliquée de Poisson à la théorie si simple d'Young, celle-ci à la théorie élégante et complète de Laplace, et enfin cette dernière à la rigoureuse et admirable théorie de M. Gauss, véritable sanction mathématique des précédentes.

# DEUXIÈME PARTIE.

## RECHERCHES EXPÉRIMENTALES.

L'étude expérimentale de la capillarité peut être envisagée sous deux points de vue différents. Elle peut être purement physique, c'est-à-dire que l'observateur, supposant tout inconnu ou au moins douteux dans cette question, peut chercher à préciser les causes des phénomènes capillaires, à reconnaître les influences capables de les modifier et les liaisons possibles entre les forces qui les produisent et les autres forces de la nature : on peut, en un mot, se proposer de faire l'histoire naturelle de la capillarité.

On peut encore étudier la question au point de vue théorique, c'est-à-dire admettre que les causes des phénomènes à observer sont connues, que l'on a pu leur appliquer l'analyse mathématique et prédire leurs effets. Il ne reste plus alors qu'à chercher si ces effets annoncés se réalisent, si l'observation confirme ou infirme le calcul.

Ces deux études, l'une physique, l'autre théorique, sont intimement liées. Sans nul doute les premières données d'une théorie exacte seraient d'un puissant secours pour un examen plus complet de la question. C'est le caractère distinctif et précieux des bonnes théories de conduire à des découvertes imprévues en guidant l'observation. En revanche, il serait dangereux de prendre pour point de départ des principes que l'expérience n'aurait pas suffisamment sanctionnés. C'est ainsi que le travail le plus complet, je pense, qui ait été fait sur la capillarité, le *Traité de la cohésion* de M. Frankenheim, perd en certains points beaucoup de son importance, par le seul fait qu'il s'appuie sur la loi connue de l'ascension des liquides dans les tubes capil-

laires, loi mal démontrée et contestée. Plusieurs résultats d'expériences faites avec soin, mais calculées d'après cette loi, peuvent être entachés de l'inexactitude de leur principe, et perdre ainsi le caractère de rigueur que l'on est en droit de demander aux observations de nos jours.

Or, si l'on examine de quelle manière ont été trouvées et vérifiées les lois fondamentales des phénomènes capillaires, on sent vivement la nécessité de nouvelles vérifications. On le sent plus vivement encore, lorsque l'on aborde l'étude expérimentale de ces phénomènes, lorsque l'on se trouve en face des innombrables difficultés qu'elle présente. On se demande comment, sans instruments précis et sans indications premières, il a été possible d'obtenir les résultats assez concordants que nous trouvons dans les anciens travaux, tandis que nous, munis d'instruments d'une grande perfection, et connaissant d'avance la question que nous étudions, nous n'arrivons qu'à l'aide de mille soins à obtenir des résultats constants. On est en droit de supposer que les chiffres qui nous sont transmis ont été choisis, comme concordants, parmi beaucoup d'autres, et l'on peut se demander si les nombres élagués n'étaient pas les meilleurs, si l'irrégularité n'était pas la loi. D'ailleurs, en admettant même l'exactitude de quelques résultats, et l'on doit le faire au moins pour les expériences de Gay-Lussac et pour celles de M. Frankenheim, on ne peut pas en conclure pour les lois déduites une exactitude complète. En effet, les expériences qui jusqu'aujourd'hui vérifient ces lois sont fort peu nombreuses, et ne s'étendent qu'entre des limites beaucoup plus restreintes que celles qu'assignent les lois théoriques, tandis que les travaux récents effectués dans des limites plus étendues mettent en doute les principes théoriques plutôt qu'ils ne les confirment.

En résumé donc, les lois des phénomènes capillaires n'ont pas encore reçu de l'expérience une incontestable sanction, et l'on doit considérer comme nécessaire une vérification complète de presque tous les résultats physiques admis jusqu'aujourd'hui.

L'étude physique, l'histoire naturelle de la capillarité, est peut-être encore moins avancée que son étude théorique, et doit offrir certainement autant d'intérêt. Il s'agirait de séparer, dans chaque ordre de phénomènes, les causes purement mécaniques des forces électives dépendant de la nature des

corps, de déterminer l'influence d'autres causes introduites dans les phénomènes, par exemple, les influences de la chaleur, de la lumière, de l'électricité. Il y aurait là une source inépuisable d'importantes recherches; mais ces recherches seraient, comme nous l'avons déjà dit, singulièrement facilitées, si l'on pouvait s'appuyer sur des lois générales, dérivées d'un même principe, comme celles que donnent les théories mathématiques de la capillarité. Il importe donc, avant tout, de soumettre celles-ci au contrôle de l'expérience.

La question, ainsi réduite à la vérification des lois théoriques, reste encore extrêmement vaste. Car chacune des lois des phénomènes capillaires est la solution mathématique d'un cas particulier du problème général que s'était posé Gauss : déterminer l'équilibre d'un corps liquide en contact avec un corps solide. Et l'on peut exiger que, dans chaque cas, l'expérience s'applique à différents liquides pour un même solide, à différents solides pour un même liquide, et enfin, dans chaque combinaison de deux corps, à des dimensions différentes de ceux-ci.

En présence du nombre et de l'étendue des questions à traiter, je me suis vu forcé de laisser de côté quelques-unes de celles dont la théorie s'est occupée, afin de pouvoir porter toute mon attention sur les phénomènes que nous pouvons appeler fondamentaux, dans lesquels le problème mathématique est à la fois le plus simple et le plus semblable possible au problème physique. J'ai commencé par l'étude de l'équilibre des liquides dans les tubes capillaires. Je me suis étendu particulièrement sur la dépression du mercure, dont l'observation signalait au premier abord des anomalies exigeant une discussion sérieuse.

—

### RECHERCHES SUR L'ÉQUILIBRE DES LIQUIDES DANS LES TUBES CAPILLAIRES. PROCÉDÉ D'OBSERVATION.

*Mesure du rayon d'un tube en un point quelconque de ce tube.*

Il existe peu de tubes dont la section soit rigoureusement circulaire, et j'ai remarqué que les tubes les plus elliptiques sont généralement ceux dont le diamètre intérieur est très-petit, et l'épaisseur des parois assez considérable. Ce fait s'explique, du reste, par le mode de construction des tubes; on sait qu'on les obtient au moyen d'une boule de verre que l'on étire en soufflant en même temps dans son intérieur; l'égalité de pression résultant du souffle tend à donner au tube une section circulaire, mais la pesanteur, agissant en même temps sur cette masse très-molle, doit modifier cette forme circulaire, et déterminer un aplatissement qui sera d'autant plus grand que cette dernière force sera plus considérable par rapport à la première, c'est-à-dire à la pression de l'air intérieur. Or, il est clair que cette pression devra être d'autant plus grande que l'on voudra obtenir des tubes plus larges, tandis que la force tendant à produire l'aplatissement croîtra seulement avec l'épaisseur des parois. On voit donc que deux causes concourent à donner aux tubes très-capillaires et à parois épaisses une section plus ou moins elliptique. Une troisième cause, essentiellement variable, déterminera différents degrés d'ellipticité: c'est la fluidité du verre au moment où on l'étire. On obtiendra généralement d'autant plus de régularité dans le tube, que la masse de la boule sera moins refroidie. C'est un fait que l'on peut constater à la lampe d'émailleur.

Comme nous emploierons dans les expériences que nous allons décrire beaucoup de tubes à parois épaisses et d'un diamètre très-petit, nous devrons nous résigner à choisir seulement parmi ces tubes ceux dont la section se rapproche le plus de la forme circulaire, sans espérer en rencontrer qui remplissent exactement cette condition. Dès lors, il faut que nous précisions ce que nous entendons par rayon de ces tubes.

La loi du rapport inverse de l'élévation d'un liquide dans un tube au

rayon de ce tube n'est qu'un cas particulier de cette loi théorique générale, que le volume liquide soulevé ou déprimé dans un tube capillaire est, pour un même liquide, proportionnel au contour de ce tube; d'où il résulte que la hauteur qui mesure ce volume est en raison inverse du rapport $\frac{s}{c}$ de la section du tube à son contour. Dans le cas d'un tube circulaire, ce rapport est la moitié du rayon, de sorte que la hauteur est en raison inverse du rayon. Il est évident que nous pourrons appliquer cette loi à des tubes elliptiques, pourvu que nous entendions par *rayon* le double du rapport $\frac{s}{c}$ de la section au contour.

C'est donc ce rapport que nous devons déterminer. On peut y arriver assez facilement au moyen d'un fort microscope muni d'une chambre claire et d'un micromètre donnant les centièmes de millimètres. On dessinera l'image amplifiée de la section dont on suit facilement les contours, et l'image du micromètre donnera l'échelle. On pourra alors, si le tube est sensiblement elliptique, mesurer sur le papier les axes $2a$, $2b$ de l'ellipse, et en déduire le rapport $\frac{s}{c}$ et le rayon $R = \frac{2s}{c}$; pour peu que l'on ait choisi les tubes les moins irréguliers, il sera permis de calculer ce rapport par la formule :

$$R = 2\frac{s}{c} = \frac{b}{1 - \frac{e^2}{4}},$$

$e$ étant l'excentricité $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, et si cette excentricité est fort petite, il suffira d'employer la formule plus commode

$$R = \sqrt{ab},$$

et même

$$R = \frac{a+b}{2}.$$

Pour la plupart des tubes dont nous nous sommes servis, l'erreur résultant de l'emploi de ces formules n'affectait pas les millièmes de millimètre. On reconnaît du reste facilement qu'elle est de l'ordre de $(a-b)^2$.

On peut, au moyen d'un fort bon microscope, capable de grossir mille fois, obtenir avec exactitude les 1000$^{\text{mes}}$ de millimètre. Mais ce n'est qu'avec les plus grands soins qu'on atteint cette approximation, et il ne faut pas espé-

rer la dépasser; aussi les 4<sup>mes</sup> décimales que nous donnons dans nos résultats ne sont-elles destinées qu'à préciser la valeur des précédentes.

On peut encore connaître très-exactement le diamètre d'un tube cylindrique en y introduisant une colonne de mercure dont on mesure la longueur et le poids. En déterminant ces deux derniers à l'aide d'une machine à diviser et d'une balance trébuchant au $1/2$ milligramme, on pourrait évaluer le rayon d'un tube parfaitement cylindrique et circulaire à $0^{mm},0001$ près; mais de tels tubes n'existent guère; il faut donc pouvoir tenir compte de l'ellipticité et de l'inégalité de la section dans les différents points du tube. Il ne me paraît pas que l'on puisse, par le procédé en question, connaître la première de ces irrégularités, on ne peut que chercher à l'éviter autant que possible. Cette seule cause, sans compter la brièveté des opérations, suffirait pour faire préférer l'emploi du microscope. Cependant cet emploi peut conduire à de notables erreurs, surtout si l'on n'a pas la précaution de reprendre presque à chaque mesure d'un tube, l'image du micromètre servant d'échelle. C'est pourquoi j'ai cru nécessaire de contrôler par les procédés précédents les mesures faites au microscope, et c'est avec satisfaction que j'ai vu les résultats de ces deux modes de mesure s'accorder toujours de la manière la plus complète.

J'ai dû toutefois modifier d'une manière essentielle le procédé de mesure par un jaugeage au mercure; j'opérais de la manière suivante :

Au moyen d'un microscope simple, je m'assurai d'abord que la section du tube n'était que très-faiblement elliptique; cette simple inspection donne une garantie suffisante. En effet, nous avons vu que dans le cas où l'excentricité est très-petite, le rapport R est sensiblement égal à $\sqrt{ab}$, quantité qui nous est immédiatement donnée par le procédé que nous allons employer. Si l'on introduit dans le tube une longue colonne de mercure, sa longueur et son poids pourront être mesurés avec exactitude, mais nous ne pourrons en déduire que le rayon moyen du tube, rayon qui peut être sensiblement différent de ceux des points du tube où nous avons observé les sommets des colonnes soulevées ou déprimées par la capillarité. A la vérité j'ai fait voir, dans mon premier mémoire, qu'en admettant la loi du rapport inverse de la hauteur au rayon comme exacte pour des valeurs de rayons peu différentes, la moyenne des hauteurs obtenues en différents points du tube doit corres-

pondre au rayon moyen. Néanmoins, il m'a paru préférable de rapporter chaque hauteur au rayon de la section du tube qui renferme le haut ou le bas du ménisque. On peut y arriver de la manière suivante.

On calibre le tube comme si on voulait le partage en parties d'égale capacité, c'est-à-dire que l'on mesure les longueurs $l_1, l_2, l_3, \ldots$ d'une petite colonne de mercure que l'on promène dans tout le tube. Cela fait, on détermine le rayon moyen d'une certaine partie du tube à l'aide d'une longue colonne de mercure commençant à l'origine des longueurs $l_1, l_2, l_3, \ldots$ et embrassant un certain nombre de ces parties. Soient L la longueur de cette colonne, $m$ le nombre entier de longueurs $l_1, l_2 \ldots$ qu'elle comprend, et $\frac{1}{n}$ la partie de $l_{m+1}$ qu'elle renferme également; soient de plus R le rayon moyen de la longueur L et $r_1, r_2, r_3, \ldots$ les rayons correspondants aux longueurs $l_1, l_2, l_3 \ldots$, on aura évidemment

$$LR^2 = l_1 r_1^2 + l_2 r_2^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n} l_{m+1} r_{m+1}^2.$$

D'ailleurs, si $l$ représente une longueur quelconque de calibrage, et $r$ le rayon qui lui correspond, on aura aussi

$$l_1 r_1^2 = l_2 r_2^2 = \ldots\ldots = lr^2.$$

Donc

$$LR^2 = \left(m + \frac{1}{n}\right) lr^2.$$

Cela posé, en appelant P le poids de la colonne de mercure de longueur L, $\Delta$ le poids spécifique du mercure et $\pi$ le rapport de la circonférence au diamètre, nous aurons

$$P = \pi \Delta R^2 L.$$

D'où enfin nous déduirons, pour la valeur du rayon $r$ de la section du tube en un point quelconque,

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi\Delta\left(m + \frac{1}{n}\right) l}} = \sqrt{\frac{q}{l}},$$

$l$ étant la longueur calibrée à laquelle appartient le point donné, et $q$ la quantité

$$\frac{P}{\pi\Delta\left(m + \frac{1}{n}\right)}$$

constante pour un même tube.

On peut abréger de beaucoup les opérations en déterminant directement le poids $p$ de la colonne qui a servi au calibrage. On a simplement alors

$$r = \sqrt{\frac{p}{\pi\Delta} \cdot \frac{1}{l}}.$$

Ce poids $p$ est généralement trop faible pour qu'on puisse l'obtenir avec précision à l'aide de la balance ; mais on le détermine fort exactement en employant un tube divisé en parties d'égale capacité. A cet effet, on calibrera, on divisera et l'on vérifiera un tube capillaire, absolument comme si l'on voulait en faire la tige d'un thermomètre à divisions arbitraires. De plus, on déterminera, par la pesée d'une colonne de mercure occupant un grand nombre de divisions, le poids contenu dans une seule de celles-ci. Enfin, l'on ouvrira à la lampe l'une des extrémités du tube en forme d'entonnoir, et l'on aura ainsi un petit instrument fort simple, et qui m'a été d'un grand secours dans toutes ces expériences. Pour abréger le langage, j'appellerai ce tube divisé un *mesureur*.

Pour déterminer le poids de la petite colonne de mercure ayant servi au calibrage, il suffira de la faire tomber dans l'entonnoir du mesureur, puis de l'aspirer dans la tige et de lire le nombre $n$ de divisions qu'elle occupe. En appelant $k$ le poids de mercure contenu dans une division, on a

$$p = nk, \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{\frac{k}{\pi\Delta} \cdot \frac{n}{l}}.$$

Toutes ces opérations se font très-vite et très-facilement, surtout en employant le souffle de la bouche ; on abrége particulièrement l'opération du calibrage, en faisant ainsi marcher par le souffle la colonne calibrante. On peut le faire sans inconvénient, pourvu que l'on ne souffle jamais qu'à travers un appareil desséchant ; il suffit d'attacher au tube, à l'aide d'un tuyau de caoutchouc, un tube en U rempli de ponce imbibée d'acide sulfurique. A ce tube, on attache un autre tuyau de caoutchouc de 60 à 70$^{c}$, et enfin à ce tuyau, un tube à boules qui absorbe la plus grande partie de l'humidité.

Malgré la sécurité que donne cet appareil, je crois préférable de ne faire subir au tube aucune opération avant les expériences auxquelles il est destiné.

Je n'admets même pas qu'on puisse le nettoyer, si ce n'est pour certains liquides très-mobiles, tels que l'alcool, l'éther, etc.; mais nous verrons plus tard, en parlant de la dépression du mercure, quelles irrégularités peut faire naître un nettoyage en apparence parfait.

On devra donc généralement n'employer que des tubes n'ayant jamais servi, et, par suite, ne déterminer leurs rayons qu'après avoir terminé les expériences faites sur ces tubes. Il suffira de noter au cathétomètre, dans chaque expérience, la hauteur d'un point fixe du tube, son extrémité supérieure, par exemple; on pourra alors retrouver plus tard chaque point où l'on a observé le ménisque. Il est clair que l'on pourra aussi, en opérant de cette manière, s'abstenir d'un calibrage complet. Il suffira de mesurer la longueur d'une petite colonne de mercure dont on amène le milieu dans les points du tube où l'on veut connaître son diamètre, puis de déterminer son poids à l'aide d'un mesureur.

Nous allons maintenant entrer dans quelques détails généraux sur la mesure de la différence de hauteur du niveau d'un liquide dans un tube, et de son niveau dans un vase où plonge ce tube.

### *Mesure de l'élévation ou de la dépression d'un liquide dans un tube capillaire.*

Après avoir essayé différents procédés de mesure, pour les hauteurs dans les tubes capillaires, je suis revenu au procédé direct indiqué par Gay-Lussac, c'est-à-dire la mesure de ces hauteurs au moyen du cathétomètre. On vise directement le point le plus haut ou le plus bas du ménisque, en amenant en contact le fil horizontal du réticule. Quant à la hauteur du niveau, elle peut être prise de différentes manières : on peut se servir d'une pointe que l'on amène en contact avec le niveau, et que l'on vise après avoir retiré le vase. Cette nécessité de retirer le vase est une gêne souvent considérable; il est plus commode d'employer une vis terminée par deux pointes dont on a mesuré la distance, ou, ce que je trouve préférable, un petit tube terminé par deux pointes dont l'une est fermée, tandis que l'autre est traversée par un fil enroulé sur un arbre tournant. On peut laisser descendre très-lente-

ment ce tube, jusqu'à ce que la pointe inférieure touche le liquide. On vise alors le point le plus haut de l'extrémité supérieure, point dont on a mesuré d'avance la distance au point le plus bas de la pointe inférieure. Je préfère ce système à l'emploi de la vis, qu'il faut toujours avoir soin de placer bien verticalement, tandis que le tube se place ainsi de lui-même.

Ce moyen est très-commode pour toutes les expériences où il serait difficile de viser directement le niveau avec une précision suffisante; mais il ne donne facilement des résultats rigoureux que pour le mercure seul. Avec des liquides capables de mouiller le tube ou la vis, on peut, si l'on ne prend pas les plus grandes précautions, et si l'on n'a pas soin de reprendre deux ou trois fois la mesure de la hauteur du niveau, commettre dans cette mesure des erreurs accidentelles de 0,$^{mm}$1, ce qui est considérable, quand il s'agit de faibles hauteurs. C'est pourquoi je préfère, lorsque la disposition des appareils le permet, l'observation directe du niveau. Si l'on prend un vase cylindrique ou prismatique d'un beau verre d'égale épaisseur, dont les parois soient bien verticales, et si l'on a soin que la lunette du cathétomètre soit rigoureusement horizontale, on peut, en visant directement le niveau qui apparaît comme une ligne droite bien tranchée, déterminer sa hauteur avec la plus grande précision. Cette observation directe n'est pas aussi sûre pour le mercure, parce que la ligne du niveau ne se détache pas aussi nettement, ce qui se conçoit facilement : en effet, un ménisque concave présente des teintes de plus en plus foncées à mesure qu'on approche du niveau, de sorte que celui-ci tranche fortement sur la masse transparente du liquide; un ménisque convexe au contraire présente des teintes décroissantes vers le haut, et il suffit de certains jeux de lumière, avec le mercure surtout, pour que la teinte supérieure se fonde dans celle de l'atmosphère. Ces jeux de lumière se produisent difficilement dans des tubes de moins de 4 ou 5 centimètres de diamètre, mais il faut s'en défier quand on observe de larges surfaces, et il est prudent alors de ne prendre le niveau qu'avec une pointe.

Lorsqu'on observe le niveau directement, on a toujours, même en choisissant les vases les mieux dressés, lieu de craindre quelque erreur de réfraction ; c'est pourquoi il est bon de faire avant chaque expérience une observation préalable fort simple. On introduit dans le vase une pointe fixe à peu

près à la hauteur à laquelle on amènera plus tard le niveau. Après avoir visé cette pointe, on retire le vase et l'on s'assure si la coïncidence de la pointe et du fil de la lunette subsiste. Je n'ai jamais trouvé aucune déviation sensible à mon cathétomètre, c'est-à-dire allant jusqu'à $\frac{1}{20}$ de millimètre.

Je suis entré dans ces détails sur la mesure de la hauteur du niveau, afin de ne plus avoir à nous en préoccuper dans la suite. Les autres détails d'expériences seront particuliers aux différents phénomènes observés, et dans la description desquels nous allons entrer, en commençant par ceux de dépression, qui s'appliquent à un moins grand nombre de liquides.

### *Dépression des liquides dans les tubes de verre.*

Le mercure et les métaux fondus sont, je pense, les seuls liquides qui se dépriment dans les tubes de verre. D'autres liquides peuvent présenter des phénomènes de dépression au contact d'autres corps; c'est ainsi que l'eau peut être déprimée dans un tube de verre graissé. Ce fait a été contesté par G. de Morveau [1], qui fit voir que l'eau s'élève entre deux plaques couvertes d'une couche de suif. Néanmoins le fait de la dépression est exact, tout aussi bien que l'expérience de G. de Morveau ; tout dépend de la manière dont on produit le phénomène.

Si l'on plonge un tube graissé dans l'eau, on observe une dépression très-sensible, au moins aussi forte que celle que présenterait le mercure dans le même tube non graissé. De plus, chose fort remarquable, la surface intérieure du liquide est parfaitement plane. Au premier abord on croit découvrir dans ce fait une puissante objection aux théories de l'action capillaire, mais on ne tarde pas à reconnaître que cette anomalie n'est que momentanée; car au bout de quelques heures la dépression est entièrement disparue, l'égalité de niveau s'est établie dans le tube et dans le vase.

Si alors on retire le tube, la surface du liquide devient concave, et l'on observe une élévation dans le tube. En continuant à retirer le tube, le liquide y descend de manière à conserver à peu près l'élévation précédente. Parfois il en est de cette élévation comme de la dépression primitive, c'est-

[1] *Journal de Physique* de l'abbé Rozier, t. I, p. 169.

à-dire qu'au bout d'un temps assez long, elle est réduite à 0. Mais ce fait est moins général; j'ai observé plusieurs fois que l'élévation persistait, même dans des tubes de $2^{mm}$ de diamètre.

Ces phénomènes sont sans doute fort intéressants, et je me propose de les observer attentivement plus tard; actuellement, ils ne me paraissent pas pouvoir être mesurés avec assez de précision pour remplir le but que nous nous proposons, c'est-à-dire la vérification des principaux résultats de la théorie. C'est pour cette raison que nos observations ont uniquement porté sur la dépression du mercure. J'ai bien, à la vérité, fait quelques tentatives pour observer la dépression de quelques métaux fondus; mais elles n'ont abouti à aucun résultat satisfaisant, ainsi que nous le verrons bientôt.

### *Dépression du mercure.*

J'ai commencé par purifier une quantité assez considérable de mercure (environ 10 kilog.) afin de ne pas devoir me servir trop longtemps d'une même masse. J'opérai cette purification par des lavages successifs et prolongés à l'acide azotique étendu, et à l'alcool.

Cela fait, je pris à peu près au hasard différents tubes d'un même cristal. L'expérience m'avait appris que tout nettoyage, ou en général toute opération exécutée à l'intérieur d'un tube, agissait très-sensiblement sur la dépression. J'évitai donc toute altération possible, et par suite je m'abstins de rechercher si les tubes étaient bien calibrés. Je me contentai, pour obtenir quelque indice sur ce point, d'observer au moyen de la lunette micrométrique d'une machine à diviser, si les diamètres des deux extrémités des tubes ne différaient pas notablement. Je m'assurai en même temps du degré d'ellipticité de la section des tubes, et je rejetai ceux qui s'écartaient trop de la forme cylindrique.

Je désirais surtout vérifier le fait si important, signalé par mes premières expériences, savoir : l'influence de l'épaisseur des parois du tube sur la dépression. Je choisis donc de préférence des tubes très-épais, et je m'en construisis de très-minces, en effilant des tubes de même nature que les tubes épais. J'éprouvai d'abord quelque difficulté à obtenir de ces tubes effilés suffi-

samment cylindriques. Je reconnus que l'on pouvait y arriver en soufflant dans le tube en même temps qu'on l'étire. On obtient ainsi des tubes bien réguliers sur une longueur de 1 à 2 décimètres, ce qui me suffisait, et de plus, remarquablement circulaires; aucun d'eux, observés au microscope, ne m'a présenté d'ellipticité sensible. Afin de pouvoir faire sur ces tubes quelques séries d'expériences, sans crainte de les briser, je les mastiquai dans un tube plus large, qui leur servait d'enveloppe.

J'adoptai dans ces expériences le procédé d'observation le plus simple, qui consiste à faire communiquer le tube avec un vase assez large pour que la surface du mercure y fût un plan horizontal. Je pris pour cela des fragments de tubes de quatre à cinq centimètres de diamètre, et, à une extrémité, je mastiquai un bouchon à travers lequel passaient cinq bouts de tubes recourbés. Enfin, sur ces tubes je raccordai, au moyen de tuyaux en caoutchouc, les tubes capillaires. Il ne restait plus qu'à fixer ceux-ci bien verticalement, à verser du mercure dans l'appareil, et à viser successivement au cathétomètre le niveau dans le tube large et dans les cinq tubes capillaires.

J'avais songé d'abord à un autre genre d'appareil, qui paraissait débarrasser l'observation de deux causes possibles d'erreurs, savoir : les impuretés qui peuvent se déposer à la surface du mercure, et la couche d'air adhérente aux parois du tube. Pour éliminer ces deux causes, j'imaginai de construire de longs thermomètres d'environ quatre-vingts centimètres de hauteur. En apportant à cette construction tous les soins nécessaires à la fabrication d'un thermomètre de précision, on peut être certain que la tige et le mercure sont parfaitement purgés d'air et de toute impureté. Mais j'avais à craindre une cause d'erreurs très-puissante, et qui consisterait dans le dépôt par le souffle d'une couche de matière grasse sur la surface intérieure du tube. Pour éviter cette source d'irrégularités, je pris des tubes parfaitement propres, qui n'avaient pas encore été débouchés; j'en fermai une extrémité à la lampe, et à l'autre je colai, toujours à la lampe et sans l'aide de la bouche, un tube terminé par une forte boule de verre; ce fut en dilatant l'air de cette boule que je soufflai dans le verre même du tube capillaire une série de petites boules, lesquelles constituèrent mon réservoir. — Les personnes initiées à l'art du souffleur à la lampe, reconnaîtront dans l'opération précédente celle

par laquelle on commence la formation d'un réservoir thermométrique cylindrique. — Ayant ainsi construit deux thermomètres, je les plongeai dans une cuvette à mercure, et sous le liquide, au moyen d'une pince, je brisai les réservoirs. Les thermomètres devenaient aussitôt de véritables baromètres, dont les hauteurs ne devaient différer de celle d'un baromètre normal, plongé dans la même cuvette, que par la dépression capillaire.

Malgré les précautions minutieuses que j'ai décrites, je n'obtins dans ces expériences aucun résultat; je reconnus que l'on pouvait produire à peu près telle dépression que l'on voulait. En effet, lorsque l'équilibre semble établi, on peut soulever le tube ou l'enfoncer davantage dans la cuvette sans que le haut de la colonne de mercure se déplace. Ce fait est très-probablement dû à la puissance du frottement s'exerçant sur une grande longueur. Et nous devons observer qu'il s'agit ici d'un frottement tout à fait naturel, c'est-à-dire produit par le contact réel du mercure et du verre, et non par l'interposition d'une substance étrangère. Il est à présumer qu'en employant des tubes moins capillaires que ceux que j'ai employés (leurs diamètres n'excédaient pas $0^{mm},2$), ce mode d'observation pourrait donner quelque résultat; mais il aurait toujours l'inconvénient de donner trop d'importance au frottement.

Je revins donc à l'appareil simple décrit d'abord, et j'observai la dépression du mercure dans les tubes capillaires :

1° Lorsque ce liquide s'élève librement dans ces tubes sous l'influence de la pression dans le vase ;

2° Lorsqu'il y descend librement ;

3° Lorsqu'il s'élève et que son ascension est aidée par des secousses ;

4° Lorsqu'il descend et que son mouvement descendant est aussi aidé par des secousses.

Ces observations sont comprises dans les tableaux I, II, III, IV : E représente l'épaisseur des tubes, $r$ leur rayon, $h_1$, les dépressions observées, $h$ la dépression moyenne correspondante à un rayon donné. Enfin $(h + \frac{r}{3})r$ est le produit du rayon par la hauteur corrigée. Cette correction, qui a été indiquée par Gay-Lussac et Laplace, suppose que le ménisque est à très-peu près une demi-sphère. D'après quelques-unes de mes premières observations, il paraîtrait que, même pour des rayons assez petits, la hauteur du ménisque n'est

pas égale au rayon, mais seulement à la moitié du rayon. En supposant que la surface du ménisque soit un ellipsoïde de révolution dont le petit axe égale la moitié du grand axe, on trouve qu'il faut ajouter à la hauteur observée non pas le tiers, mais le sixième du rayon. Quoi qu'il en soit, comme nous avons surtout pour but de vérifier la théorie, nous nous astreindrons aux corrections qu'elle indique.

*Dépression du mercure.*

TABLEAU I.

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.117 | 0,05833 | 70.90 | 70.88 | 4.136 | | | 0,07075 | 72.55 | 72.13 | 5.104 |
| | | | 70.60 | | | | | | 71.70 | | |
| | | | 71.15 | | | | | 0,07159 | 72.60 | 75.52 | 5.420 |
| | | 0.05625 | 78.20 | 79.05 | 4.448 | | | | 76.85 | | |
| | | | 79.90 | | | | | | 77.10 | | |
| 2 | 4.447 | 0,06343 | 88.90 | 88.90 | 5.640 | 7 | 0.090 | 0,07131 | 63.40 | 62.80 | 4.478 |
| | | 0,06537 | 89.00 | 88.03 | 5.579 | | | | 62.20 | | |
| | | | 88.80 | | | 8 | 0.115 | 0,06925 | 69.90 | 69.05 | 4.795 |
| | | | 86.30 | | | | | | 68.20 | | |
| | | 0,06216 | 90.40 | 89.95 | 5.592 | | | 0,06894 | 68.65 | 67.95 | 4.685 |
| | | | 88.50 | | | | | | 67.25 | | |
| | | 0,06268 | 86.80 | 86.28 | 5.409 | | | 0,07580 | 60.50 | 60.35 | 4.576 |
| | | | 86.10 | | | | | | 60.20 | | |
| | | | 86.95 | | | | | | 56.10 | 56.98 | 4.464 |
| 3 | 0.090 | 0,06537 | 70.20 | 69.52 | 4.533 | | | | 57.85 | | |
| | | | 67.90 | | | | | | 57.00 | | |
| | | | 69.85 | | | | | | | | |
| | | 0,06600 | 72.50 | 72.45 | 4.785 | 9 | 4.889 | 0,08424 | 69.30 | 68.75 | 5.794 |
| | | | 72.40 | | | | | | 69.55 | | |
| 4 | 2.480 | 0,0683 | 72.40 | 72.40 | 4.947 | | | | 67.40 | | |
| 5 | 0.093 | 0,07033 | 63.80 | 62.83 | 4.420 | | | 0,08936 | 58.20 | 59.03 | 5.277 |
| | | | 62.50 | | | | | | 59.85 | | |
| | | | 62.40 | | | | | 0,08656 | 60.50 | 61.60 | 5.334 |
| | | 0,06375 | 69.50 | 68.90 | 4.393 | | | | 62.90 | | |
| | | | 68.30 | | | | | 0,08639 | 58.30 | 58.35 | 5.043 |
| 6 | 4.687 | 0,06951 | 82.40 | 78.90 | 5.491 | | | | 57.55 | | |
| | | | 79.95 | | | | | | 59.20 | | |
| | | | 77.75 | | | 10 | 0.105 | 0,09307 | 47.10 | 47.68 | 4.439 |
| | | | 75.85 | | | | | | 48.25 | | |

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 4.715 | 0,09435 | 55.95 | 54.50 | 5.145 | | | | 37.50 | | |
| | | | 54.15 | | | | | 0,1270 | 37.40 | 37.90 | 4.819 |
| | | | 53.40 | | | | | | 38.60 | | |
| | | 0,09624 | 47.80 | 47.03 | 4.529 | | | | 37.70 | | |
| | | | 46.25 | | | 17 | 0.150 | 0,1242 | 36.85 | 37.08 | 4.611 |
| | | 0,09500 | 53.15 | | | | | | 37.30 | | |
| | | | 52.50 | 52.37 | 4.978 | | | 0,1278 | 34.80 | 34.15 | 4.370 |
| | | | 51.45 | | | | | | 33.50 | | |
| | | 0,09452 | 49.45 | 49.48 | 4.680 | | | 0,1514 | 31.55 | 30.43 | 4.611 |
| | | | 49.50 | | | | | | 29.30 | | |
| 12 | 0.160 | 0,09903 | 47.35 | 47.28 | 4.685 | | | 0,1447 | 30.85 | 30.85 | 4.471 |
| | | | 87.60 | | | 18 | 3.928 | 0,1302 | 38.80 | 37.42 | 4.878 |
| | | | 46.90 | | | | | | 37.45 | | |
| | | 0,09759 | 49.85 | 49.20 | 4.805 | | | | 35.95 | | |
| | | | 48.55 | | | | | 0,1300 | 38.70 | 36.42 | 4.743 |
| 13 | 0.171 | 0,1051 | 42.30 | 41.02 | 4.314 | | | | 35.60 | | |
| | | | 41.40 | | | | | | 34.95 | | |
| | | | 39.05 | | | | | 0,1274 | 38.00 | 37.28 | 4.756 |
| | | 0,09885 | 48.25 | 48.78 | 4.870 | | | | 37.25 | | |
| | | | 49.30 | | | | | | 36.60 | | |
| 14 | 2.414 | 0,1069 | 41.35 | 40.70 | 4.353 | 19 | 3.040 | 0,1539 | 36 | | 4.847 |
| | | | 40.60 | | | 20 | 4.158 | 0,1700 | 33.40 | 34.03 | 5.794 |
| | | | 40.15 | | | | | | 34.65 | | |
| | | 0,1062 | 46.40 | 45.43 | 4.831 | | | 0,1731 | 29.25 | 28.15 | 4.883 |
| | | | 45.15 | | | | | | 27.05 | | |
| | | | 44.75 | | | | | 0,1716 | 30.60 | 30.60 | 5.260 |
| | | 0,1055 | 42.65 | 43.97 | 4.642 | | | 0,1711 | 30.15 | 30.15 | 5.169 |
| | | | 45.95 | | | | | 0,1719 | 31.70 | 31.70 | 5.458 |
| | | | 43.30 | | | 21 | 4.000 | 0,1771 | 24.80 | 25.13 | 4.461 |
| 15 | 0.100 | 0,1221 | 33.50 | 34.15 | 4.174 | | | | 25.45 | | |
| | | | 34.80 | | | | | 0,1771 | 33.60 | 33.60 | 5.951 |
| | | 0,1162 | 37.85 | 36.63 | 4.262 | | | 0,1783 | 31.75 | 31.55 | 5.634 |
| | | | 35.40 | | | | | | 31.35 | | |
| | | 0,1135 | 38.80 | 38.80 | 4.400 | | | 0,1783 | 38.05 | 38.13 | 6.807 |
| | | 0,1206 | 37.90 | 37.53 | 4.530 | | | | 38.20 | | |
| | | | 37.15 | | | 22 | 4.005 | 0,1790 | 25.45 | 25.48 | 4.560 |
| 16 | 3.073 | 0,1273 | 40.00 | 38.72 | 4.934 | | | | 25.50 | | |
| | | | 38.70 | | | | | 0,1804 | 40.00 | 38.92 | 7.031 |
| | | | 37.45 | | | | | | 37.85 | | |
| | | 0,1270 | 38.70 | 38.13 | 4.848 | | | 0,1798 | 38.15 | 39.15 | 7.041 |
| | | | 38.20 | | | | | | 42.00 | | |

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 36.70 | | | | | | 24.70 | | |
| 23 | 2.203 | 0,1920 | 22.85 | 22.53 | 4.337 | | | | 19.60 | | |
| | | | 22.40 | | | | | | 21.20 | | |
| | | 0,1920 | 27.40 | 27.33 | 5.259 | 25 | 0.09 | 0,6706 | 6.25 | 6.25 | 4.285 |
| | | | 27.25 | | | | | | 6.25 | | |
| | | 0,1893 | 32.15 | 32.98 | 6.255 | | | | 6.25 | | |
| | | | 34.20 | | | 26 | 1.43 | 0,8906 | 4.90 | 5.05 | 4.640 |
| | | | 32.60 | | | | | | 5.30 | | |
| 24 | 1.410 | 0,6200 | 7.20 | 6.75 | 4.315 | | | | 4.95 | | |
| | | | 6.30 | | | 27 | 1.62 | 0,9694 | 3.95 | 4.05 | 4.091 |
| | | 0,6200 | 13.50 | 19.96 | 12.506 | | | | 4.00 | | |
| | | | 20.80 | | | | | | 4.20 | | |

## TABLEAU II.

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 52.60 | 0,0609 | 51.75 | 52.00 | 3.204 | | | 0,0689 | 53.60 | 53.60 | 3.696 |
| | | | 53.45 | | | 8 | 4.889 | 0,0825 | 54.40 | 54.55 | 4.501 |
| 2 | 74.40 | 0,0643 | 75.20 | 74.40 | 4.788 | | | | 54.40 | | |
| | | | 74.80 | | | | | | 54.85 | | |
| | | | 73.20 | | | | | 0,0865 | 29.90 | 29.90 | 2.588 |
| | 61.45 | 0,0624 | 61.45 | | 3.836 | | | 0,0842 | 36.95 | 36.95 | 3.113 |
| | 56.90 | 0,0654 | 56.90 | | 3.609 | 9 | 0.105 | 0,0910 | 36.50 | 36.50 | 3.324 |
| 3 | 46.70 | 0,0677 | 46.70 | 0.090 | 3.163 | 10 | 4.715 | 0,0943 | 54.40 | 52.97 | 4.998 |
| | 52.25 | 0,0665 | 52.25 | | 3.476 | | | | 51.70 | | |
| 4 | 39.50 | 0,0790 | 38.70 | 0.093 | 3.122 | | | | 52.80 | | |
| | | | 40.30 | | | | | 0,0958 | 41.00 | 40.27 | 3.859 |
| 5 | 65.10 | 0,0683 | 65.20 | 4.687 | 4.479 | | | | 38.45 | | |
| | | | 65.00 | | | | | | 41.35 | | |
| | 70.90 | 0,0695 | 70.90 | | 4.928 | | | 0,0949 | 47.80 | 47.80 | 4.537 |
| | 57.00 | 0,0721 | 57.75 | | 4.039 | 11 | 0.160 | 0,0974 | 30.95 | 32.83 | 3.198 |
| | | | 56,25 | | | | | | 34.70 | | |
| | 47.85 | 0,0695 | 47.85 | | 3.326 | 12 | 0.171 | 0,1048 | 32.45 | 32.45 | 3.399 |
| 6 | 35.65 | 0,0722 | 35.65 | 0.090 | 2.576 | | | 0,1006 | 37.00 | 37.00 | 3.722 |
| | 44.90 | 0,0716 | 44.90 | | 3.218 | 13 | 2.414 | 0,1066 | 34.60 | 34.60 | 3.688 |
| 7 | 39.83 | 0,0783 | 39.55 | 0.115 | 3.120 | | | 0,1055 | 39.90 | 39.90 | 4.209 |
| | | | 40.10 | | | 14 | 0.100 | 0,1221 | 28.55 | 28.55 | 3.486 |
| | 49.55 | 0,0735 | 49.33 | | 3.642 | | | 0,1160 | 32.70 | 32.70 | 3.794 |

| Nos des tubes | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $h$ | $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0,1133 | 38.40 | 38.40 | 4.331 | | | 0,1711 | 25.70 | 25.38 | 4.350 |
| 15 | 3.073 | 0,1273 | 29.35 | 29.35 | 3.736 | | | | 25.05 | | |
| | | 0,1270 | 31.50 | 31.50 | 4.001 | | | 0,1719 | 26.60 | 26.60 | 4.585 |
| 16 | 0.150 | 0,1255 | 29.05 | 30.40 | 3.818 | 19 | 4.000 | 0,1783 | 25.70 | 25.70 | 4.586 |
| | | | 31.75 | | | | | 0,1795 | 33.20 | 33.20 | 5.981 |
| | | 0,1318 | 31.00 | 31.00 | 4.086 | 20 | 4.005 | 0,1777 | 15.15 | 15.15 | 2.702 |
| | | 0,1341 | 27.05 | 27.05 | 4.168 | | | 0,1801 | 27.10 | 27.10 | 4.888 |
| 17 | 3.928 | 0,1302 | 26.85 | 26.85 | 3.495 | 21 | 2.203 | 0,1918 | 10.30 | 10.30 | 1.989 |
| | | 0,1274 | 30.30 | 30.30 | 3.861 | | | 0,1893 | 12.00 | 12.00 | 2.279 |
| 18 | 4.158 | 0,1700 | 25.65 | 34.60 | 5.992 | 22 | 1.410 | 0,6200 | 8.10 | 8.10 | 5.152 |
| | | | 32.25 | | | | | | 11.70 | 11.70 | 7.378 |
| | | | 32.90 | | | | | | | | |

TABLEAU III.

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $\left(h_1+\frac{r}{3}\right)r$ | Produit moyen. | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $\left(h_1+\frac{r}{3}\right)r$ | Produit moyen. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.117 | 0,0615 | 58.60 | 3.606 | 3.929 | 13 | 2.414 | 0,1069 | 38.10 | 4.075 | 4.452 |
| | | 0,0634 | 69.15 | 4.389 | | | | 0,1062 | 43.60 | 4.636 | |
| | | 0,0603 | 63.90 | 3.853 | | | | 0,1055 | 44.00 | 4.645 | |
| 3 | 0 090 | 0,0671 | 53.20 | 3.572 | 4.139 | 14 | 0.100 | 0,1221 | 33.50 | 4.095 | 4.461 |
| | | 0,0659 | 66.50 | 4.385 | | | | 0,1162 | 35.80 | 4.165 | |
| | | 0,0677 | 65.85 | 4.460 | | | | 0,1133 | 41.05 | 4.656 | |
| 4 | 0.093 | 0,0767 | 44.65 | 3.430 | 4.238 | | | 0,1206 | 37.00 | 4.466 | |
| | | 0,0703 | 62.20 | 4.377 | | 15 | 3.073 | 0,1273 | 35.95 | 4.581 | 4.615 |
| | | 0,0767 | 63.90 | 4.908 | | | | 0,1270 | 36.10 | 4.590 | |
| 6 | 0.090 | 0,0722 | 56.85 | 4.110 | 4.199 | | | 0,1270 | 37.10 | 4.717 | |
| | | 0,0713 | 60.50 | 4.316 | | 16 | 0.150 | 0,1242 | 37.00 | 4.601 | 4.628 |
| | | 0,0719 | 57.80 | 4.172 | | | | 0,1278 | 35.30 | 4.517 | |
| 7 | 0.115 | 0,0770 | 54.30 | 4.187 | 4.484 | | | 0,1314 | 31.45 | 4.766 | |
| | | 0,0758 | 59.40 | 4.505 | | 17 | 3.928 | 0,1302 | 30.00 | 3.911 | 4.330 |
| | | 0,0689 | 66.95 | 4.618 | | | | 0,1282 | 34.65 | 4.446 | |
| | | 0,0692 | 66.80 | 4.626 | | | | 0,1274 | 34.75 | 4.433 | |
| 9 | 0.105 | 0,0903 | 50.35 | 4.689 | 4.689 | 19 | 4 000 | 0,1783 | 24.80 | 4.432 | 4.707 |
| 11 | 0.160 | 0,0982 | 37.55 | 3.691 | 3.893 | | | 0,1783 | 28.35 | 5.065 | |
| | | 0,0982 | 42.90 | 4.217 | | | | 0,1771 | 26.05 | 4.625 | |
| | | 0,0977 | 38.55 | 3.772 | | 20 | 4.005 | 0,1790 | 24.90 | 4.468 | 4.953 |
| 12 | 0.171 | 0,1022 | 34.90 | 3.570 | 3.972 | | | 0,1790 | 25.50 | 4.576 | |
| | | 0,1010 | 39.45 | 4.373 | | | | 0,1800 | 32.25 | 5.814 | |

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $\left(h_1+\frac{r}{5}\right)r$ | Produit moyen. | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $\left(h_1+\frac{r}{5}\right)r$ | Produit moyen. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 2.203 | 0,1920 | 23.60 | 4.543 | 4.928 | 22 | 1.410 | 0,6200 | 7.20 | 4.388 | |
| | | 0,1920 | 22.70 | 4.370 | | | | | 5.90 | 3.782 | |
| | | 0,1893 | 30.05 | 5.870 | | | | | 17.03 | 10.695 | |

**TABLEAU IV.**

| Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $\left(h_1+\frac{r}{5}\right)r$ | Produit moyen. | Nos des tubes. | E | $r$ | $h_1$ | $\left(h_1+\frac{r}{5}\right)r$ | Produit moyen. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.117 | 0,0615 | 59.00 | 3.631 | 3.539 | 14 | 0.100 | 0,1221 | 31.65 | 3.869 | 4.072 |
| | | 0,0615 | 56.00 | 3.446 | | | | 0,1221 | 34.30 | 4.192 | |
| 3 | 0.090 | 0,0671 | 54.60 | 3 666 | 3.675 | | | 0,1160 | 33.00 | 3.831 | |
| | | 0,0671 | 54.85 | 3.683 | | | | 0,1133 | 38.75 | 4.395 | |
| 4 | 0.093 | 0,0703 | 61.45 | 4.323 | 4.084 | 15 | 0.073 | 0,1273 | 35.10 | 4.473 | 4.716 |
| | | 0,0703 | 54.65 | 3.845 | | | | 0,1270 | 39.00 | 4.958 | |
| 6 | 0.090 | 0,0719 | 49.80 | 3.586 | 3.453 | 16 | 0.150 | 0,1254 | 30.45 | 3.824 | 4.336 |
| | | 0,0719 | 46.10 | 3.320 | | | | 0,1254 | 34.00 | 4.269 | |
| 7 | 0.115 | 0,0808 | 43.70 | 3.536 | 4.106 | | | 0,1248 | 36.85 | 4.604 | |
| | | 0,0808 | 51.00 | 4.127 | | | | 0,1308 | 34.00 | 4.452 | |
| | | 0,0824 | 53.55 | 4.419 | | | | 0,1541 | 29.35 | 4.530 | |
| | | 0,0754 | 56.60 | 4.293 | | 17 | 3.928 | 0,1302 | 27.40 | 3.571 | |
| | | 0,0689 | 60.25 | 4.155 | | | | 0,1274. | 30 75 | 3.922 | |
| 9 | 0.105 | 0,0930 | 51.15 | 4.760 | 4.993 | 19 | 4.000 | 0,1783 | 25.25 | 4.156 | 4.959 |
| | | 0,0930 | 56.15 | 5.226 | | | | 0,1771 | 31.90 | 5.661 | |
| 11 | 0.160 | 0,0986 | 43.80 | 4.323 | 3.924 | 20 | 4.005 | 0,1790 | 24.25 | 4.352 | 4.866 |
| | | 0,0974 | 36.15 | 3.525 | | | | 0,1798 | 29.85 | 5.379 | |
| 12 | 0.171 | 0,1040 | 34.35 | 3.575 | 3.630 | 21 | 2.203 | 0,1920 | 23.20 | 4.466 | 4.355 |
| | | 0,0988 | 37.25 | 3.685 | | | | 0,1893 | 22.35 | 4.243 | |
| 13 | 2.414 | 0,1069 | 38.25 | 4.090 | 4.254 | 22 | 1.410 | 0,6200 | 7.30 | 4.656 | |
| | | 0,1055 | 41.85 | 4.418 | | | | 0,6200 | 16.50 | 10.360 | |

Nous allons examiner successivement les résultats précédents, et particulièrement ceux des tableaux I et II (relatifs à l'ascension ou à la descente libres du mercure dans les tubes, sous l'influence de la pression dans le vase ou dans le tube), qui sont les seuls présentant une constance assez satisfaisante. C'est de ces tableaux que nous tirerons les conclusions suivantes; mais nous devons tout d'abord expliquer d'où proviennent les fortes irrégularités présentées par les tubes 21, 22, 23 et 24. Les deux premières observations faites sur ces tubes m'avaient fourni les nombres que j'ai inscrits d'abord, et qui

donnent des produits très-faibles. J'attribuai cette anomalie à l'état de la surface intérieure du verre, et je nettoyai ces quatre tubes à l'alcool et à l'eau, puis à l'acide sulfurique et, pour terminer, de nouveau à l'eau et à l'alcool. J'obtins alors les autres valeurs qui sont, on le voit, très-irrégulières et beaucoup trop fortes. C'est de cette expérience que je crois pouvoir conclure que tout nettoyage d'un tube, quelque parfait qu'il soit, doit modifier l'état de la surface du verre, et par suite les phénomènes capillaires. On ne devra opérer ce nettoyage que dans le cas où il peut se terminer à l'aide du liquide même sur lequel on veut observer. Dans ce cas, la surface du verre agissant moins immédiatement, un changement dans son état a peu d'influence.

Si, écartant ces derniers résultats anormaux, nous partageons les tubes en trois classes, d'après leur épaisseur, et si nous prenons les moyennes des produits $(h + \frac{r}{3})r$ pour chaque tube, puis les moyennes pour chaque classe de tubes, nous trouverons les résultats suivants :

*Dépression du mercure dans des tubes capillaires, succédant à un mouvement ascendant de ce liquide dans ces tubes.*

| TUBES dont l'épaisseur est de 0,mm1 à 0,mm2. | | | TUBES dont l'épaisseur est de 1mm à 3mm. | | | TUBES dont l'épaisseur surpasse 4mm. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nos des tubes. | Rayon $r$ | Produit de la dépression par le rayon $(h+\frac{r}{3})r$ | Nos des tubes. | Rayon $r$ | Produits de la dépression par le rayon $(h+\frac{r}{3})r$ | Nos des tubes. | Rayon $r$ | Produit de la dépression par le rayon $(h+\frac{r}{3})r$ |
| 1 | 0,057 | 4.473 | 4 | 0,068 | 4.947 | 2 | 0,063 | 5.555 |
| 3 | 0,066 | 4.658 | 14 | 0,106 | 4.609 | 6 | 0,071 | 5.338 |
| 5 | 0,067 | 4.407 | 16 | 0,127 | 4.867 | 9 | 0,086 | 5.362 |
| 7 | 0,071 | 4.478 | 18 | 0,129 | 4.792 | 11 | 0,095 | 4.833 |
| 8 | 0,071 | 4.630 | 19 | 0,134 | 4.847 | 20 | 0,171 | 5.313 |
| 10 | 0,093 | 4.439 | 26 | 0,891 | 4.640 | | | |
| 12 | 0,098 | 4.745 | 27 | 0,969 | 4.091 | | | |
| 13 | 0,102 | 4.592 | | | | | | |
| 15 | 0,121 | 4.342 | | | | | | |
| 17 | 0,137 | 4.516 | | | | | | |
| 25 | 0,671 | 4.285 | | | | | | |
| Moyennes...... | | 4.550 | .............. | | 4.813 | .............. | | 5.280 |

*Dépression du mercure dans les tubes capillaires, succédant à un mouvement descendant de ce liquide dans ces tubes.*

| TUBES dont l'épaisseur est de $0^{mm},1$ à $0^{mm},2$. | | | TUBES dont l'épaisseur est de $1^{mm}$ à $2^{mm}$. | | | TUBES dont l'épaisseur surpasse $4^{mm}$. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N$^{os}$ des tubes. | Rayon $r$ | Produit $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ | N$^{os}$ des tubes. | Rayon $r$ | Produit $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ | N$^{os}$ des tubes. | Rayon $r$ | Produit $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$ |
| 1 | 0,057 | 3.204 | 13 | 0,106 | 3.949 | 2 | 0,063 | 4.078 |
| 3 | 0,066 | 3.340 | 15 | 0,127 | 3.869 | 5 | 0,071 | 4.193 |
| 4 | 0,067 | 3.122 | 17 | 0,129 | 3.678 | 8 | 0,086 | 3.401 |
| 6 | 0,071 | 2.897 | | | | 10 | 0,095 | 4.465 |
| 7 | 0,071 | 3.486 | | | | 18 | 0,171 | 4.952 |
| 9 | 0,093 | 3.524 | | | | | | |
| 11 | 0,098 | 3.193 | | | | | | |
| 12 | 0,102 | 3.351 | | | | | | |
| 14 | 0,121 | 3.877 | | | | | | |
| 16 | 0,137 | 4.024 | | | | | | |
| Moyennes. . . . . . | | 3.403 | . . . . . . . . . . . . . | | 3.832 | . . . . . . . . . . . . . . . | | 4.217 |

De ces tableaux on conclut :

1° Que la dépression du mercure dans un tube capillaire est plus forte lorsqu'elle succède à un mouvement ascendant de ce liquide, que lorsqu'elle s'établit après un mouvement descendant;

2° Que le phénomène se produit avec plus de régularité dans le premier cas que dans le second;

3° Que la dépression du mercure dans les deux cas paraît dépendre de l'épaisseur des parois des tubes;

4° Que, pour des tubes d'épaisseur peu différentes et dont les rayons ne dépassent pas $0^{mm},2$, les dépressions sont en raison inverse des rayons;

5° Que les différences des dépressions observées dans les deux cas sont indépendantes des épaisseurs des parois, c'est-à-dire que les dépressions dans les tubes minces, après un mouvement ascendant et après un mouvement descendant, diffèrent autant l'une de l'autre que les dépressions analogues observées dans les tubes de moyenne épaisseur, ou dans les tubes très-épais.

Je m'abstiens de discuter les chiffres que j'ai obtenus en donnant aux tubes des secousses; ces résultats sont, comme on pouvait s'y attendre, très-irréguliers; cependant on peut en conclure avec quelque certitude que les dépressions obtenues de cette manière étaient les mêmes, soit que le liquide s'élevât ou s'abaissât dans le tube. De plus, je me suis convaincu que cette même valeur des deux dépressions en était bien une limite commune; c'est-à-dire que l'on ne pouvait pas faire descendre le mercure descendant plus bas que le point auquel il était possible de le faire monter quand il s'élevait; quand on était arrivé à cette limite commune, la continuation des secousses n'amenait plus qu'un changement de direction dans le sens du mouvement, de sorte que le mercure, au lieu de continuer à descendre, remontait et réciproquement. Remarquons encore que, dans ces mesures, on ne constate pas l'influence de l'épaisseur des parois.

Des conclusions précédentes, deux méritent un examen approfondi : ce sont celles qui concernent l'influence de l'épaisseur et la loi du rapport inverse de la dépression au rayon; nous examinerons bientôt cette dernière en détail; mais nous devons d'abord reprendre attentivement l'étude de cette question si importante de l'influence de l'épaisseur. La solution affirmative que nous en avons obtenue déciderait si nettement l'inexactitude du principe fondamental de l'attraction moléculaire, que les résultats précédents, malgré leur constance, malgré la confiance que nous devions avoir dans l'évaluation des dépressions et des diamètres, n'avaient pu dissiper tous nos doutes. C'est pourquoi je repris la mesure du diamètre de tous les tubes qui me restaient, mais les valeurs que j'obtins différaient si peu de celles qui sont inscrites dans mes tableaux, qu'il est inutile de les rapporter ici. Il ne restait donc aucune incertitude sur l'exactitude des mesures; car les valeurs trouvées pour une même dépression se contrôlent mutuellement. Il fallait dès lors chercher à reconnaître si l'influence observée était essentielle au phénomène, ou seulement due à des causes accidentelles de nature telle que les théories ne puissent ni les prévoir, ni en calculer les effets.

En rendant compte, dans la *Bibliothèque universelle* de Genève (juin 1855), de mon premier mémoire, M. Soret indique un moyen de résoudre cette question. Il conseille de diminuer l'épaisseur des tubes par un moyen méca-

nique, ou mieux, par une corrosion à l'acide fluorhydrique. Ce serait un moyen de reconnaître si l'influence observée de l'épaisseur est réellement due à une action sensible à distance, et M. Soret croit que l'on pourrait expliquer cette influence autrement que par une telle action. Évidemment, dit-il, les tubes de verre ramollis au moment de leur fabrication doivent se refroidir bien plus lentement quand ils sont épais que lorsqu'ils sont minces, et l'état de la surface intérieure a dû être modifié par un phénomène analogue au recuit et à la trempe, qui pourrait bien influer sur l'attraction moléculaire latérale.

Avant d'avoir lu cet article, j'avais fait quelques expériences fondées sur un principe tout différent de celui des observations proposées par M. Soret, et ces deux modes d'investigations me paraissent se compléter heureusement. En effet, tandis que M. Soret conseille de réduire artificiellement l'épaisseur des parois de tubes épais, je m'étais proposé d'augmenter artificiellement l'épaisseur des tubes à parois très-minces. Voici comment j'opérai.

Quatre tubes effilés *t* (*fig.* 10) étaient mastiqués dans un tube T réuni à un autre tube T′ très-large par un tube de caoutchouc, et mastiqué lui-même dans un tube M de 25 millimètres de diamètre, qui formait ainsi un manchon entourant les quatre tubes capillaires. Au fond de ce manchon s'ouvrait un robinet. On commençait par observer la dépression du mercure dans les tubes capillaires en versant du mercure dans le tube T′. Cela fait, on retirait de ce tube une certaine quantité de mercure que l'on conservait à part. Le niveau baissait dans les quatre tubes *t*; alors, tout autour de ces tubes je versais du mercure jusqu'à une hauteur plus grande que celle à laquelle le mercure s'était élevé le plus haut dans ces tubes, pendant l'observation précédente. Enfin je reversai dans le tube T′ le mercure que j'en avais retiré, et je laissai l'équilibre s'établir pendant vingt-quatre heures. Au bout de ce temps je faisais écouler le mercure du manchon, jusqu'à découvrir successivement le niveau dans chacun des tubes. La lenteur, constamment observée, des mouvements du mercure dans les tubes capillaires, m'était un garant que, pendant cette opération, le liquide n'était pas descendu d'une quantité sensible dans les tubes *t*, en admettant même qu'il eût une tendance à suivre le mouvement du mercure extérieur. Je pouvais de cette façon observer la dépression qui s'était produite dans les tubes entourés de mercure. Ce métal

constituait une épaisseur additionnelle qui devait, à cause de sa grande densité, agir beaucoup plus fortement que n'aurait pu le faire une épaisseur égale de verre. J'ai effectué ainsi huit observations, quatre pour déterminer la dépression dans les tubes capillaires non entourés de mercure, et quatre autres pour déterminer cette dépression produite pendant que le manchon était rempli de mercure. Les résultats que j'ai obtenus sont consignés dans le le tableau suivant.

*Dépressions sans mercure ambiant.*

| TEMPÉRATURE des expériences. | TUBE I $r = 0,327$. | TUBE II $r = 0,172$. | TUBE III $r = 0,149$. | TUBE IV $r = 0,108$. |
|---|---|---|---|---|
| | mm. | mm. | mm. | mm. |
| I. . . . . . . 6°,5 | » | 23.35 | 27.95 | 39.65 |
| II . . . . . . 6,3 | 11.30 | 23.65 | 27.40 | 38.50 |
| III. . . . . . 13,3 | 11.55 | » | 25.60 | 37.15 |
| IV. . . . . . 9,1 | 11.15 | 23.80 | 26.05 | 37.20 |
| MOYENNES. . . . . | 11.33 | 23.60 | 26.75 | 38.13 |
| *Dépressions avec mercure ambiant.* | | | | |
| I. . . . . . . 5°,0 | 10.55 | 23.60 | 26.70 | 37.15 |
| II . . . . . . 12,0 | 10.90 | 23.90 | 27.40 | 37.50 |
| III. . . . . . 9,1 | 11.05 | 23.10 | 26.05 | 37.40 |
| IV. . . . . . 9,0 | 11.40 | 22.60 | 26.55 | 36.80 |
| MOYENNES. . . . . | 10.98 | 23.40 | 26.68 | 37.21 |
| MOYENNES des deux groupes . . . . . | 11.15 | 23.50 | 26.71 | 37.67 |

Ces nombres indiquent clairement que la présence du mercure ambiant n'a exercé aucune influence sur la dépression, et qu'à la petite distance produite par la faible épaisseur des parois, il n'avait point d'action sensible sur le mercure intérieur.

D'ailleurs, je ne puis mettre en doute l'exactitude des résultats précédents;

car ils m'ont été confirmés par d'autres observations dignes d'être rapportées. J'avais remarqué qu'en serrant et desserrant brusquement le tube de caoutchouc *t*, qui lie le tube large aux quatre tubes capillaires, on donnait au mercure contenu dans ces quatre tubes un mouvement suivi d'un repos presque immédiat. Je mesurai plusieurs fois les dépressions ainsi produites immédiatement après l'agitation du liquide et je trouvai :

*Dépressions sans mercure ambiant.*

| TEMPS et n°s des expériences. | TUBE I $r = 0{,}327$. | TUBE II $r = 0{,}172$. | TUBE III $r = 0{,}149$. | TUBE IV $r = 0{,}108$. |
|---|---|---|---|---|
| I. . . . . . . 8°,5 | 11.45 | 22.85 | 26.25 | 36.30 |
| II . . . . . . » | 11.35 | 22.75 | 26.10 | 36.30 |
| III. . . . . . » | 11.15 | 22.75 | 26.15 | 36.10 |
| MOYENNES. . . . . | 11.32 | 22.78 | 26.17 | 36.23 |
| *Dépressions avec mercure ambiant.* | | | | |
| I. . . . . . . 8°,5 | 11.70 | 23.15 | 25.80 | 35.25 |
| II . . . . . . » | 11.60 | 22.75 | 25.80 | 35.15 |
| III. . . . . . » | 11.90 | 23.15 | 26.15 | 35.65 |
| MOYENNES. . . . . | 11.73 | 23.02 | 25.92 | 35.35 |
| MOYENNES des deux groupes. . . . | 11.57 | 22.90 | 26.04 | 35.79 |

On peut reconnaître que les dépressions observées dans les mêmes conditions sont remarquablement concordantes, et que les moyennes des deux groupes d'observations diffèrent fort peu l'une de l'autre. Elles ne diffèrent pas non plus des précédentes de quantités notablement supérieures aux inégalités que nous n'avons cessé de rencontrer dans toutes ces observations, lors même que les conditions étaient identiques, inégalités qui me paraissent inévitables.

Cette égalité approchée des dépressions obtenues dans l'ascension lente du mercure et de celles qui se produisent immédiatement après une forte agitation, me paraît donner un grand poids aux observations précédentes, et par conséquent, à l'argument qu'elles renferment contre l'influence de l'épaisseur des parois. Il faudrait donc attribuer les inégalités qui semblaient indiquer cette influence à des causes étrangères, qui cependant ne peuvent être accidentelles; la constance de nos résultats ne nous permet point de l'admettre, et il est à remarquer que ces derniers résultats concordent avec nos précédents; en effet, nous trouvons, comme produits des rayons par les dépressions observées après vingt-quatre heures, les nombres

3,68 — 4,06 — 4,00 — 4,07,

qui sont encore sensiblement inférieurs à ceux que nous avons rapportés plus haut, également pour les tubes minces, et si l'on compare ces chiffres à celui que nous avons obtenu comme moyenne pour les tubes épais, savoir 5,28, on doit reconnaître que des causes accidentelles ou des erreurs d'observation ne peuvent amener de semblables différences.

Si donc nous sommes d'un côté forcés d'admettre que l'épaisseur des parois n'a pas une action directe sur la dépression, de l'autre côté nous devons reconnaître qu'il existe, liées à cette épaisseur, des causes permanentes de fortes inégalités, causes que nous devons chercher à découvrir; on conçoit aisément tout ce qu'une semblable recherche présente de difficultés. Combien de physiciens, en effet, et des plus éminents, se sont bornés à reconnaître les grandes divergences qu'offrent les résultats des expériences faites sur la dépression du mercure, sans présenter pour les expliquer autre chose que des hypothèses hasardées avec crainte. On se rattache généralement à cette idée, exprimées par Gauss et Poisson, que l'équilibre peut s'établir avant que l'angle de contact ait atteint sa valeur normale; mais il est évident que ce n'est là que substituer à un fait l'hypothèse d'un autre fait qu'il reste à expliquer.

Je me suis demandé d'abord si la plus grande dépression observée dans les tubes épais ne pouvait pas résulter de leur ellipticité. En effet, j'ai dit dans mon précédent travail, que ces tubes épais ont ordinairement une section sensiblement elliptique, et je crois avoir donné la raison de ce fait; nous avons

fait voir dans ce nouveau mémoire que l'erreur résultant de cette ellipticité ne peut porter sur l'évaluation du rayon moyen : en effet, en calculant très-exactement ce rayon, d'après la formule qui donne le contour de l'ellipse, nous avons trouvé des valeurs à peu près identiques à celles que nous avions rapportées dans nos tableaux. Il faudrait donc admettre une influence de l'ellipticité de la section sur la dépression même, c'est-à-dire supposer que, même à égalité de rapport du contour à la surface, la dépression n'est pas la même dans un tube elliptique que dans un tube circulaire. Nos résultats, que nous indiquerons plus tard, concernant les tubes prismatiques, bien plus différents des tubes circulaires que les tubes elliptiques, ne permettaient guère d'admettre cette hypothèse; cependant j'ai voulu la soumettre à une observation directe. Je pris 5 tubes à sections très-elliptiques, tubes appelés *tiges plates*, et qui servent à construire des thermomètres à la fois sensibles et faciles à observer à l'œil nu. Ces tubes paraissaient parfaitement propres, et n'avaient jamais servi. Je mesurai les dépressions dans ces tubes et les diamètres aux points où le mercure s'était arrêté. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant.

*Dépression du mercure dans des tubes à section très-elliptique.*

| Demi-grand axe $a$. | Demi-petit axe $b$. | Rayon-moyen. $r$. | Dépressions observées. | | Dépression moyenne $d$. | Produit. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | I. 5°0. | II. 12°0. | | |
| 0,410 | 0,130 | 0,189 | 24,65 | 26,15 | 25,40 | 4,80 |
| 0,327 | 0.150 | 0,179 | 27,20 | 28,60 | 27,90 | 5,00 |
| 0,188 | 0,058 | 0,084 | 60,10 | 60,25 | 60,18 | 5,04 |
| 0,096 | 0,051 | 0,065 | 85,95 | 84,65 | 85,30 | 5,52 |
| 0,052 | 0,033 | 0,041 | 121,25 | 126,40 | 123,83 | 5,03 |

Les valeurs des produits contenus dans la dernière colonne sont fort peu différentes de celles que nous avons obtenues pour des tubes circulaires très-capillaires, et concordent tout à fait avec les valeurs plus nombreuses trouvées dans mon premier travail; le quatrième tube seul présente un résultat beaucoup plus fort; mais ce ne peut être là qu'une anomalie, due probable-

ment à quelque impureté de la surface du tube. On ne peut donc point attribuer à l'ellipticité des tubes épais les fortes dépressions qu'ils produisent.

M. Frankenheim [1], en reconnaissant combien on rencontre d'irrégularités dans les diverses expériences faites sur le mercure, signale une source de différences notables entre les dépressions dans un même tube, savoir l'état hygrométrique de la surface intérieure du tube. D'après lui, le produit de la dépression corrigée par le rayon serait à 0°, le tube étant bien sec $4^{mm},90$, et le mercure étant au contraire couvert d'une couche d'eau, 4,5 à 4,0. Enfin, dans l'état moyen de l'atmosphère, ce produit à 0° serait 4,5.

J'ai songé d'abord à attribuer à cette cause les inégalités que j'avais obtenues. Je regardais comme possible que le mode de fabrication des tubes capillaires introduisit dans leur intérieur des quantités d'humidité en relation avec leurs épaisseurs. En effet, les tubes épais s'étirent plus lentement que les tubes minces, et pendant cette opération, l'ouvrier ne cesse pas de souffler dans le tube. Il se pourrait donc qu'une plus grande quantité d'humidité s'attachât à une même grandeur de surface dans les tubes épais que dans les tubes minces, et que la capillarité des tubes, que d'ailleurs on conserve souvent bouchés, ne permettant point un renouvellement suffisant de l'air intérieur, l'humidité ayant une fois pénétré dans les tubes n'en sortît plus.

Cependant, pour expliquer ainsi les résultats que j'ai obtenus, il fallait, tout en admettant le fait signalé par M. Frankenheim de la variation de la dépression avec l'état hygrométrique du tube, rejeter les résultats numériques de ce physicien. En effet, la plus grande valeur qu'il ait obtenue est 4,9, tandis que, pour les tubes épais, nous avons trouvé jusqu'à 5,5. Peut-on admettre que cette différence soit due à la différence de nature des tubes de M. Frankenheim et des miens, et ne déduire des résultats de ce savant que les rapports $\frac{4.9}{4.0}$, $\frac{4.5}{4.0}$ des dépressions dans les tubes saturés d'humidité à celles qui ont lieu dans les tubes parfaitement secs, rapports qui, du reste, diffèrent assez de ceux que nous avons trouvés entre nos moyennes $\frac{5.28}{4.55}$, $\frac{4.81}{4.55}$? Dans l'impossibilité de résoudre cette question, j'ai dû observer l'influence

[1] Frankenheim, *Dépression du mercure à différentes températures*, Pogg. Annal., t. LXXV, p. 229.

de l'état hygrométrique du tube sur les tubes mêmes de mes observations. Comme mon principal but était de savoir ce que pouvait avoir de fondé l'hypothèse que j'ai présentée tout à l'heure relativement à une liaison possible entre l'état hygrométrique et l'épaisseur du tube, j'ai voulu déterminer particulièrement l'influence de l'humidité introduite dans le tube par insufflation. Je soufflai donc dans les quatre tubes minces employés dans les observations rapportées plus haut, et je mesurai les dépressions, aussi bien celles qui se produisaient immédiatement, que celles qui subsistaient après vingt-quatre heures. Voici les résultats de ces observations.

*Dépression après insufflation dans le tube.*

| Nos des tubes. | Rayons. | Dépressions immédiates | | | Produits | Dépressions après 24 h. | | | Produits |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1re exp. | 2e exp. | moyennes. | $(h+\frac{r}{3})r$. | 1re exp. | 2e exp. | moyennes. | $(h+\frac{r}{3})r$. |
| | mm. | | | | | | | | |
| 1 | 0,327 | 16.10 | 14.50 | 15.30 | 5.08 | 13.95 | 13.90 | 13.93 | 4 04 |
| 2 | 0,172 | 27.30 | 26.45 | 26.88 | 4.67 | 25.25 | 25.00 | 25.13 | 4.36 |
| 3 | 0,149 | 32.20 | 31.90 | 32.05 | 4.82 | 29.95 | 29.40 | 29.68 | 4.47 |
| 4 | 0,108 | 46.40 | » | 46.40 | 5.02 | 46.15 | » | 46.15 | 5.00 |

On voit par là que l'insufflation dans les tubes a exercé une forte influence sur la dépression immédiate; mais cette influence s'est affaiblie rapidement dans les trois premiers tubes; s'il n'en a pas été de même pour le 4e tube, c'est que dans ce dernier l'humidité introduite avait été suffisante pour constituer une couche d'eau de plus de $0^{mm},5$ d'épaisseur qui, au bout de plusieurs jours, persistait encore. L'état du tube, après vingt-quatre heures, était donc le même qu'immédiatement après l'insufflation.

Dans la plupart des observations que nous avons faites sur la dépression du mercure, la mesure de celle-ci ne se faisait que vingt-quatre heures après l'introduction du mercure dans les appareils; ce sont donc les produits inscrits dans la dernière colonne du tableau précédent que nous devons comparer aux produits analogues des expériences antérieures; or, les nombres 4,64, 4,36, 4,47 ne sont que de l'ordre des produits relatifs aux tubes très-

minces. Leur moyenne 4,49 diffère très-peu de celle que nous avons trouvée pour ces derniers, savoir 4,55. Ainsi donc nous ne pouvons pas expliquer les inégalités présentées par les tubes de différentes épaisseurs par l'hypothèse d'un état hygrométrique différent. Cependant remarquons que les produits que nous venons d'obtenir sont notablement supérieurs à ceux obtenus d'abord avec les mêmes tubes, et qui étaient 3,68, 4,06, 4,00, 4,07. Il y a donc eu certainement persistance pendant vingt-quatre heures de l'influence de l'état de surface produit par l'insufflation. Il restait à savoir si cette influence persisterait pendant un temps assez long. Je repris les observations sur ces tubes au bout de cinquante-quatre jours, et j'obtins les résultats suivants :

| Tubes. | Dépressions. | Produit $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|
| 1 | 12.45 | 4.13 |
| 2 | 26.10 | 4.53 |
| 3 | 27.20 | 4.10 |
| 4 | 39.70 | 4.29 |

Ces nombres se rapprochent beaucoup de ceux que nous avons obtenus avant l'insufflation dans les tubes; ainsi l'altération de la surface intérieure qui a pu en résulter, ou bien a été passagère, ou bien n'est pas capable d'exercer une influence sensible sur la dépression du mercure. Ce n'est donc point à une insufflation prolongée dans les tubes épais que l'on doit attribuer la forte dépression observée dans leur intérieur.

La conjecture exprimée par M. Soret (p. 82) peut être soumise à une vérification plus directe que celle qu'il indique. J'aurais cependant désiré pouvoir observer, comme il le conseille, la dépression du mercure dans des tubes dont on aurait réduit l'épaisseur par un moyen mécanique, ou mieux, par l'acide fluorhydrique. J'ai dit pourquoi ce dernier moyen me semblait seul devoir être employé; malheureusement quelques essais m'ont fait voir qu'il présentait de grandes difficultés d'exécution, et qu'il faudrait de grandes quantités d'acide fluorhydrique dissous dans l'eau, et des appareils spéciaux, pour obtenir une usure régulière, suffisante et laissant au verre sa transparence. Au lieu de poursuivre ces expériences assez coûteuses, j'ai préféré

chercher si la chaleur pouvait exercer sur les tubes une influence persistante, capable de modifier la dépression qui a lieu dans leur intérieur.

Je pris deux tubes de diamètres parfaitement réguliers, je les partageai chacun en deux parties. L'une de ces parties fut chauffée jusqu'à ce que le verre fût ramolli au point de pouvoir être courbé, mais faiblement seulement; on laissait ensuite refroidir librement le tube ainsi chauffé. Ajoutons que, pour ne pas avoir à se préoccuper des différences d'état hygrométrique que cette opération pouvait apporter, on avait préalablement fermé le tube à la lampe, et qu'on l'avait laissé refroidir tout fermé. Ce n'est qu'après un temps assez long que l'on a ouvert les deux extrémités et mesuré la dépression du mercure dans l'intérieur des quatre fragments des deux tubes. Les rayons ont été ensuite mesurés au microscope dans les points mêmes ou se trouvaient les ménisques. J'ai obtenu les résultats suivants :

| N$^{os}$ et températures des expériences. | I$^{er}$ TUBE. Épaisseur $3^{mm},1$. | | II$^{e}$ TUBE. Épaisseur $4^{mm},2$. | |
|---|---|---|---|---|
| | Frag$^t$ non chauffé. $r=0,152$. | Frag$^t$ chauffé. $r=0,152$. | Frag$^t$ non chauffé. $r=0,174$. | Frag$^t$ chauffé. $r=0,173$. |
| I. . . . . 13°,6 | 31.90 | 29.15 | 28.90 | 25.35 |
| II . . . . 14,0 | 32.10 | 29.75 | 29.00 | 25.20 |
| III. . . . 10,0 | 32.15 | 29.00 | » | » |
| Moyennes. . . | 32.05 | 29 30 | 28.95 | 25.28 |
| Prod. $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. | 4.89 | 4.47 | 5.06 | 4.40 |

Ces résultats offrent une confirmation bien remarquable de l'idée émise par M. Soret. En effet, nous voyons que, par suite du changement d'état moléculaire que nous avons amené en chauffant les tubes, les produits de la dépression corrigée par le rayon sont descendus des valeurs correspondantes à celles que nous avons trouvées pour les tubes de moyenne ou de forte épaisseur, à des valeurs du même ordre que celles que nous avons obtenues avec des tubes très-minces. Or, dans la fabrication de ces derniers nous avons précisément effectué l'opération précédente, avec cette seule

différence que les tubes ont été chauffés plus fortement, puis étirés. Donc les résultats de ces dernières expériences expliquent parfaitement l'inégalité que nous avions attribuée à la différence d'épaisseur des tubes épais et des tubes très-minces. De plus, cette explication s'applique aussi bien aux différences trouvées pour les tubes de moyenne et de forte épaisseur, si on admet l'opinion très-vraisemblable de M. Soret, que les différences de vitesses de refroidissement de ces tubes amènent des différences d'état moléculaire.

Ces expériences, jointes à celles qui les précèdent, me paraissent résoudre complétement cette grave question de l'influence de l'épaisseur, et prouver que l'épaisseur, considérée à un point de vue en quelque sorte géométrique, n'exerce pas sur la dépression du mercure une influence sensible; que si l'on observe une différence entre les dépressions qui ont lieu, en apparence dans les mêmes conditions, dans les tubes d'épaisseurs différentes, c'est uniquement parce qu'aux différences d'épaisseurs sont liées des différences physiques des tubes, particulièrement des différences d'état moléculaire résultant de ce que le refroidissement des tubes, après leur fabrication, se fait moins rapidement dans les tubes épais que dans les tubes minces. Ces derniers sont donc plus trempés que les premiers; mais en chauffant ceux-ci pour les laisser refroidir aussitôt à l'air libre, on leur donne un nouveau degré de trempe qui peut rendre leur état identique à celui des tubes minces.

Quoi qu'il en soit de l'exactitude de ces conclusions, nous pouvons au moins résumer ainsi les conséquences des observations que nous avons rapportées concernant l'influence de l'épaisseur :

1° Les dépressions du mercure dans des tubes de même diamètre, mais d'épaisseur très-différente, diffèrent notablement les unes des autres, et sont d'autant plus grandes que les épaisseurs sont plus considérables;

2° La dépression du mercure dans un tube n'est pas sensiblement modifiée, lorsqu'on augmente artificiellement l'épaisseur de ce tube en l'entourant d'une masse de mercure;

3° L'insufflation d'air humide dans l'intérieur des tubes n'exerce pas une action permanente capable de modifier la dépression du mercure dans ces tubes. On ne peut donc pas attribuer à des différences pouvant exister entre

les quantités d'humidité introduites dans le soufflage des tubes épais et des tubes minces, les inégalités correspondantes aux épaisseurs;

4° On ne peut pas attribuer non plus ces inégalités à la forme elliptique des tubes épais, l'expérience montrant que la dépression du mercure est, à égalité de rapport du contour à la section, à très-peu près la même dans les tubes elliptiques et dans les tubes circulaires;

5° Les variations d'état moléculaire produites dans les tubes par la chaleur influent très-fortement sur la dépression, au point que la dépression dans un tube épais, d'abord chauffé jusqu'à un commencement de ramollissement puis refroidi librement, est la même que si le tube était très-mince.

J'avais donné dans mon premier travail une explication de l'influence de l'épaisseur, qui ne s'accorde nullement avec les résultats que j'ai indiqués plus haut relativement à la dépression se produisant dans un tube après un mouvement descendant; on peut expliquer d'une manière bien plus complète les phénomènes dus en apparence aux différences d'épaisseur, par des variations de l'angle de contact du mercure et du verre; toutefois la question ne serait que déplacée, si les expériences précédentes ne montraient pas que la chaleur produit sur le verre une action qui, modifiant d'une manière permanente l'état de la surface, influe sur l'angle de contact de cette surface et du mercure.

Ceci expliquerait parfaitement les variations de cet angle observées dans les tubes barométriques par M. Bravais *(Ann. de ch. et de phys.,* III$^e$ s. V, 492*)*. Par des observations nombreuses et ne laissant rien à désirer, M. Bravais a constaté que l'incidence du mercure sur le verre [1] dans le vide barométrique varie non-seulement d'un baromètre à l'autre, mais aussi dans différents points d'un même baromètre; il a constaté en outre que, dans l'air, l'incidence est plus constante et plus forte. Eh bien, tous ces faits s'expliquent parfaitement par les résultats de nos observations; car l'on peut admettre que ces variations résultent uniquement de ce que les tubes des différents baromètres, ou les parties d'un même baromètre, n'ont pas été également

[1] M. Bravais entend ici par incidence du mercure sur le verre, l'angle du dernier élément de la surface du mercure avec la normale à la paroi du tube, par conséquent, le complément de ce que nous appelons l'angle de contact.

chauffés dans la construction de ces instruments; et si l'on a reconnu que l'incidence du mercure est toujours plus petite dans le vide que dans l'air libre, c'est que l'incidence a toujours été observée dans des tubes préalablement chauffés. L'incidence, dans l'air, doit être également plus constante, parce que les tubes n'ayant généralement pas été chauffés, si ce n'est d'une manière égale, au moment de leur fabrication et de leur recuit, n'ont pas contracté des états moléculaires différents.

Ainsi, la conjecture de M. Soret, vérifiée par nos expériences, permet d'expliquer bien des faits restés obscurs jusqu'ici, et ôte toute force aux objections que nos premières observations, imparfaitement discutées, soulevaient contre la théorie des actions capillaires.

On doit remarquer que l'on peut de la même manière expliquer les inégalités observées dans la loi du rapport inverse de la dépression au diamètre; en effet, nous avons reconnu que le produit de la dépression corrigée par le rayon décroissait quand le rayon augmentait; cependant nous verrons plus tard que, lorsqu'on passe des tubes capillaires à des tubes de plus de $5^{mm}$ de diamètre, on trouve une confirmation remarquable de cette loi plus générale, que les volumes déprimés sont proportionnels aux contours des tubes. Il n'y aurait que les tubes d'un diamètre de 1 à $5^{mm}$ qui ne satisferaient point aux lois théoriques. Or, maintenant ne pouvons-nous pas supposer que l'infériorité des dépressions observées dans les tubes de 1 à $5^{mm}$ de diamètre, résulte d'un état moléculaire de ces tubes différent de ceux des tubes très-capillaires et des tubes larges? Je dois même ajouter que mes tubes présentaient une teinte particulière qui autorisait cette hypothèse : tandis que les tubes capillaires et les tubes larges étaient parfaitement incolores et transparents, les tubes moyens avaient une légère teinte opaline.

Il est permis de présumer que si l'on avait des tubes bien identiques, la loi du rapport inverse de la dépression au diamètre devrait s'étendre jusqu'à la limite où cette loi cesse d'être une conséquence assez exacte de la loi plus générale du rapport du volume déprimé au contour. Cette limite peut être facilement assignée. En effet, pour un rayon $r = 1^{mm}$, on a à peu près une dépression $h = 4^{mm}$, et le volume déprimé sera plus grand que $\pi r^2 h$ ou $\pi \times 4^{mm}$, et tout au plus égal à $\pi r^2 (h + \frac{r}{3})$ ou $\pi \times 4^{mm},33^{c}$, valeur corres-

pondante au cas d'un ménisque rigoureusement sphérique. La véritable valeur du volume déprimé sera comprise entre les deux valeurs précédentes; or, celles-ci diffèrent l'une de l'autre de $\frac{1}{12}$. Donc, en prenant pour mesure du volume déprimé la hauteur $h+\frac{r}{3}$, l'erreur possible sera inférieure à $\frac{1}{12}$, mais elle pourra être de $\frac{1}{20}$. Donc, déjà avec un tube de 1$^{m}$ de rayon, la loi du rapport inverse de la dépression au diamètre ne sera que faiblement approximative; mais on doit remarquer que l'on ne peut nullement justifier par ces considérations les inégalités que nous avons observées. En effet, l'erreur commise dans l'évaluation des produits $(h+\frac{r}{3})\,r$ tendrait à faire croître ces produits avec le rayon, et c'est le contraire que nous avons trouvé.

Le meilleur moyen, me paraît-il, de reconnaître si les inégalités que nous avons trouvées ne résultent pas de différences dans l'état ou la nature des tubes, est de former une série de tubes ne différant que par le diamètre. A cet effet, hors d'un même tube de cristal, j'ai tiré 4 tubes minces, et j'ai mesuré les dépressions dans leur intérieur; j'ai trouvé ainsi :

| Rayons des tubes. | Dépressions observées. | | Dépressions moyennes. | Produits $(h+\frac{r}{3})r$. |
|---|---|---|---|---|
| | 1re expérience. | 2me expérience. | | |
| 0.850 | 4.00 | 3.80 | 3.90 | 3.55 |
| 0.551 | 7.65 | 7.20 | 7.43 | 4.19 |
| 0.435 | 8.35 | 8.20 | 8.28 | 3.66 |
| 0.192 | 20.40 | 20.00 | 20.20 | 3.88 |

Avec 4 autres tubes minces, pris également d'un même tube, j'ai trouvé :

| Rayons des tubes. | Dépressions observées. | | | Dépressions moyennes. | Produits $(h+\frac{r}{3})r$. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1re expérience. | 2me expérience. | 3me expérience. | | |
| 0.600 | 7.65 | 6.50 | 7.25 | 7.13 | 4.40 |
| 0.308 | 13.35 | 12.80 | 12.65 | 12.93 | 3.95 |
| 0.196 | » | 21.40 | 20.85 | 21.13 | 4.16 |
| 0.112 | 40.95 | 40.30 | 39.30 | 40.18 | 4.50 |

Enfin, nous pouvons ajouter à ces résultats ceux des expériences précédentes, qui nous fournissent entre autres, pour un tube de $0^{mm},671$ de rayon, un produit $(h + \frac{r}{3})\,r = 4.29$. Il résulte visiblement de la comparaison de ces observations, que la loi du rapport inverse de la dépression au diamètre est suffisamment exacte pour les tubes minces dont le rayon ne dépasse pas $0^{mm},850$ ou le diamètre 1.70.

Théoriquement, cette loi doit être vraie pour tout tube capillaire vertical, quelle que soit sa forme, par exemple, aussi bien pour un tube conique que pour un tube cylindrique, le diamètre étant toujours supposé pris à la base du ménisque. Il était intéressant de s'assurer si, ici encore, l'expérience confirmait la théorie. J'étirai un tube, puis je le courbai de manière à former un U dont une des branches était cylindrique et assez large, l'autre à section variable et assez étroite. En versant des quantités différentes de mercure dans ce tube, on amenait le ménisque en différents points de la branche étroite, points que l'on marquait par un trait de lime, et l'on avait différentes dépressions que l'on mesurait au cathétomètre. On coupait ensuite le tube aux points marqués, et l'on mesurait les diamètres des sections ainsi faites. J'ai trouvé :

| Rayons des sections. | Dépressions. | Produits $(h + \frac{r}{3})r$. |
|---|---|---|
| 1.76 | 1.35 | 3.87 |
| 1.52 | 2.00 | 4.27 |
| 1.16 | 2.70 | 3.89 |
| 0.56 | 6.00 | 3.61 |

Dans l'évaluation des produits $(h + \frac{r}{3})r$, $h$ a été d'abord corrigé par l'addition de la dépression $0^{mm},26$, correspondante au diamètre $12^{mm}$ de la branche cylindrique.

On voit que ces produits ne présentent que des différences irrégulières, et assez faibles eu égard à la nature de ces expériences, où des erreurs peuvent se présenter; je me bornerai à indiquer celles qui peuvent affecter le rayon, et qui proviennent de ce que l'on ne peut pas faire la section du tube précisément au point ou était le ménisque, et celles qui, provenant de la réfraction

par la surface inclinée du tube, peuvent affecter la dépression. Si nous tenons compte de ces erreurs possibles, nous devons reconnaître dans les produits précédents un accord assez parfait, non-seulement entre eux, mais aussi avec les produits précédemment trouvés relativement à la dépression du mercure dans des tubes cylindriques.

Ces expériences donc, non-seulement s'accorderaient comme les précédentes, mais aussi élargiraient les limites dans lesquelles la loi du rapport inverse de la dépression au diamètre est vérifiée par l'observation.

Il n'est peut-être pas sans importance de remarquer que les dépressions obtenues dans les tubes minces ainsi que dans les tubes épais préalablement chauffés puis refroidis, sont de même grandeur que la plupart de celles qui sont rapportées dans les tableaux III et IV, et que nous avons observées après avoir imprimé des secousses aux tubes. Ce serait donc ces dépressions, les plus faibles de celles que nous avons observées, qui sembleraient être en quelque sorte les dépressions naturelles, c'est-à-dire les effets de la capillarité seule, dégagés des autres causes pouvant influer sur le phénomène. Cependant, il est plus exact de dire que ce sont celles qui correspondent à l'angle de contact *maximum*, angle qui se produit par l'altération de l'état moléculaire du tube, ou par les mouvements qui sont imprimés à celui-ci.

Pour compléter nos recherches sur la dépression du mercure, j'ai cherché à déterminer l'influence de différentes circonstances, non essentielles au phénomène, mais introduites à dessein dans les observations.

J'ai voulu d'abord connaître l'effet d'une oxydation plus ou moins complète du ménisque : je n'ai obtenu aucun résultat un peu constant. J'ai reconnu seulement que si l'on oxyde la surface du mercure en chauffant le tube au point où le ménisque se trouve, la courbure diminue et la dépression, après le refroidissement, est beaucoup moindre qu'avant l'oxydation du ménisque; plus on prolonge cette oxydation, plus ces effets sont marqués. Ces faits, du reste, sont connus, et l'on sait que Dulong a prouvé que la forme plane, offerte parfois par le ménisque dans les baromètres, n'est due qu'à l'oxydation du mercure.

Nous avons rapporté précédemment des résultats tout à fait anormaux obtenus en observant la dépression du mercure dans deux tubes lavés, l'un

à l'acide sulfurique, puis à l'eau et à l'alcool, l'autre à l'eau et à l'alcool seulement. J'ai voulu m'assurer si, pour ce dernier cas au moins, ces résultats n'étaient point fortuits. Ces recherches et celles que j'ai faites sur la hauteur d'une large goutte de mercure entourée d'un liquide m'ont engagé à observer ensuite la dépression du mercure sous une colonne liquide; et ici deux cas se sont présentés : la colonne liquide peut être tout entière contenue dans le tube capillaire; alors, suivant la théorie, elle ne peut exercer d'influence que par son poids, et l'on doit avoir :

$$H_1 = H + l\frac{D}{\Delta}$$

ou

$$H = H_1 - l\frac{D}{\Delta},$$

en appelant H la dépression que l'on observerait dans le tube sec, $H_1$ celle que l'on observe, le mercure étant surmonté d'une colonne d'un liquide, $l$ la longueur de cette colonne, D sa densité et $\Delta$ celle du mercure.

Il peut arriver aussi que la colonne liquide ait son niveau supérieur en dehors du tube, dans un vase assez large pour que la surface de ce niveau soit plane en quelques-uns de ses points; dans ce cas, le ménisque de mercure doit, théoriquement, supporter une pression égale à celle d'une colonne du liquide de même hauteur que celle qui tendrait à s'élever dans le tube par capillarité; et si l'on appelle $h$ cette hauteur et $h\frac{D}{\Delta}$ la colonne de mercure qui doit lui faire équilibre, il faudra, d'après les principes admis, que l'on ait :

$$H_1 = H + l\frac{D}{\Delta} + h\frac{D}{\Delta}$$

d'où

$$H_1 - l\frac{D}{\Delta} = H + h\frac{D}{\Delta},$$

$l$ étant ici la distance verticale du niveau supérieur du liquide au ménisque de mercure.

Pour ces différentes recherches, j'ai employé un appareil consistant en un

tube en U, dont l'une des branches avait $15^{mm}$ de diamètre, tandis que l'autre branche était un tube capillaire surmonté d'un tube de $25^{mm}$ de diamètre. J'ai mesuré d'abord les dépressions naturelles du mercure dans trois appareils de ce genre; puis j'ai lavé ces trois appareils à l'alcool d'abord, à l'eau ensuite; après ce lavage, je laissais égoutter les tubes jusqu'à ce qu'il n'y eût plus de traces visibles de liquide. Je mesurais de nouveau alors les dépressions.

Ensuite, à l'aide de manipulations fort simples et inutiles à décrire, j'introduisais dans le tube une petite colonne d'alcool d'abord, d'eau ensuite, reposant sur le ménisque de mercure et contenue tout entière dans le tube. Je mesurais au cathétomètre les hauteurs $H_1$ et $l$.

Enfin, je répétais ces dernières observations, seulement avec cette modification dans les conditions du phénomène, que le niveau supérieur de la colonne liquide, recouvrant le mercure, se trouvait dans le tube large soudé au-dessus du tube capillaire. Je mesurais encore au cathétomètre les hauteurs $H_1$ et $l$. Une observation préalable pouvait donner les hauteurs $h$, faciles à déduire d'ailleurs des données relatives à l'élévation des liquides dans les tubes capillaires. J'ai, dans ces dernières recherches, employé l'eau, l'alcool et l'acide acétique cristallisable.

Je réunis dans un seul tableau les résultats de ces expériences, en mettant à part les moyennes de toutes ces diverses observations, afin qu'on puisse même les comparer entre elles.

*Dépressions du mercure dans les tubes.*

| RAYONS des tubes. | NON LAVÉS. | | LAVÉS A L'ALCOOL. | | LAVÉS A L'EAU. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | EXP. I. | II. | I. | II. | I. | II. | III. |
| 0,157 | 33,00 | 33,00 | 32,25 | 32,15 | 25,90 | 26,70 | 26,55 |
| 0,123 | 39,40 | 39,90 | 38,20 | 38,20 | » | » | 38,40 |
| 0,0835 | 57,95 | 57,30 | 56,70 | 57,45 | 60,35 | 61,30 | 60,65 |

*Dépressions du mercure sous une colonne liquide contenue dans le tube.*

| NATURE ET DENSITÉ $D$ du liquide. | RAYONS des tubes. | DÉPRESSIONS OBSERVÉES $H_1$. | | | HAUTEUR DE LA COLONNE liquide $l$. | | | DÉPRESSIONS CORRIGÉES $H = H_1 - l\frac{D}{13,59}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | EXP. I. | II. | III. | I. | II. | III. | I. | II. | III. |
| Eau ....... | 0,157 | 36,85 | 40,60 | 40,60 | 109,8 | 97,1 | 98,7 | 32,40 | 33,40 | 33,30 |
| $D = 1,000$. . . . | 0,123 | 45,2 | 48,4 | 46,4 | 94,5 | 94,4 | 93,0 | 38,2 | 41,4 | 39,5 |
| | 0,0835 | 77,7 | 76,7 | 72,7 | 71,8 | 74,1 | 67,3 | 72,4 | 71,2 | 67,5 |
| Alcool ...... | 0,157 | 36,8 | 33,3 | 33,9 | 72,2 | 10,3 | 14,1 | 32,3 | 32,7 | 33,0 |
| $D = 0,823$. . . . | 0,123 | 42,0 | 41,8 | 41,6 | 24,7 | 26,5 | 21,9 | 40,5 | 40,2 | 40,8 |
| | 0,0835 | 64,8 | 64,1 | 64,9 | 31,1 | 11,7 | 47,7 | 62,9 | 63,4 | 62,1 |

*Dépressions sous une colonne liquide ayant un large niveau en dehors du tube.*

| NATURE ET DENSITÉ $D$ du liquide. | RAYONS des tubes. | EXP. I. | II. | III. | I. | II. | III. | I. | II. | III. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eau ....... | 0,157 | 41,8 | 40,9 | » | 119,0 | 118,9 | » | 32,9 | 32,1 | » |
| $D = 1,000$. . . . | 0,123 | 45,0 | 45,6 | » | 91,0 | 90,0 | » | 38,3 | 38,9 | » |
| | 0,0835 | 64,4 | 65,4 | » | 76,9 | 77,7 | » | 58,7 | 59,7 | » |
| Alcool ...... | 0,157 | 50,6 | » | » | 118,2 | » | » | 43,4 | » | » |
| $D = 0,823$. . . . | 0,123 | 49,4 | 47,3 | 47,7 | 95,8 | 70,8 | 70,6 | 43,5 | 43,0 | 43,4 |
| | 0,0835 | 69,8 | 66,9 | 66,0 | 86,5 | 67,3 | 62,4 | 64,5 | 62,7 | 60,2 |
| Acide acétique. . $D = 1,050$. . . . | 0,157 | 38,6 | 38,9 | » | 105,0 | 104,7 | » | 30,4 | 30,8 | » |

*Moyenne des résultats précédents.*

| RAYONS des tubes. | Dépressions dans les tubes | | | Dépressions sous une colonne contenue dans les tubes. | | Dépressions sous une colonne à large niveau supérieur. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | non lavées. | lavés à l'eau | lavés à l'alcool. | Eau. | Alcool. | Eau. | Alcool. | Acide acétique. |
| 0,157 | 33,0 | 26,4 | 32,2 | 33,0 | 32,8 | 32,5 | 43,4 | 30,6 |
| 0,123 | 39,7 | 38,4 | 38,3 | 39,7 | 40,5 | 38,6 | 43,3 | » |
| 0,0835 | 57,7 | 60,8 | 57,1 | 70,4 | 62,8 | 59,4 | 62,4 | » |

Les résultats précédents présentent de notables irrégularités; l'observation en montre les causes : dans le premier tube lavé à l'eau, le ménisque était légèrement oxydé; dans le dernier, il s'était formé une petite bulle d'eau. Il en fut de même, pour ce tube, dans les recherches suivantes sur la dé-

pression sous une colonne d'eau entièrement contenue dans le tube. On conçoit, du reste, qu'il doit être fort difficile d'obtenir une grande constance dans les résultats, ici où l'on introduit des causes perturbatrices dans un phénomène qui, par lui-même, présente déjà à l'observation des difficultés sérieuses et des anomalies souvent imprévues.

Cependant, si l'on excepte les trois résultats anormaux que je viens d'indiquer, on doit reconnaître assez de régularité chez les autres pour conclure :

1° Que le lavage d'un tube à l'eau et à l'alcool ne modifie pas sensiblement la dépression du mercure dans ce tube, à moins que, par un concours particulier de circonstances, ce lavage ne produise une oxydation même faible de la surface du ménisque;

2° La dépression du mercure, sous une colonne d'eau ou d'alcool, entièrement contenue dans le tube, corrigée du poids de cette colonne, est la même que si celle-ci n'existait point; de sorte que le liquide qui recouvre le mercure n'agit sur sa dépression que par son poids;

3° La dépression du mercure, sous une colonne d'eau dont le niveau supérieur présente en dehors du tube capillaire une large surface, n'est modifiée que par le poids seul de cette colonne. Je ne puis poser la même conclusion pour l'alcool, parce qu'ici les différences sont notables et tout à fait conformes aux indications théoriques. En effet, les élévations de l'alcool, dans les deux derniers tubes, mesurées directement, ont été trouvées 48,8 et 72,5; la densité de cet alcool étant 0,8263 à 15°, on avait pour $h\frac{D}{\Delta}$ les valeurs 3,2 et 4,8 qui, retranchées de 43,3 et 62,4, donnent 40,1 et 57,6, nombres très-voisins des valeurs trouvées pour H. Cependant nous avons peine à voir dans cette coïncidence un accord réel de l'expérience avec la théorie, d'une part, parce que les expériences précédentes, dans lesquelles l'alcool était tout entier contenu dans le tube, donnent pour le dernier une valeur 62,8, supérieure encore à 62,4, d'autre part, parce que les expériences faites avec l'eau sont trop contraires à un semblable accord; car ici la correction $h\frac{D}{\Delta}$ devient bien plus grande; en effet, on doit avoir à peu près pour les trois tubes :

$$h\frac{D}{\Delta}=\frac{15}{0,157}\times\frac{1}{13.5},\ \frac{15}{0,125}\times\frac{1}{13,5},\ \frac{15}{0,0835}\times\frac{1}{13,5}.$$

ce qui donne :

$$7.1,\quad 9.0,\quad 13.3,$$

et réduirait

$$H = H_1 - (l + h)\,\frac{D}{\Delta}$$

aux valeurs

$$25.4,\quad 29.6,\quad 46.1.$$

Or, il me parait difficile de supposer que de pareilles différences avec les valeurs observées de H soient dues à des causes accidentelles ou à des erreurs d'observation.

La seconde de nos conclusions est contraire aux résultats obtenus par Gay-Lussac avec un seul tube seulement; mais elle s'accorde bien avec ceux que nous avons trouvés relativement à la hauteur des larges gouttes de mercure sur un plan horizontal couvert d'un liquide.

Nous verrons en effet que l'eau et l'alcool entourant une goutte de mercure n'exercent pas d'influence sensible sur sa hauteur.

*Dépression du mercure dans les tubes dont le diamètre est considérable.*

Je sépare cette question de celle de la dépression dans les tubes capillaires, parce qu'elle en est distincte au double point de vue des formules théoriques et des procédés expérimentaux. En effet, la théorie ne nous fournit plus ici de lois simples, au moins en ce qui concerne les dépressions elles-mêmes. Elle n'a pu établir de relation entre celles-ci et les diamètres des tubes, qu'à l'aide de séries plus ou moins convergentes, qui ne se réduisent à un petit nombre de termes que pour le cas extrême des très-grands diamètres.

Il n'en est pas de même à l'égard des volumes déprimés. Laplace, le premier, par une intégration extrêmement remarquable, est arrivé à poser cette loi simple et générale :

*Le volume liquide déprimé ou soulevé dans un tube cylindrique est proportionnel au contour de la section intérieure de ce tube.*

D'après cette loi, si nous appelons $v$ le volume de mercure déprimé dans

un tube cylindrique à section circulaire de rayon $r$, c'est-à-dire le volume du tube compris entre la surface capillaire et le plan du niveau extérieur supposé prolongé dans l'intérieur du tube, nous devrons avoir évidemment

$$\frac{V}{\pi r} = 4{,}813,$$

4,813 étant la valeur en millimètres carrés de ce rapport $\frac{v}{\pi r}$ pour les tubes d'un très-petit diamètre et d'une épaisseur moyenne.

Je désirais vivement vérifier une égalité aussi explicite, et il me paraissait que, dans le cas actuel, c'est-à-dire en ce qui concerne la dépression du mercure, cette vérification n'était pas difficile et pouvait se faire de la manière suivante :

Un tube (*fig.* 11), dont l'une des extrémités est soigneusement rodée, tandis que l'autre est étirée et recourbée, plonge dans une cuvette large et profonde remplie de mercure. Le niveau ne doit être que d'un à deux millimètres tout au plus au-dessus de la pointe effilée. En aspirant dans le tube, on force le mercure à passer à travers cette pointe et à pénétrer dans la partie cylindrique, où il s'arrête à une petite distance au-dessous du niveau. On détermine à l'aide du cathétomètre la hauteur du niveau au-dessous de l'extrémité supérieure du tube, qui doit être rigoureusement horizontale; soit H cette hauteur. Cela fait, on retire brusquement le tube. Il est clair que, dans ce mouvement, il ne pourra sortir ni entrer aucune quantité de mercure. On pèsera celle qui se trouve dans le tube; soit $p$ son poids. Une détermination préalable a fait connaître le poids P, qui remplit entièrement le tube lorsque l'extrémité supérieure est fermée par un fragment de glace. De plus, et à l'aide de la machine à diviser, on mesure très-exactement le rayon $r$ du tube. Cela posé, si nous appelons $x$ le poids de mercure déprimé, et qui est égal à $v\Delta$, $\Delta$ étant le poids spécifique du mercure et $v$ le volume déprimé, nous aurons

$$x = P - p - \pi \Delta r^2 H,$$

et si la théorie est exacte, on devra trouver

$$\frac{x}{\pi r \Delta} = 4{,}813.$$

Les premiers résultats que j'obtins se soumettaient assez bien à cette égalité; ainsi je trouvai pour un tube de $7^{mm},358$ de diamètre, le nombre 4,530, et pour un autre tube de $15^{mm},702$ le nombre 4,950. Ces valeurs diffèrent peu de 4,813. Bientôt après, des résultats tout à fait contraires me firent reconnaître que cet accord était fortuit, et que le procédé que j'avais employé n'était pas susceptible d'une suffisante exactitude : en effet, le cathétomètre ne peut donner ici avec certitude que les dixièmes de millimètre, lors même que son vernier permettrait de pousser la division plus loin. Mon cathétomètre donnait les vingtièmes, mais il suffit de commettre une erreur de $\frac{1}{40}$ de millimètre sur la hauteur de l'extrémité supérieure du tube, et une erreur égale sur celle du niveau, pour qu'elle s'élève à $\frac{1}{20}$, et l'on conçoit que cette erreur multipliée par $\pi\Delta r^2$ peut être très-considérable. D'un autre côté, le poids que l'on cherche est la différence assez petite de deux poids considérables, savoir le poids P et le poids $p + \pi r^2\Delta H$. Une petite erreur sur chacun de ces poids pourra donc en apporter une fort notable sur le poids cherché.

Toutefois la première erreur que j'ai signalée est beaucoup plus importante; pour l'éviter, il faut recourir à un instrument plus précis que le cathétomètre, et le plus simple que l'on puisse employer est le sphéromètre. On pourrait sans beaucoup de peine appliquer cet instrument au procédé précédent; mais j'ai préféré suivre une autre méthode, consistant à mesurer séparément la dépression dans un tube, et le volume compris entre le plan horizontal tangent à la surface capillaire et cette surface. Ce volume se déterminait exactement de la manière suivante : un tube soigneusement rodé (*fig.* 13) est posé sur un plan; on verse dans son intérieur une certaine quantité de mercure; on mesure au sphéromètre la hauteur $h$ du point le plus élevé du ménisque au-dessus du plan, puis on retire le mercure et on le pèse; il est clair que si ce poids est $p$, on aura pour le volume cherché

$$\pi\left(r^2 h - \frac{p}{\pi\Delta}\right),$$

et si D est la dépression, le volume déprimé sera

$$\pi\left[r^2(h + \mathrm{D}) - \frac{p}{\pi\Delta}\right].$$

La dépression D se mesure aussi au sphéromètre, il suffit de fixer au moyen d'un peu de cire molle un bout de tube vertical dans une large cuvette remplie de mercure. Celle-ci est placée sur une glace rigoureusement horizontale, sur laquelle posent aussi les trois pieds du sphéromètre. On amène d'abord la pointe de la vis micrométrique en contact avec la surface du mercure de la cuvette, à une distance assez grande des parois et du tube; puis, faisant glisser l'instrument sur la glace, on amène la pointe de la vis dans l'axe du tube, et on la fait descendre jusqu'à ce qu'elle soit en contact avec le haut du ménisque; le chemin qu'elle parcourt ainsi verticalement est la dépression cherchée.

Ce moyen serait parfait, si l'œil était capable de juger de la perfection du contact entre la pointe de la vis et la surface du mercure. Or, je doute qu'il existe un œil humain assez perçant pour reconnaître que le contact n'existe pas encore quand la pointe de la vis est à $\frac{1}{100}$ de millimètre de la surface, ou bien lorsqu'il est dépassé d'une semblable longueur; on m'objectera qu'il suffit d'armer l'œil d'une lunette pour lui donner la puissance nécessaire; mais l'usage fera bientôt reconnaître combien l'emploi d'instruments de ce genre serait incommode dans l'observation actuelle. Il est d'ailleurs un moyen connu, si simple et d'une si admirable exactitude que je ne conçois pas qu'il n'ait pas été appliqué déjà dans un grand nombre d'expériences, et à la plupart des instruments de précision. L'examen de la figure 12 le fera comprendre immédiatement.

Tout près de l'observateur se trouve une pile très-faible (un élément de Daniel est plus que suffisant) et une boussole assez sensible; l'un des fils conducteurs s'attache à la boussole, l'autre va s'enrouler autour de la tête du sphéromètre, un fil de platine attaché à un autre point de la boussole va plonger dans le mercure de la cuvette. L'appareil étant ainsi disposé, on voit que, tant que la pointe du sphéromètre ne touchera pas le mercure, il n'y aura pas de courant, et la boussole aura sa position naturelle d'équilibre; mais aussitôt que la pointe arrivera en contact, le courant naîtra et un mouvement brusque de l'aiguille aimantée avertira l'observateur. Si la pointe de la vis et la surface du mercure sont toutes deux parfaitement propres, on atteindra à un degré de précision extrême. C'est ainsi que je puis affirmer l'exactitude

de chacune des mesures rapportées plus loin à trois ou quatre millièmes de millimètre près. Encore cette erreur n'est possible que dans le cas actuel, où l'on juge du contact de la pointe de la vis avec une surface de mercure. Dans l'intervalle d'une observation à l'autre, cette surface se couvre d'une couche d'oxyde excessivement faible, mais suffisante pour produire une semblable erreur. Mais lorsqu'il s'agit de déterminer l'instant du contact entre la pointe de la vis et une surface métallique solide et moins rapidement altérable, la sensibilité de l'instrument n'a presque plus de limites; c'est à tel point que, lorsque dans ces expériences j'amenais la pointe en contact avec une plaque de fer bien dressée et bien nette, le contact se produisait toujours à la même fraction de division du sphéromètre, et une division de cet instrument correspondait à $0^{mm},0020625$. Aussi, je le répète, je ne comprends pas qu'un semblable système n'ait pas été appliqué depuis longtemps à des instruments dont on pourrait réduire la construction, généralement très-compliquée, de manière à la rendre fort simple : il me suffit de citer le comparateur et les instruments destinés à la mesure des dilatations linéaires, appareils compliqués de lunettes, de leviers, de verniers et de vis micrométiques. Je suis convaincu que, dans ces sortes d'instruments, avec un élément de Daniell, une boussole et une vis micrométrique, on atteindrait une exactitude qui ne serait limitée que par le degré possible de perfection d'une vis, et l'on sait combien est élevé celui que les habiles constructeurs de nos jours ont su atteindre.

Et voici une observation qui montre combien une telle application de l'électro-magnétisme, est non-seulement utile, mais encore nécessaire : si, après avoir amené le contact entre les points de la vis et une plaque de fer, vous voulez juger de ce contact par le moyen ordinaire, c'est-à-dire par le ballottement du sphéromètre, vous devez encore tourner la tête de la vis de dix, quinze et même vingt divisions; ceci prouve déjà que vous ne jugez du contact qu'après qu'il a eu lieu. Il n'y aurait là aucune source d'erreur, si l'on était certain que le ballottement commence après que le contact a été dépassé d'une quantité toujours la même; mais, *a priori*, on ne peut pas espérer qu'il en soit ainsi, quand on amène la pointe de la vis successivement en contact avec des surfaces différentes, et surtout différemment compressi-

bles; car l'on ne comprend d'autre cause à ce retard dans le ballottement du sphéromètre, qu'un mouvement de la vis dans son écrou et une légère compression dans l'instrument et dans la surface sur laquelle s'appuie la pointe de la vis. Si maintenant l'on observe qu'avec les instruments dont j'ai parlé une erreur semblable peut se produire dans chaque communication de mouvement d'une pièce à l'autre, on sentira que la sécurité de l'observation augmentera considérablement à mesure que l'on simplifiera l'appareil, et je doute qu'on puisse le faire davantage par un procédé différent de celui que je viens d'indiquer, et qui, je le répète, était bien connu; car il y a plusieurs années déjà que M. Regnault, dans son cours au Collége de France, a proposé ce moyen d'observation comme applicable aux recherches qui nous occupent, et je sais que M. Stas avait déjà proposé ce même moyen pour d'autres observations, et en particulier pour celles des dilatations.

La *fig.* 12 représente la disposition complète de l'appareil que j'ai employé dans les mesures actuelles. On voit que la glace qui porte la cuvette et le sphéromètre repose sur un pied en cuivre très-solide, reposant lui-même par trois vis calantes sur une lourde plaque de verre dépoli. C'est au moyen de ces trois vis calantes que l'on dispose horizontalement la glace qui porte le sphéromètre, et l'on conçoit aisément que cette horizontalité doit être aussi rigoureuse que possible. Il faut même avoir soin de ne l'établir qu'alors que la cuvette contient tout le mercure qu'elle doit renfermer; car toute addition de mercure produit une flexion, ou plutôt une compression, et un mouvement des vis calantes dans leur écrou. On devra aussi avoir soin de vérifier, immédiatement après l'observation, si l'horizontalité n'a pas été changée, et, de plus, non content de l'avoir établie au moyen d'un niveau à bulle d'air, on s'assurera, en amenant la pointe du sphéromètre en des points éloignés de la surface du mercure, que la hauteur de ces points est rigoureusement la même. J'insiste sur ces détails, parce que j'ai pu reconnaître au dépens de séries d'expériences entièrement perdues, que la moindre inclinaison de la glace suffit pour affecter d'erreurs énormes les mesures de très-petites dépressions.

Ces observations devront être faites dans un lieu extrêmement tranquille, le moindre ébranlement déterminant une agitation sensible dans la surface

du mercure. Le mieux est d'observer pendant la nuit, à l'heure où les maisons ne tremblent pas.

Une fois arrivé à mesurer avec exactitude de petites dépressions, je trouvai dans ces recherches plus d'intérêt que dans celles dont elles ne devaient être qu'une partie. En effet, si d'un côté la loi qui donne les volumes déprimés proportionnels au contour est une loi remarquable, importante à vérifier, de l'autre, les dépressions ont été calculées par Laplace à l'aide de la formule qui conduit à cette loi. Il y a donc également ici une vérification intéressante à chercher; de plus, cette recherche acquiert une importance particulière, parce qu'elle peut fournir des données certaines sur les corrections que l'on doit, à cause de la capillarité, faire subir aux hauteurs barométriques observées. Toutefois, je n'ai pas perdu de vue le but que je m'étais proposé d'abord, et je rapporterai plus loin quelques expériences faites à ce sujet; ces expériences sont seulement moins nombreuses que celles qui concernent les dépressions, mais elles me paraissent assez décisives.

J'ai mesuré autant de dépressions qu'il m'a été possible de le faire; je n'avais malheureusement à ma disposition qu'un très-petit choix de tubes convenables. Je regrette surtout bien vivement de n'avoir pas pu me procurer des tubes en cristal de diamètre différents. Ceux dans lesquels j'ai observé les dépressions, offraient du reste un intérêt particulier. Ils étaient formés du même cristal que les tubes capillaires des expériences précédentes, et, par une heureuse coïncidence, le produit moyen 4,813, que j'ai obtenu pour ceux de ces tubes dont l'épaisseur est du même ordre que celle des tubes actuels, est à peu près égal à celui que Laplace a admis dans le calcul de sa table des dépressions, savoir 4,738. Les autres tubes étaient en verre, tous de même nature et ayant pour densité 2,48.

Les dépressions rapportées dans le tableau suivant ont été produites de manières très-différentes, soit en faisant arriver très-lentement du mercure dans la cuvette à travers un siphon très-étroit, soit en en retirant et en secouant l'appareil; nous allons voir qu'il y a fort peu de différences entre elles, de sorte que les causes qui font varier les dépressions dans les tubes capillaires, d'après leur mode de production, n'ont pas ici d'influence appréciable.

*Dépressions du mercure dans les tubes non capillaires.*

| Désignation des tubes. | Épaisseur. | Diamètre. | Dépressions observées. | Dépressions moyennes. | Désignation des tubes. | Épaisseur. | Diamètre. | Dépressions observées. | Dépressions moyennes. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | mm. | mm. | mm. | mm. | | mm. | mm. | mm. | mm. |
| 1 cristal . . | 3,76 | 5,165 | 1,425 | 1,404 | 7 verre . . | 0,74 | 11,848 | 0,219 | 0,230 |
| | | | 1,401 | | | | | 0,217 | |
| | | | 1,401 | | | | | 0,229 | |
| | | | 1,386 | | | | | 0,241 | |
| 2 cristal . . | 3,22 | 7,210 | 0,810 | 0,801 | | | | 0,239 | |
| | | | 0,810 | | | | | 0,233 | |
| | | | 0,802 | | 8 cristal . | 1,31 | 15,702 | 0,083 | 0,085 |
| | | | 0,809 | | | | | 0,086 | |
| | | | 0,796 | | | | | 0,085 | |
| | | | 0,806 | | | | | 0,084 | |
| | | | 0,796 | | | | | 0,086 | |
| | | | 0,788 | | | | | 0,087 | |
| 3 verre. . . | 0,85 | 7,732 | 0,658 | 0,649 | 9 cristal . | 1,76 | 18,455 | 0,035 | 0,039 |
| | | | 0,639 | | | | | 0,042 | |
| | | | 0,648 | | | | | 0,039 | |
| | | | 0,639 | | | | | 0,036 | |
| | | | 0,660 | | | | | 0,043 | |
| 4 verre. . . | 1,34 | 9,150 | 0,429 | 0,437 | 10 cristal . | 1,615 | 20,030 | 0,037 | 0,036 |
| | | | 0,435 | | | | | 0,036 | |
| | | | 0,441 | | | | | 0,036 | |
| | | | 0,441 | | | | | 0,035 | |
| 5 verre. . . | 0,79 | 10,590 | 0,301 | 0,302 | | | | 0,037 | |
| | | | 0,303 | | | | | 0,033 | |
| | | | 0,295 | | | | | 0,036 | |
| | | | 0,309 | | | | | | |
| 6 verre. . . | 1,95 | 11,565 | 0,250 | 0,247 | | | | | |
| | | | 0,243 | | | | | | |
| | | | 0,250 | | | | | | |
| | | | 0,256 | | | | | | |
| | | | 0,235 | | | | | | |

Afin de tirer le meilleur parti possible des résultats précédents, et de pouvoir les comparer aisément à ceux de Laplace, j'ai tracé les courbes qui représentent les lois de ces deux espèces de résultats, en portant sur une

feuille de papier divisée les valeurs des rayons et des dépressions contenues dans les tables de Laplace et celles que j'ai trouvées. Dans toutes les courbes de la planche II, les abscisses représentent les diamètres; chaque division de ces abscisses vaut $0^{mm},1$, de sorte que les chiffres horizontaux expriment des millimètres. Une division pouvant être facilement partagée en dix parties, on a pu fixer les valeurs des diamètres à $0^{mm},01$ près. Dans les courbes *ab*, *a'b'*, les ordonnées représentant les dépressions, ont la même valeur que les abscisses, chaque division verticale valant aussi $0^{mm},1$; mais dans les courbes AB, A'B', il n'en est pas de même; afin d'obtenir une plus grande approximation, on a donné à chaque division verticale une valeur de $0^{mm},01$ seulement, de sorte qu'une division pouvant se partager en dix parties, les dépressions sont rapportées exactement à $0^{mm},001$ près.

J'ai marqué les points correspondants aux dépressions observées par les lettres C, V, qui indiquent si les tubes sont en cristal ou en verre, en y joignant des indices qui sont les numéros des tubes auxquels correspondent ces valeurs.

Je n'ai pas tracé d'un trait continu la courbe des dépressions observées, parce que je ne suis pas certain que celle que j'indique soit la véritable courbe : en effet, on remarquera que le point correspondant au tube $C_2$ s'écarte notablement de la courbe qui joint cependant tous les autres points aussi exactement qu'on peut le désirer. D'un autre côté, on doit observer que ce point est celui qui a été déterminé par le plus grand nombre d'expériences : les quatre premières ont été faites sur un même fragment de tube, mais dans des conditions différentes; le point supérieur de la triple croix figurée dans la construction graphique indique leur moyenne. Les quatre dernières expériences ont été faites sur un autre fragment de tube dont le diamètre était, du reste, exactement le même que celui du précédent, leur moyenne est indiquée par le trait inférieur de la croix; ces deux moyennes ne diffèrent que de $0^{mm},009$, et les valeurs extrêmes des deux séries diffèrent de $0^{mm},022$; or, il faudrait, pour faire rentrer le point dans la courbe, ajouter à la valeur extrême $0^{mm},788$ une erreur négative égale à la précédente, et supposer la moyenne $0^{mm},801$ susceptible d'une erreur de $0^{mm},036$, ce qui me paraît inadmissible. Je suis plus porté à croire que le point $C_2$ appartient à

une autre courbe qui relierait les dépressions que l'on observerait dans les tubes de cristal; je n'ai pas pu la tracer faute d'un nombre suffisant de points, mais on peut, d'après la position des points C, présumer qu'elle se rapprocherait beaucoup de celle de Laplace. La courbe des points V s'écarte notablement de cette dernière, mais on voit qu'elle tend à s'en rapprocher vers ses deux extrémités, où elle se confond en même temps avec celle des points C.

Je crois donc pouvoir conclure que les dépressions calculées par Laplace sont à très-peu près celles qui ont lieu dans des tubes de cristal, et qu'elles sont notablement supérieures à celles qui se produisent dans les tubes de verre.

On pourra, par suite, dans les corrections barométriques, recourir à la table de Laplace, quand le baromètre sera en cristal; mais dans les expériences très-précises, on ne pourra pas appliquer ces corrections à des tubes de verre ordinaire. Je n'oserais pas affirmer que l'on pourra en toute confiance prendre les dépressions sur la courbe de mes expériences; car tant que je n'aurai pas observé les dépressions du mercure dans des tubes de verre de nature très-différente et bien connue, je ne me croirai pas fondé à admettre que les résultats de mes expériences s'appliquent à tous les tubes de verre. Néanmoins, comme les différents verres du commerce se rapprochent par leur composition beaucoup plus l'un de l'autre que du cristal, je crois qu'il sera préférable d'emprunter les corrections à faire aux hauteurs barométriques observées dans les tubes de verre plutôt à la courbe que j'ai tracée qu'à la table de Laplace. Toutefois, il serait prématuré peut-être de traduire en table les données de ma construction graphique. Une table de cette importance doit reposer sur un bien plus grand nombre d'observations, que je me propose d'effectuer aussitôt que j'aurai à ma disposition un choix considérable de tubes.

Bien que nous ayons pu admettre comme une approximation la coïncidence de la courbe naturelle des dépressions du mercure dans les tubes de cristal avec celle des dépressions calculées par Laplace, les observations actuelles, jointes à d'autres données, nous obligent cependant à reconnaître que cette coïncidence n'est pas rigoureuse, et nous permettent d'assigner au

phénomène de la dépression du mercure dans les tubes en cristal de rayon quelconque sa véritable marche.

Les données de la table de Laplace ont été calculées en intégrant, par approximation, l'équation différentielle du second ordre

$$D = \frac{4^{\text{mm.q.}},738}{R},$$

dans laquelle D est la dépression dans un tube dont le diamètre est $2r$, et R le rayon de courbure au point supérieur du ménisque. De plus, Laplace a admis dans son intégration que la surface du mercure coupait la surface du tube sous un angle de 48° centésimaux, indépendant du rayon du tube. La courbe qui joint les points dont les dépressions ainsi calculées sont les abscisses, sera pour nous la *courbe théorique;* celle qui joint les points fournis par l'observation sera la *courbe naturelle.*

Si nous supposons les points $C_1$, $C_2$, $C_8$, $C_9$, $C_{10}$ joints par une courbe que nous nous sommes abstenu de tracer, parce que nous n'eussions pu le faire avec une certitude suffisante, il est visible que cette courbe naturelle coupera la courbe théorique en deux points, dont l'un est précisément le point $C_{10}$, et dont l'autre sera situé plus haut que le point $C_1$; par suite, la courbe naturelle, après être restée inférieure à la courbe théorique entre ces points, passera des deux côtés au-dessus d'elle. Il n'est pas douteux qu'il en sera ainsi dans la partie inférieure des courbes; car on voit qu'au point $C_{10}$, elles se coupent sous un angle trop sensible pour que l'on puisse admettre qu'à partir de ce point, elles se confondent. La dépression naturelle convergerait donc moins rapidement vers 0 que la dépressien théorique. Nous pouvons aussi nous convaincre que les courbes se coupent dans leurs parties supérieures, en considérant les trois résultats que j'ai obtenus dans mon premier mémoire pour des tubes très-capillaires. Ces résultats sont les suivants :

| Rayons. r | Dépressions. D | Produits. Dr |
|---|---|---|
| mm 0,0366 | mm 134.42 | 4.920 |
| 0,0472 | 107.02 | 5.051 |
| 0,0492 | 101.62 | 5.000, |

La moyenne de ces résultats est 4.990; elle est notablement supérieure au nombre 4.758 que Laplace admet, et que nous avons trouvé à peu près pour des tubes moins capillaires.

Il résulte de là, qu'en un point dont l'abscisse est une fraction de millimètre, les deux courbes se coupent de nouveau, et que la courbe théorique passe au-dessous de la courbe naturelle, de sorte que la dépression réelle converge plus rapidement vers l'infini que la dépression théorique.

Comme le point d'intersection des deux courbes se trouve dans la partie qui correspond à de petits diamètres, nous voyons que, dans ces limites mêmes, la loi du rapport inverse de la dépression au diamètre n'est pas rigoureuse, et qu'au-dessus d'une certaine valeur du rayon, elle est plus petite que ne le veut cette loi, tandis qu'au-dessous elle est plus grande. Nous rencontrerons plus tard un grand nombre de résultats de ce genre.

En considérant la courbe relative aux tubes de verre, on retrouve avec plus de certitude encore les conclusions précédentes; car la différence de courbure de cette courbe et de la courbe théorique est beaucoup plus forte que celle que pouvait offrir la courbe des tubes de cristal. Manquant absolument de données à l'égard des dépressions dans les tubes capillaires de verre, j'observai ces dépressions dans de semblables tubes; tous ceux que j'avais à ma disposition étaient à section très-elliptique, ce qui m'avait fait renoncer à effectuer sur eux aucune observation; voici les données des deux tubes que j'ai choisis comme les moins irréguliers :

| | 1. | 2. |
|---|---|---|
| Épaisseur | 1.78 | 1.75 |
| Demi-axes | 0.3469<br>0.3375 | 0.6413<br>0.6788 |
| R = | 0.3421 | 0.6698 |
| Dépressions observées. | 15.65<br>15.30<br>15.30 | 7.70<br>7.20<br>7.60 |
| Dépressions moyennes. | 15.42 | 7.50 |

J'ai porté les points V′, V″, correspondants à ces données, sur la courbe

*ab*, et l'on voit qu'ils sont en dehors de cette courbe, du côté opposé aux points $V_3$, $V_4$.....

La courbe naturelle coupe donc la courbe théorique entre les points $V_3$ et $V''$. Si l'on calcule les produits $(h + \frac{r}{3})r$ relatifs à ces tubes, on trouve pour le premier 5.313 et pour le second 5.171, nombres qui s'écartent bien davantage du produit 4.738 que ceux qui sont relatifs au cristal : c'est ce que l'on pouvait prévoir d'après la forme de la courbe.

J'ai tracé aussi sur la figure précédente la courbe correspondante aux résultats obtenus par lord Cavendish; son irrégularité montre bien la nécessité de ces nouvelles expériences.

Revenons actuellement à la question primitive, c'est-à-dire à la mesure des volumes déprimés. J'ai dit qu'après avoir déterminé la dépression dans un tube de rayon donné, je mesurai la hauteur *h* du point supérieur d'une petite colonne de mercure contenue dans ce tube, au-dessus d'un plan horizontal servant de base au tube (*fig.* 13). Afin de pouvoir appliquer également ici la détermination du contact par la naissance d'un courant électrique, je prenais comme plan horizontal une plaque de fer soigneusement dressée, et qui communiquait par un fil métallique avec la boussole. Après avoir pris la hauteur du mercure, en soulevant un peu le tube je laissais s'échapper le mercure contenu, que je recueillais ensuite pour le peser, puis enlevant le tube même, je prenais la hauteur du plan de fer.

J'ai mesuré ainsi les poids des volumes déprimés dans les tubes 1, 2, 8 et 9 des expériences précédentes. Voici les résultats que j'ai obtenus; les notations sont celles de la page 102.

| N°s des tubes. | Rayons. | *h*. | *p*. | Poids déprimé *x*. | Rapports $\frac{x}{\tau \Delta r}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | mm. | mm. | mg. | mg. | mm.q. |
| 1 | 2,583 | 6,903 | 1800 | 567 | 5.140 |
| 2 | 3,605 | 7,244 | 3703 | 763 | 4.955 |
| 5 (1) | 5,324 | 3,294 | 3185 | 1169 | 5.141 |
| 9 | 9,228 | 5,767 | 19130 | 1987 | 4.926 |
| » | » | 5,391 | 17695 | 2057 | 5.219 |

(1) Ce tube est un fragment du même tube que le n° 8 du tableau précédent. Les diamètres 10.648 et 10.590 sont assez peu différents pour que l'on puisse prendre ici la valeur de la dépression inscrite dans ce tableau.

Les nombres de la dernière colonne présentent une égalité satisfaisante; leur moyenne est 5,077, nombre un peu plus fort que le nombre 4.813 relatif aux tubes capillaires. Cependant, nous avons vu que, dans nos premières expériences, le produit de la dépression par le rayon pour les tubes très-capillaires est 4.990, nombre très-voisin de la moyenne actuelle, et supérieur même à deux des résultats précédents. Il n'y aurait donc que les tubes dont les diamètres sont compris entre $0^{mm},1$ et $5^{mm}$, qui pourraient se soustraire à la loi des volumes déprimés; encore la différence est-elle assez faible pour qu'il soit permis de l'attribuer à quelque cause d'erreur inaperçue. Quoi qu'il en soit, nous pouvons affirmer que la loi en vertu de laquelle les volumes de mercure déprimés dans des tubes cylindriques à section circulaire sont proportionnels aux rayons de ces tubes, est à très-peu près exacte pour des rayons compris entre $0^{mm},04$ et $9^{mm}$, et présumer qu'elle peut s'étendre, avec la même approximation, à toutes les limites d'espace mesurables.

C'est là certainement un des plus beaux résultats théoriques que puisse vérifier l'expérience; mais l'on doit s'étonner de son exactitude, en présence des différences que nous avons constatées entre les dépressions observées et celles qui se déduisent de la formule même, dont l'intégration a conduit à ce résultat. Et l'on doit remarquer que l'on ne pourrait rétablir l'accord entre ces dépressions qu'aux dépens de la vérification précédente; c'est-à-dire que celle-ci cesserait d'exister si, dans le calcul des volumes déprimés, nous nous étions servi des dépressions calculées.

### *Dépression d'une colonne de mercure interrompue par des bulles d'air.*

M. Bertrand, dans son travail sur les phénomènes capillaires [1], pose le théorème suivant, qui, si la théorie est exacte, doit être rigoureusement vrai.

« Si un tube capillaire est plongé dans un liquide, et que la colonne du liquide soulevé soit séparée en plusieurs parties par des bulles d'air introduites artificiellement, la masse totale du liquide soulevé ne dépendra ni du nombre ni du volume de ces bulles. »

[1] *Journal de M. Liouville*, t. XIII, pp. 186 et 204, 1848.

Quoique cet énoncé s'applique seulement aux phénomènes d'élévation, rien dans l'analyse qui y conduit ne me paraît restreindre ce théorème à ces phénomènes, et empêcher son application aux dépressions. J'ai donc cherché à le vérifier par l'expérience, bien que je fusse certain d'avance que le résultat de celle-ci serait contraire à la loi précédente. Une observation trop fréquente avait motivé cette conviction, et tous ceux qui ont calibré des tubes très-capillaires (de moins de $0^{mm},1$ de diamètre) l'ont faite bien malgré eux. Lorsqu'on fait marcher dans ces tubes une petite colonne de mercure, soit à l'aide du souffle, soit par tout autre moyen, il arrive souvent qu'en un point du tube, sans cause apparente, la colonne s'arrête. Si alors, pour lui faire franchir l'invisible obstacle, on la ramène en arrière afin de lui imprimer une nouvelle impulsion, on voit parfois la colonne se diviser malgré l'extrême finesse du tube. Dès ce moment tous les efforts sont inutiles; même dans ces parties du tube, où tout à l'heure elle se mouvait sans peine, la colonne est devenue immobile, à tel point que le souffle le plus fort, les secousses les plus violentes, sont impuissants à la déplacer; c'est à peine si, à l'aidé d'une machine pneumatique, on peut retirer du tube la colonne rebelle.

Le même effet se produit, mais en sens inverse, dans des tubes assez larges, de $1^{mm}$ à $2^{mm}$ de diamètre; on a peine dans ce cas à amener la colonne de mercure dans une position voulue, qu'elle dépasse malgré vous; si pour la ramener on aspire, on la voit souvent aussi se diviser, et aussitôt offrir une résistance très-sensible; et lorsqu'en continuant à aspirer on surmonte cette résistance, il arrive presque toujours que la colonne divisée prend, à peine a-t-elle cédé, une telle vitesse qu'elle se précipite hors du tube.

Ces variations de résistance, produites par la division de la colonne, ne peuvent pas être attribuées au frottement, car rien dans cette division n'est de nature à modifier cette force. Les phénomènes précédents sont donc bien des phénomènes capillaires qui nous apprennent qu'il faut, pour mouvoir une colonne de mercure divisée, une pression plus forte que celle qui met en mouvement la même colonne non interrompue. Il résultait immédiatement de là, que la dépression du mercure dans les tubes capillaires devait être notablement augmentée par l'interposition de bulles d'air dans la colonne inté-

rieure du tube; c'est en effet ce que les deux expériences suivantes indiquent.

1. Dans un tube de $0^{mm},0944$ de rayon, la dépression d'une colonne continue était $55^{mm},95$; encore est-ce là la plus forte dépression observée (voir tableau I, n° 11). Cette colonne, étant ensuite divisée par trois bulles d'air de longueur $1^{mm},85$, $0^{mm},60$, $0^{mm},90$, se composait d'une partie continue plus trois fragments, dont les longueurs étaient $7^{mm},60$, $2^{mm},55$, $5^{mm},95$; l'extrémité supérieure de ce dernier, qui formait le sommet de la colonne, était à une hauteur de $92^{mm},15$ au-dessous du niveau dans le vase. En ajoutant à cette dépression la somme des hauteurs des bulles d'air, nous trouvons pour hauteur du volume déprimé $95^{mm},90$, et en apportant les corrections dues aux ménisques, et dont la somme sera $7\frac{r}{3}$, nous aurons 96,12 au lieu de 55,98.

2. Dans le tube 8 du tableau I, une seule bulle d'air de $0^{mm},9$ de hauteur séparait du reste de la colonne une petite colonne de $3^{mm},25$. Le sommet de cette colonne était déprimé de $100^{mm},55$, en ajoutant 0,9 et la correction $3.\frac{r}{3}$, on a comme hauteur de volume déprimé la valeur $101^{mm},53$. Or, la dépression la plus forte, et visiblement trop forte, observée dans ce tube sans interposition de bulle d'air était $69^{mm},30$.

Le théorème de M. Bertrand n'est donc pas vérifié en ce qui concerne la dépression du mercure; nous verrons plus loin son application aux phénomènes d'élévation.

### *Dépression des métaux fondus.*

On n'a pas, je pense, sur ce sujet, d'autres expériences que celles de Gellert. Elles ont été faites sur le plomb fondu seulement, et l'on ne peut guère en tirer d'autres conclusions que le fait simple de la dépression. Gellert néanmoins en conclut aussi que la dépression ne dépend que du diamètre du tube au point où se trouve le niveau, et qu'elle est à peu près en raison inverse de ce diamètre. Il déduit cette loi des dépressions $7^{l},3$ et $2^{l},7$ observées dans des tubes dont les diamètres étaient $0^{l},7$ et $2^{l},1$. Le rapport des dépressions est $2^{l},7$; celui des diamètres 3,0; la différence est de $\frac{1}{10}$ de ce dernier rapport. Outre que cette différence est déjà assez sensible, les ex-

périences qui l'ont fournie sont faites de telle manière que l'on est en droit de supposer qu'elle est la plus petite de celles que Gellert a observées, de sorte que les observations rapportées seraient des expériences de choix [1].

En effet, ce physicien opérait des deux manières suivantes : 1° il plongeait un tube de verre dans le plomb fondu, et mesurait la distance du niveau à l'extrémité supérieure du tube; puis, appliquant le doigt sur cette extrémité, il retirait le tube et mesurait la distance du niveau intérieur à la même extrémité; la différence des deux mesures donnait la dépression. Les vices d'un pareil mode d'expérience n'ont pas besoin d'être indiqués; 2° Gellert avait observé que la surface du métal fondu dans le tube se figeait avant le reste de la masse, et il retirait le tube lorsque la solidification de la masse entière commençait. Cette manière d'opérer ne me paraît guère plus sûre que la précédente.

Toutefois, il suffit de modifier légèrement ce dernier procédé pour obtenir des garanties suffisantes d'exactitude. Après avoir fondu le métal dans un creuset assez large et y avoir plongé un ou plusieurs tubes, on laisse solidifier toute la masse, et, en prenant le niveau au moyen d'une pointe, on mesure au cathétomètre la hauteur au-dessus de ce niveau de l'extrémité supérieure du tube. Cela fait, on reporte le creuset au feu, et lorsque le métal commence à fondre, on retire les tubes; le métal qui se trouve dans leur intérieur, préservé par la mauvaise conductibilité du verre, n'a pas encore éprouvé de fusion. On doit, pendant la première fusion, préserver la surface métallique de l'oxydation qui se produit rapidement à ces températures. Il suffit pour cela de faire arriver continuellement dans le tube et dans le creuset de l'acide carbonique.

Sans cette précaution, dont Gellert ne fait pas mention, on obtient les résultats les plus discordants, et nous allons voir que, malgré son emploi, on rencontre encore peu de constance.

Après avoir retiré les tubes, on mesure, toujours au cathétomètre, la distance de la surface du métal intérieur au haut du tube, qui doit être retranchée de la première mesure, pour donner la dépression. J'ai trouvé ainsi,

[1] Mém. de l'Acad. de Saint-Pétersbourg, 1740, t. XII. — *De phoenomenis plumbi fusi in tubis capillaribus;* C.-E. Gellert.

pour la dépression de l'étain dans un même tube de $2^{mm},013$ de diamètre, $14^{mm},30$, $13^{mm},90$ et $10^{mm},70$, nombres qui diffèrent considérablement entre eux et de leur moyenne 13,00.

Pour m'assurer si cette discordance était due au mode d'observation ou à la nature même du phénomène, j'opérai de la manière suivante, qui offre toutes garanties. Après avoir laissé se solidifier entièrement le métal fondu, je faisais pénétrer dans l'intérieur du tube un fil de platine bien droit, ou mieux une petite tige en verre étiré, de longueur bien connue. Ce fil ou cette tige, beaucoup plus étroit que l'intérieur du tube, ne s'arrêtait que sur la surface solidifiée du métal, et l'on pouvait, en visant l'extrémité supérieure, connaître le niveau dans le tube comme on le connaissait dans le creuset au moyen d'une pointe. J'ai trouvé ainsi pour l'étain et le tube précédent une dépression $= 11^{mm},8$.

Pour un autre tube de $1^{mm},26$ de diamètre, et toujours avec l'étain, j'ai trouvé comme dépression $26^{mm},9$ et $24^{mm},7$. La différence est encore de $^{1}/_{10}$ environ.

Enfin, avec le plomb et dans un tube de même diamètre, $1^{mm},26$, j'ai trouvé $5^{mm},4$ et $7^{mm},2$, nombres qui diffèrent dans le rapport de 3 à 4.

Il ressort immédiatement de ces divergences la nécessité de modifier les circonstances dans lesquelles le phénomène se produit. Je crois que le seul moyen d'arriver à quelque résultat dans ce genre d'observation, consisterait à fondre le métal dans un tube large, auquel serait soudé ou étiré un tube capillaire, et dans lequel passerait continuellement un courant d'acide carbonique, ou mieux d'azote. Je me suis convaincu que ce mode d'observation était praticable, au moins pour l'étain, le plomb, le bismuth et l'antimoine; mais comme il faudrait, pour observer le véritable état d'équilibre, maintenir pendant plusieurs heures la température de fusion constante, et le dégagement de gaz continuel, cette expérience exigerait une complication d'appareils et surtout une dépense de temps que ne m'a pas paru mériter l'importance du sujet, eu égard au but du travail actuel.

*Élévation des liquides dans les tubes capillaires.*

L'étude de l'élévation des liquides dans les tubes capillaires semble offrir à l'expérience des quantités plus faciles encore à mesurer que les dépressions ; elle présente peut-être aussi plus d'intérêt, parce que le fait de l'ascension d'un liquide contre l'action de la pesanteur peut au premier abord paraître plus frappant que le phénomène contraire. C'est ainsi que Jurin déclare avoir fait quelques expériences, dans le but de s'expliquer pourquoi l'élévation de l'eau dans les tubes capillaires ne peut pas fournir un moyen de résoudre l'éternel problème du mouvement perpétuel. Il n'est donc pas étonnant que ces phénomènes aient été beaucoup observés. Déjà au milieu du dix-septième siècle, on connaissait sur ce sujet à peu près tout ce que nous savons aujourd'hui. Je ne m'arrêterai pas à raconter les travaux de cette époque; il me suffira de renvoyer de nouveau, pour l'étude de cette histoire, au *Traité de la cohésion* de M. Frankenheim. J'arriverai donc immédiatement aux expériences plus récentes, qui ont été invoquées comme appuis des théories de Laplace et de Poisson, et qui, par cela seul, ont pour nous plus qu'un intérêt historique.

Ces expériences sont en si petit nombre, que l'on s'étonne de la facilité avec laquelle on s'en est contenté. Laplace cite d'abord les expériences de Haüy et Tremery, sur l'ascension de l'eau et de l'huile d'orange dans trois tubes de diamètres différents. Les nombres obtenus vérifient assez bien la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre; mais des expériences postérieures ont montré que ces nombres sont trop petits de plus de moitié. Laplace lui-même cite plus loin des expériences de Gay-Lussac, donnant pour l'élévation de l'eau dans un tube de $1^{mm}$ de diamètre, $30^{mm},1$, tandis que, d'après Haüy et Tremery, elle ne serait que $13^{mm},6$; il attribue cette énorme différence à ce que ces deux physiciens observaient sur des tubes secs, tandis que Gay-Lussac humectait fortement les siens. Mais Poisson cite une autre expérience de Gay-Lussac, d'après laquelle l'élévation de l'huile d'orange donnée par Haüy et Tremery, serait de moitié trop faible, et les résultats que j'ai obtenus donnent la même conclusion. Or, l'huile

d'orange s'élève tout aussi haut dans un tube sec que dans un tube mouillé; de plus ce liquide fournit à l'observation des résultats très-constants. On doit donc soupçonner dans les chiffres indiqués par Haüy et Tremery quelque erreur considérable. M. Frankenheim suppose que ces physiciens ont confondu les lignes françaises avec les millimètres que l'on commençait seulement à employer alors, et il trouve, qu'en admettant cette confusion, leurs résultats s'accordent avec ceux de Gay-Lussac; mais il faudrait admettre en outre que cette substitution des lignes aux millimètres n'a été faite que pour l'une des données, c'est-à-dire ou pour l'élévation ou pour le diamètre, et cela me parait invraisemblable. J'admettrais plus volontiers que Haüy et Tremery ont donné pour les diamètres des tubes des valeurs qui n'étaient que celles des rayons. Quoi qu'il en soit, ces expériences ne peuvent pas être regardées comme des expériences précises; il suffit de considérer les valeurs $2^{mm}$, $\frac{4}{3}^{mm}$, et $\frac{3}{4}^{mm}$ données comme diamètres des tubes, pour être convaincu du peu de précision des mesures.

Laplace cite aussi deux expériences de ces physiciens, sur la dépression du mercure, lesquelles vérifient encore rigoureusement la théorie; mais elles sont faites de telle façon qu'il est impossible de leur accorder la moindre confiance.

Enfin, on doit ajouter à ces observations les deux expériences de Gay-Lussac qui sont rapportées par Laplace, Poisson, et dans tous les traités de physique; elles ont constitué longtemps la seule démonstration expérimentale de la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre. Or, en outre qu'elles sont en aussi petit nombre que possible, ces deux expériences ont le défaut d'être faites sur deux tubes dont les diamètres ne diffèrent pas beaucoup l'un de l'autre; elles n'apprennent donc nullement entre quelles limites la loi est exacte.

Les premières expériences faites en vue de décider ce point important sont celles de Simon[1] (de Metz); elles ont été effectuées avec beaucoup de soin et entre des limites extrêmement étendues. Ainsi les diamètres des tubes employés variaient d'une manière assez continue entre $0^{mm},006$ et $31^{mm}$. La conclusion principale de ce travail, en ce qui concerne les tubes capillaires,

[1] *Annales de phys. et de chimie;* 1851.

est que le produit de l'élévation par le diamètre, qui devrait être un nombre constant, varie d'une manière continue, en croissant à mesure que le diamètre décroît.

On peut reprocher à ces expériences de reposer sur un principe qui n'est pas bien certain. En effet, Simon, faisant communiquer le tube capillaire plongé dans l'eau avec un réservoir d'air portant un manomètre à eau, déterminait l'élévation de l'eau dans le tube par la colonne d'eau soulevée dans le manomètre au moment où, par une compression suffisante, on forçait l'air du réservoir à s'échapper par l'extrémité immergée du tube. Il admettait que cette colonne, diminuée de la distance de cette extrémité au-dessous du niveau, était égale à la hauteur à laquelle l'eau s'élèverait librement dans le tube. Simon avait adopté ce procédé pour plusieurs raisons, dont aucune ne me paraît bien valable. Il nie la possibilité d'observer directement, au moyen du cathétomètre, l'élévation des liquides dans les tubes très-étroits; or, rien n'est plus aisé avec une lunette grossissant seulement six ou sept fois. Ce grossissement étant augmenté de celui qui est dû aux parois mêmes du tube, on peut observer sans peine le niveau d'un liquide dans un tube dont le diamètre est $0^{mm},03$, ce qui est une limite inférieure bien suffisante, d'autant plus qu'il est fort difficile de mesurer avec rigueur des diamètres moindres. Simon allègue en outre ce fait, que la hauteur de l'eau dans un tube capillaire n'est pas la même lorsque l'eau s'élève dans le tube et lorsqu'elle y descend, après avoir été soulevée trop haut. Nous verrons plus loin que ce fait ne se produit pas quand on opère sur des tubes mouillés; d'ailleurs, en admettant qu'il fût vrai, on serait en droit de demander à Simon laquelle de ces deux hauteurs doit être donnée par son procédé, ou si c'est une troisième hauteur intermédiaire qu'il détermine.

Enfin, ce physicien justifie le principe de ses expériences par un raisonnement qui ne me paraît pas parfaitement concluant et qui se réduit à ceci : si, dans un tube capillaire, l'eau s'élève à une hauteur H, et si l'on comprime l'air intérieur de ce tube de façon à ce que l'excès de sa pression sur la pression extérieure soit marqué par une colonne d'eau $h$, la hauteur H se réduira à $H - h$, et si $h = H$, elle se réduira à 0, l'eau ne s'élèvera pas dans le tube. Réciproquement, si l'extrémité d'un tube touche la surface de

l'eau, et si on comprime l'air intérieur de ce tube de manière à empêcher l'eau de s'y élever, la colonne d'eau $h$ mesurant l'excès de pression sera égale à la hauteur H à laquelle l'eau s'élèverait librement dans le tube.

Il est probable, quoique non évident, que l'excès de pression mesuré par la hauteur $h$ doit réduire l'élévation H d'une quantité égale à cette hauteur $h$, tant que le liquide est dans l'intérieur du tube, parce qu'alors il peut conserver la même surface et qu'il est soumis aux mêmes forces; mais il n'en est plus ainsi dès qu'il arrive à l'extrémité du tube. Aussitôt sa surface change et devient celle d'une bulle d'air ayant pour base la section intérieure du tube, et dont la surface peut être très-différente, selon la rapidité avec laquelle les bulles d'air se dégagent. Il est naturel de supposer que les colonnes manométriques peuvent être influencées par ces différences de surface. Le doute est encore augmenté par le tort que Simon a eu de ne publier que les moyennes de ses expériences; on ignore jusqu'à quel point elles s'accordaient entre elles.

C'est pour décider le degré de confiance que l'on peut accorder aux résultats de ce physicien, que j'ai cru nécessaire d'entreprendre les quelques expériences dont je donne ici les résultats. Elles ont été faites d'abord avec un appareil aussi simple que possible (*fig.* 6), et consistant en un manomètre deux fois recourbé et soudé à un tube capillaire. J'avais adopté cette simple disposition afin d'éviter d'une manière certaine toute fuite d'air. Après avoir plongé le tube dans un liquide, on mesurait d'abord la hauteur H à laquelle ce liquide s'élevait soit directement, par un mouvement ascensionnel, soit après avoir été aspiré jusqu'au haut du tube et être redescendu librement: une fois cette hauteur déterminée, on versait de l'eau dans le manomètre jusqu'à ce que l'air comprimé se dégageât par le bas du tube; après quelque temps, on mesurait au moyen d'un cathétomètre la hauteur $h$ de la colonne manométrique et la distance D du bas du tube au niveau dans le vase, on devait avoir $h - D = H$. C'est au moyen d'appareils de ce genre qu'ont été faites les trois premières expériences concernant l'eau, et celles qui concernent l'acide sulfurique. En ayant construit un semblable pour un tube plus large, je reconnus avec surprise une différence énorme entre les hauteurs H et $h - D$. Je l'attribuai d'abord à ce que les bulles d'air, se dégageant avec

une certaine vitesse, il en sortait davantage qu'il ne devait en sortir, d'où il résultait une diminution de pression de l'air intérieur d'autant plus considérable que le volume de celui-ci était plus petit. Pour diminuer à la fin la vitesse d'écoulement des dernières bulles et l'influence exercée sur la pression par les bulles échappées, je remplaçai l'appareil précédent par un autre tout aussi simple, et consistant en un flacon à deux tubulures dans lesquelles étaient mastiqués le tube et le manomètre. C'est avec cet appareil qu'ont été faites les observations IV, V, VI, relatives à l'eau, et celles qui concernent l'huile d'orange et le brome.

*Mesure manométrique de l'élévation des liquides dans les tubes capillaires.*

**EAU.**

| Nos des observations. | Rayon des tubes. | Hauteur observée directement H. | Hauteur manométrique A. | Hauteur du niveau dans le tube D. | Élévation déduite. | Différences. | Nos des observations. | Rayon des tubes. | Hauteurs observées. | Hauteur manométrique A. | Hauteur du niveau dans le tube D. | Élévation déduite. | différences. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,0960 | 153.70 | 165.10 | 11.10 | 154.10 | - 0.40 | IV. | 0,590 | 24.90 | 26.00 | - 10.40 | 15.60 | + 9.30 |
| | | | 100.50 | 52.80 | 153.30 | + 0.40 | | | 24.60 | 30.25 | » | 19.85 | + 4.75 |
| | | | 100.80 | 52.80 | 153.60 | + 0.10 | | | 24.60 | 26.55 | » | 16.15 | + 8.45 |
| | | | 157.15 | - 3.50 | 153.65 | + 0.05 | | | 24.60 | 27.45 | » | 17.05 | + 7.55 |
| | | | 157.10 | - 3.50 | 153.60 | + 0.10 | | | | 27.05 | » | 16.65 | + 7.95 |
| | | | 157.80 | - 2.45 | 155.35 | - 1.65 | | | | 26.10 | » | 15.70 | + 8.90 |
| | | | 98.15 | 57.10 | 155.25 | - 1.55 | | | | 38.65 | - 22.95 | 15.70 | + 8.90 |
| | | | 174.80 | 19.00 | 155.80 | - 2.10 | | | | 42.10 | » | 19.15 | 5.45 |
| II. | 0,09703 | 153.55 | 160.50 | - 12.35 | 148.15 | + 5.40 | V. | 0,945 | 15.30 | - 16.15 | + 31.45 | 15.30 | + 0.00 |
| | | | 162.80 | » | 150.45 | + 3.10 | | | | - 65.05 | 80.35 | 15.30 | + 0.00 |
| | | | 163.50 | » | 151.15 | + 2.40 | | | | - 22.65 | 38.15 | 15.50 | - 0.20 |
| | | | 167.50 | » | 155.15 | - 1.60 | | | | - 44.65 | 59.95 | 15.30 | + 0.00 |
| III. | 0,1862 | 80.05 | 85.45 | - 4.25 | 81.20 | - 1.15 | | | | - 62.50 | 77.60 | 15.10 | + 0.20 |
| | | | 83.90 | - 3.45 | 80.45 | - 0.40 | | | | -103.45 | 118.05 | 14.60 | + 0.70 |
| | | | 85.05 | - 4.55 | 80.50 | - 0.45 | VI. | 0,935 | 15.55 | 4.25 | 10.75 | 15.00 | + 0.55 |
| | | | 84.60 | - 4.55 | 80.05 | 0.00 | | | 15.55 | 3.15 | 12.30 | 15.45 | + 0.10 |
| | | | 85.00 | - 4.55 | 80.45 | - 0.40 | | | | - 9.05 | 27.45 | 18.40 | - 2.85 |

*Mesure manométrique de l'élévation des liquides dans les tubes capillaires.*

| Rayon des tubes. | Hauteurs observées directement H. | Hauteurs manométriques $h$. | Hauteur du niveau dans le tube D. | Élévation déduite. | Différence. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *Acide sulfurique.* | | | |
| 0,0960 | 76.15 | 86.14 | − 12.65 | 73.49 | + 2.66 |
| | | 91.17 | » | 78.52 | − 2.37 |
| | | 87.12 | » | 74.47 | + 1.68 |
| | | 88.23 | » | 75.58 | + 0.57 |
| | | 80.03 | − 5.25 | 74.78 | + 1.37 |
| | | *Huile d'orange.* | | | |
| 0,1862 | 35.05 | 39.86 | − 5.35 | 34.51 | + 0.54 |
| | | 39.86 | » | 34.51 | + 0.54 |
| | | 40.65 | » | 35.30 | − 0.25 |
| | | 39.97 | » | 34.62 | + 0.43 |
| | | 39.12 | − 4.55 | 34.57 | + 0.48 |
| | | *Brome.* | | | |
| 0,1659 | 15.51 | 23.75 | 0.50 | 23.25 | − 7.74 |
| | | 22.67 | | 22.17 | − 6.66 |
| | | 22.24 | | 21.74 | − 6.23 |
| | | 20.49 | | 19.99 | − 4.48 |
| | | 19.64 | | 19.14 | − 3.63 |

Dans plusieurs de ces expériences je n'ai pas entièrement refoulé la colonne soulevée dans le tube capillaire, alors la valeur de D est celle de l'élévation restant dans le tube; on reconnaît facilement ces expériences parce que D y est positif. En général, cette quantité D exprime la hauteur du niveau dans le tube au-dessus du niveau dans le vase; quand les bulles se dégagent, cette hauteur est sensiblement égale à la distance du bas du tube au-dessous du niveau. Elle est donc alors négative. Cette quantité étant ainsi considérée, on voit qu'au lieu de la retrancher il faudra ici l'ajouter, en lui conservant le signe que nous lui donnons dans les tableaux suivants. Les rayons des tubes ont été déterminés par les procédés que nous avons décrits

précédemment. Les hauteurs manométriques étant toujours celles de colonnes d'eau, on les a, pour d'autres liquides, ramenées à ce qu'elles eussent été en employant ces liquides eux-mêmes.

Ces expériences montrent que le procédé employé par Simon peut donner, pour certains liquides tels que l'eau, l'acide sulfurique et l'huile d'orange, des résultats suffisamment exacts, lorsqu'on ne l'applique qu'à des tubes très-capillaires, et je m'empresse d'ajouter que Simon n'a appliqué exclusivement ce mode de mesure qu'à ces sortes de tubes. On peut donc avoir confiance dans la plupart de ses résultats.

L'expérience IV nous montre que la mesure manométrique ne donne aucun résultat tant soit peu approximatif, quand le rayon atteint la valeur $0^{mm},590$, et les deux expériences suivantes prouvent que c'est à l'extrémité du tube, et non tant que le liquide est dans son intérieur, que le principe de cette mesure devient inexact, c'est-à-dire que la somme algébrique de l'élévation et de la hauteur manométrique est constante tant que le ménisque est dans le tube même, et ne cesse de l'être que lorsque des bulles se dégagent. On voit du reste, lorsqu'on observe sur des tubes d'environ $2^{mm}$ de diamètre, qu'aussitôt que le dégagement des bulles a cessé, l'eau remonte à une certaine hauteur dans le tube. Il est probable que le même phénomène s'est produit dans le tube V, sans que je l'aie remarqué ; mais il est clair que si l'on doit, en même temps que la colonne manométrique, mesurer chaque fois l'élévation du liquide dans le tube, il est beaucoup plus simple de ne mesurer que celle-ci, et le procédé perd toute sa valeur. Enfin nous observerons que, pour le brome, ce mode de mesure donne des résultats tout à fait erronés, et qui, chose remarquable, sont tous trop forts, tandis que la plupart des résultats précédents sont trop faibles. Le phénomène semble donc plus complexe que l'on ne serait porté à le croire. Il devenait utile de l'étudier attentivement, en variant les conditions dans lesquelles il se produit.

Cette étude d'ailleurs présente un intérêt plus général, car elle n'est autre chose que l'examen de l'influence exercée par l'atmosphère qui surmonte un liquide sur l'élévation de ce liquide dans un tube capillaire. Il était particulièrement intéressant de s'assurer si la nature et la pression du gaz n'avaient pas d'influence : à cet effet, j'ai commencé par substituer à l'air d'autres gaz.

L'appareil que j'ai employé d'abord n'était qu'un manomètre à trois branches verticales soudées à un tube capillaire et à un autre tube pouvant amener un gaz dans l'appareil (*fig.* 8). Ce dernier tube portait la moitié d'un robinet double, semblable à ceux que M. Regnault emploie dans son eudiomètre. L'autre moitié de ce robinet était appliquée à un appareil à dégagement. Après avoir entièrement rempli d'eau manomètre et tube, et plongé dans l'eau le tube capillaire, je réunissais les deux parties du robinet et, en les ouvrant toutes deux, je faisais arriver le gaz dans l'intérieur du manomètre; l'eau s'y soulevait pour former la colonne manométrique, en même temps que, dans la 3e branche, elle sortait lentement par l'extrémité du tube capillaire. On fermait alors la moitié $r$ du robinet, et on laissait le gaz se dégager soit par un tube de sûreté, soit en desserrant la moitié $r'$ du robinet, qu'on laissait ouverte.

Dans le premier appareil de ce genre que j'ai employé, le diamètre du tube capillaire était à son extrémité 0mm,310. L'élévation de l'eau dans son intérieur a été trouvée, dans deux observations successives, égale à 90mm,40. Trois observations faites d'après la méthode de Simon ont donné :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Colonne manométrique . . . . | $h$ | 113.80 | 110.90 | 114.55 |
| Profondeur du bas du tube. . . | D | — 18.95 | — 17.20 | — 19.40 |
| Hauteur capillaire déduite . . . | H | 94.85 | 93.70 | 95.15 |

La moyenne des trois valeurs de H est 94.57. La différence notable de cette valeur et de celle fournie par l'observation directe, peut résulter de ce que le diamètre du tube était plus petit à son extrémité qu'au point où le ménisque parvenait dans ces observations directes, ce dont j'ai négligé de m'assurer.

J'ai remplacé d'abord l'air par de l'hydrogène, et cinq expériences m'ont donné :

| | $h$. | D. | H. |
|---|---|---|---|
| I expérience . . . . | 96.50 | — 5.90 | 90.60 |
| II » . . . . | 97.35 | — 5.90 | 91.45 |
| III » . . . . | 97.15 | — 5.90 | 91.25 |
| IV » . . . . | 96.95 | — 5.90 | 91.05 |
| V » . . . . | 97.85 | — 5.90 | 91.95 |
| MOYENNE. . . . . . . . . . . . . . | | | 91.26 |

Ce nombre se rapproche de celui que nous a donné l'observation directe, mais il diffère de $\frac{1}{28}$ de celui fourni par l'observation manométrique faite avec l'air.

Pour m'assurer si cette différence, assez faible pour des expériences de ce genre, n'était pas due à quelque cause accidentelle, j'ai remplacé le tube capillaire employé dans ces mesures par un autre dont le diamètre était $0^{mm},359$. J'ai mesuré d'abord au cathétomètre l'élévation dans ce tube, l'atmosphère intérieure étant successivement de l'air, puis de l'hydrogène, et la pression dans les deux cas étant la pression atmosphérique aussi bien intérieurement qu'extérieurement, j'ai trouvé :

1° Dans l'air atmosphérique,

| | |
|---|---|
| 77.60 | moyenne 77.47. |
| 77.05 | |
| 77.75 | |

2° Dans l'hydrogène :

| | |
|---|---|
| 77.10 | 77.28. |
| 77.45 | |
| 77.30 | |

L'élévation de l'eau dans un tube capillaire est donc indépendante de la nature du gaz dans lequel se trouve le ménisque.

La mesure manométrique m'a donné,

1° Avec l'air atmosphérique :

| *h*. | D. | H. | |
|---|---|---|---|
| 84.55 | — 5.80 | 78.75 | moyenne 78.50. |
| 82.70 | — 5.80 | 76.90 | |
| 84.55 | — 5.80 | 78.75 | |
| 84.30 | — 5.80 | 78.50 | |

2° Avec l'hydrogène :

| *h*. | D. | H. | |
|---|---|---|---|
| 97.20 | — 19.50 | 77.70 | 77.38. |
| 97.20 | — 19.50 | 77.70 | |
| 96.75 | — 19.50 | 77.25 | |
| 96.30 | — 19.50 | 76.80 | |
| 79.05 | — 2.45 | 76.60 | |
| 79.35 | — 2.45 | 76.90 | |
| 79.65 | — 1.05 | 78.60 | |
| 80.10 | — 2.65 | 77.45 | |

Ces deux moyennes diffèrent assez peu l'une de l'autre et des deux premières, pour que l'on puisse affirmer que la méthode de Simon, que nous pouvons appeler méthode manométrique, donne des résultats exacts aussi bien avec l'hydrogène qu'avec l'air atmosphérique.

Ayant remplacé l'hydrogène par l'acide carbonique, j'obtins dans une observation faite avec le premier tube capillaire :

| $h$. | D. | H. |
| --- | --- | --- |
| 102.80 | — 11.55 | 91.25 |

La valeur de H est la même que celle que nous avons obtenue avec l'hydrogène.

En voulant répéter cette observation, je vis se produire un phénomène remarquable : le dégagement des bulles de gaz se produisit d'abord rapidement jusqu'à ce que la hauteur manométrique fût à peu près la même que dans l'expérience précédente ; mais alors que je croyais le dégagement arrêté, je reconnus qu'il continuait à s'effectuer très-lentement et pendant plusieurs heures. Le lendemain, la hauteur manométrique était à peine les $^2/_3$ de ce qu'elle était la veille ; mais comme il s'était formé de petites colonnes d'eau séparées dans l'intérieur du tube capillaire, on ne pouvait tirer de cette expérience aucun chiffre certain.

On peut se demander si la solubilité assez grande de l'acide carbonique dans l'eau ne peut pas être la cause de ce phénomène ; mais nous ne nous arrêterons pas à discuter cette question, parce que nous verrons dans un instant le phénomène se produire avec l'hydrogène aussi bien qu'avec l'acide carbonique.

Je n'ai pas fait d'autres recherches avec l'appareil dont nous nous sommes servi dans les observations précédentes, parce qu'il m'a paru à la fois plus commode et plus sûr de recourir à un appareil à peu près semblable à celui que Simon a employé. J'ai dit que, de mes premières expériences, on devait conclure à l'inexactitude de la méthode manométrique appliquée à des tubes de plus de $0^{mm},59$ de rayon ; mais cette inexactitude ne peut-elle résulter de ce que mon appareil, différent de celui de Simon, bien que fondé sur le même principe, présenterait des sources particulières d'erreurs ? En effet, Simon employait un vase renfermant de l'air comprimé et sur lequel était mastiqué,

d'un côté un manomètre, de l'autre un tube capillaire coudé : des robinets permettaient d'établir ou d'interrompre à volonté la communication du vase avec le tube ou avec le manomètre, et par suite de régler le dégagement des bulles d'air.

Quant à moi, je me bornais à verser de l'eau en excès dans le manomètre, et à laisser le dégagement des bulles continuer librement jusqu'à ce que l'équilibre s'établît de lui-même. Or, ainsi que je l'ai déjà dit, j'ai reconnu que parfois l'air, par suite de sa vitesse acquise, s'échappait en trop grande quantité, d'où il arrivait que le liquide remontait dans le tube capillaire après le dégagement de la dernière bulle. Pour éviter cet effet, aussitôt que le dégagement des bulles avait cessé, je le faisais renaître un instant en versant quelques gouttes d'eau seulement dans le manomètre. Cependant j'ai cru reconnaître que ce moyen était insuffisant, et j'ai substitué à mon premier appareil un autre d'une disposition un peu différente, analogue à celle que j'ai décrite plus haut (p. 123). Il consiste dans un flacon à trois tubulures (*fig.* 7), dans lesquelles sont mastiqués trois tubes; le premier est un manomètre recourbé deux fois, le second un tube droit descendant jusqu'au fond du flacon, et le troisième un tube capillaire également coudé deux fois. Après avoir entièrement rempli l'appareil d'eau, on le retourne dans une cuve à eau en y faisant plonger les extrémités ouvertes du manomètre et du tube droit, et par ce dernier l'on introduit le gaz dans le flacon. Ensuite, en bouchant ce tube avec le doigt, on retire l'appareil sans que le gaz puisse s'échapper ni l'air rentrer dans son intérieur.

Pour observer avec l'appareil ainsi rempli de gaz, il suffit de faire plonger le tube capillaire dans un liquide et de verser de l'eau par le tube droit jusqu'à ce que le dégagement des bulles se produise. La hauteur soulevée dans ce tube ainsi que dans le manomètre, convenablement corrigée, mesure alors la hauteur capillaire. On a ainsi dans le tube et dans le manomètre coudé deux hauteurs qui se contrôlent mutuellement; mais l'indication du manomètre est plus sûre, parce que l'on n'a à craindre ni erreur de réfraction, ni erreur de capillarité. C'est pourquoi j'ai ajouté ce manomètre, dont à la rigueur on pourrait se passer.

Les premières observations ont été faites avec un tube capillaire dont la

section, sensiblement elliptique, avait pour demi-axes 0,151 et 0,134, ce qui donne pour le rayon moyen 0,143. Ce tube était, sur toute sa longueur, parfaitement régulier, et l'eau s'élevait dans son intérieur à 100mm,60 à 9°,3 de température.

En appliquant à la même température la mesure manométrique avec l'air atmosphérique, j'ai trouvé :

| h. | D. | H. | |
|---|---|---|---|
| 50.35 | + 40.70 | 100.05 | |
| 101.10 | — 1.25 | 99.85 | |
| 102.85 | — 1.25 | 101.60 | |
| 102.80 | — 1.25 | 101.55 | moyenne 101.15. |
| 102.80 | — 1.25 | 101.55 | |
| 102.90 | — 1.25 | 101.65 | |
| 103.05 | — 1.25 | 101.80 | |

En remplaçant l'air par l'oxygène, j'ai obtenu à 11°,0:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 108.00 | — 7.50 | 100.50 | |
| 108.20 | — 7.50 | 100.70 | |
| 108.10 | — 7.50 | 100.60 | |
| 108.10 | — 7.50 | 100.60 | 100.37. |
| 107.90 | — 7.50 | 100.60 | |
| 105.20 | — 5.10 | 100.10 | |
| 140.60 | — 41.10 | 99.50 | |

La différence des deux moyennes n'est que de $\frac{3}{400}$ de leurs valeurs, et si l'on ramène la seconde à la température de la première elle devient 100.82; la différence n'est alors que de 4 à 5 millièmes. Nous pouvons donc affirmer que la mesure manométrique donne les mêmes résultats avec l'oxygène qu'avec l'air.

Par l'appareil renfermant de l'hydrogène, trois observations à la température de 12° me donnèrent :

| h. | D. | H. | |
|---|---|---|---|
| 102.05 | — 3.65 | 98.40 | |
| 102.20 | — 3.65 | 98.55 | 98.50. |
| 102.20 | — 3.65 | 98.55 | |

Ramenée à la température de 9°, cette moyenne devient 99.14 : elle est inférieure de $\frac{1}{53}$ à celle trouvée avec l'air. Cette différence est très-faible; d'ailleurs nous verrons dans un instant des expériences faites avec l'air, fournir un résultat très-voisin du précédent. On pourrait donc admettre comme de nouveau démontré que la méthode donne également avec l'hydrogène les mêmes résultats qu'avec l'oxygène et l'air; mais je n'oserais l'affirmer parce que, dans toutes les observations suivantes, j'ai vu se reproduire le phénomène que j'avais remarqué avec l'acide carbonique.

Ainsi dans la IVe observation j'avais trouvé, aussitôt après que le dégagement des bulles avait paru cesser :

| $h$. | D. | H. |
|---|---|---|
| 109.65 | — 12.95 | 96.70. |

Bientôt après je vis le dégagement des bulles se produire de nouveau, mais très-lentement; les bulles ne se succédaient plus qu'à des intervalles de plus en plus longs; je mesurai successivement 30, 40, 50 secondes. Après deux heures on avait :

| $h$. | D. | H. |
|---|---|---|
| 90.70 | 12.95 | 77.75. |

Une nouvelle observation faite une demi-heure après a donné exactement le même résultat.

Aussitôt après cette observation j'ai, à l'aide d'un soufflet, fait passer dans l'appareil une grande quantité d'air. Cette reprise du dégagement des bulles ne s'est plus présentée et l'on a trouvé :

| $h$. | D. | H. | |
|---|---|---|---|
| 109.80 | — 10.85 | 98.95 | |
| 112.10 | — 13.40 | 98.70 | 98.18. |
| 112.20 | — 13.40 | 98.80 | |
| 109.65 | — 13.40 | 96.25 | |

Ayant de nouveau rempli l'appareil d'hydrogène et remis l'observation au lendemain, je reconnus que l'eau était remontée de $4^{mm},35$ dans le tube, et que l'on avait

$$h = 78.75, \quad D = -\ 7.85, \quad \text{d'où} \quad H = 70.90.$$

Je versai un peu d'eau dans le tube jusqu'à ce que le dégagement des bulles se reproduisit, et lorsque la colonne manométrique me parut fixe, je trouvai

$$h = 93.45, \quad D = -12.30, \quad H = 81.15.$$

Ensuite je versai beaucoup d'eau, de manière à obtenir un dégagement prolongé de bulles, et j'obtins les résultats suivants :

| | *h*. | D. | H. |
|---|---|---|---|
| Aussitôt après le 1er arrêt du dégagement . | 133.70 | — 37.55 | 96.15 |
| Après une demi-heure . . . . . . . . | 127.20 | — 37.55 | 89.65 |
| Après une heure . . . . . . . . . . | 126.30 | — 37.55 | 88.75 |
| Le lendemain . . . . . . . . . . . | 99.90 | — 26.55 | 72.35 |

Dans l'intervalle des deux dernières observations, l'eau était remontée dans le tube de 11mm,0. En retirant au moyen d'une pipette de l'eau du manomètre, je vis l'eau remonter encore de 3mm dans le tube, et je trouvai

$$h = 95.60, \quad D = -23.55, \quad H = 72.05.$$

En reversant ensuite de l'eau dans le manomètre, je vis chaque fois, immédiatement après le premier arrêt de dégagement, l'eau remonter un peu dans le tube, et je trouvai :

| *h*. | D. | H. |
|---|---|---|
| 132.50 | — 33.50 | 99.00 |
| 134.85 | — 35.80 | 99.00 |
| 134.25 | — 35.05 | 99.20 |
| 131.00 | — 32.40 | 98.60. |

En soufflant de l'air dans l'appareil, j'obtins à très-peu près les mêmes résultats :

| *h*. | D. | H. |
|---|---|---|
| 128.70 | — 30.60 | 98.10 |
| 131.50 | — 32.20 | 99.30. |

Alors, sans remplir l'appareil d'eau, je fis passer dans l'intérieur un courant d'hydrogène très-abondant, et je laissai l'équilibre s'établir. Le lendemain, il s'était formé plusieurs petites bulles d'eau dans le tube, et je ne pus

faire l'observation. Ayant reversé de l'eau dans le manomètre, je ne vis plus le lendemain de bulles semblables, et je trouvai :

| h. | D. | H. |
|---|---|---|
| 68.00 | + 17.60 | 85.60. |

Plusieurs heures après, la température s'étant élevée, la pression de l'air intérieur avait augmenté, et j'ai obtenu :

| h. | D. | H. |
|---|---|---|
| 96.45 | — 5.65 | 98.80. |

Le lendemain :

| | | |
|---|---|---|
| 71.15 | + 14.80 | 85.95. |

Après avoir versé de l'eau dans le manomètre, on a eu au bout de plusieurs heures

| | | |
|---|---|---|
| 99.00 | — 6.85 | 92.15. |

Ainsi donc chaque fois que nous avons fait l'observation assez longtemps après que le dégagement des bulles d'hydrogène s'était produit, nous avons obtenu des résultats très-différents de ceux que l'on trouve avec l'air atmosphérique dans les mêmes conditions, tandis que nous avons obtenu des résultats semblables en mesurant la colonne du manomètre aussitôt après le premier arrêt du dégagement des bulles.

Devons-nous voir dans ces faits des phénomènes purement accidentels? Au premier abord j'avais cru en trouver la cause dans la formation de petites colonnes d'eau que j'avais remarquées dans deux observations, mais dans toutes les autres je n'ai pu apercevoir aucune colonne de ce genre. D'ailleurs, en admettant même qu'il s'en soit formé, il me paraît fort difficile d'expliquer comment elles auraient pu produire l'infériorité de la pression de l'hydrogène comparée à celle de l'air dans les mêmes circonstances : l'inverse se comprendrait mieux.

Je suis plus porté à croire qu'il se passe là un phénomène analogue à la fuite de l'hydrogène à travers les fêlures des vases qui le contiennent, ou même par l'espace capillaire qui peut exister entre le mercure et les parois d'une cloche plongée dans ce liquide.

Quoi qu'il en soit, nous ne pouvons admettre que la méthode d'observation de Simon donne toujours, avec différents gaz, les mêmes résultats, et des observations comparatives que nous avons faites immédiatement l'une après l'autre avec l'air et l'hydrogène, nous devons conclure au moins que l'emploi de l'hydrogène peut amener des phénomènes étrangers à celui que l'on considère, et qui ne se présentent point quand on emploie l'air.

Il était plus important, au point de vue de la sûreté de la méthode, de s'assurer de l'influence de la pression du gaz, plutôt que de l'influence de sa nature. J'avais dans ce but disposé l'appareil de la manière suivante (*fig.* 9) :

Un flacon à trois tubulures A reçoit l'air comprimé par le tuyau T d'une pompe foulante. Les deux autres tubulures portent deux tubes $t$, $t'$, qui vont s'attacher au moyen de tuyaux de caoutchouc, ou mieux de tuyaux de cuivre mastiqués, l'un au manomètre à eau et à boules $m$, l'autre au tube capillaire C; celui-ci pénètre dans un second flacon à trois tubulures B, renfermant de l'eau. Aux deux autres tubulures de ce flacon sont attachés le tube $t''$ qui s'adapte au manomètre à eau $m$, et le tube $t'''$ fixé au manomètre à mercure M. Ce dernier est formé d'un petit flacon à deux tubulures dans lesquelles pénètrent et sont mastiqués, deux tubes, l'un D de $1^m$ de hauteur et recourbé à la partie supérieure, l'autre D' qui doit avoir une hauteur proportionnée aux pressions sous lesquelles on veut pouvoir observer. Ce manomètre peut avoir à mesurer des pressions inférieures aussi bien que supérieures à une atmosphère.

L'appareil étant ainsi disposé, si l'on veut observer avec de l'air comprimé, on foule lentement par le tuyau T de l'air dans le flacon A; cet air passe dans le flacon B par le manomètre $m$, dont il refoule la colonne d'eau dans la boule $b$, et par le tube capillaire $c$. Quand la différence de pression dans les deux flacons est devenue assez petite, la colonne d'eau du manomètre $m$ redescend dans les branches, et le passage de l'air dans le flacon B ne se fait plus que par petites bulles à travers le tube capillaire. Quand ce dégagement de bulles s'arrête, on mesure la hauteur de la colonne d'eau soulevée dans le manomètre et qui, diminuée de la profondeur du bas du tube au-dessous du niveau du flacon, doit mesurer la hauteur à laquelle l'eau s'élèverait dans le tube, si la méthode de Simon est exacte sous toutes les pressions. On peut en

même temps noter la hauteur du mercure soulevé dans le manomètre à mercure.

Il est clair que de cette façon on peut obtenir autant de précision qu'en opérant avec de l'air à la pression ordinaire. Il en sera de même, si l'on veut observer avec de l'air raréfié. Il suffira d'aspirer par le tuyau T; l'air du flacon B passera dans le flacon A en soulevant l'eau du manomètre dans la boule $b'$. En même temps le mercure, en s'élevant dans la branche D du manomètre M, fera connaître la pression de l'air en B.

Après avoir monté cet appareil je me disposais à observer, lorsqu'une fuite, se produisant en un point du flacon B, vint me dispenser de cette observation en tranchant nettement la question. La hauteur de la colonne de mercure du manomètre M avait atteint plusieurs décimètres lorsque cette fuite se manifesta; je la vis alors descendre très-lentement, et le dégagement des bulles, un instant arrêté, recommença. Je reconnus en même temps que la hauteur de la colonne d'eau soulevée dans le manomètre restait parfaitement constante, et j'en conclus immédiatement que les résultats fournis par la méthode de Simon doivent être indépendants de la pression de l'air, au moins pour des valeurs de celle-ci comprises entre 1 et 1 $^1/_2$ atmosphère.

Je n'ai pas cru nécessaire de pousser cette observation plus loin, parce qu'au point de vue de la sûreté de la méthode le résultat précédent suffisait. En effet, dans les expériences de Simon, la plus forte valeur qu'ait atteint la pression de l'air dans l'intérieur du tube a été de 1 $\frac{2}{3}$ atmosphère, mais on ne peut avoir, comme Simon le reconnaît, beaucoup de confiance dans ces mesures, celle du diamètre devenant très-difficile; dans les expériences qui méritent quelque confiance, la pression en question n'a pas atteint 1 $\frac{1}{3}$ atmosphère. Au point de vue de la recherche des faits, cette étude de l'influence de la pression ne peut pas non plus offrir beaucoup d'intérêt, au moins tant que l'on n'obtiendra pas plus de précision dans les résultats. En effet, l'observation précédente permet de supposer, ou bien que si la pression de l'air influe sur les résultats de la mesure manométrique de la capillarité, cette influence doit être très-faible, de sorte que les inégalités que l'on chercherait à mesurer seraient de l'ordre des irrégularités ordinaires à ces sortes de recherches, ou bien qu'il faudrait pousser l'observation fort loin et attein-

dre un haut degré de pression pour obtenir des résultats bien manifestes.

Le procédé de Simon donnant des résultats indépendants de la pression de l'air, au moins dans les limites entre lesquelles il peut être appliqué avec sécurité, il nous est permis d'admettre comme essentiellement bon le principe de cette méthode, en ce qui concerne le rôle du gaz comprimant la colonne capillaire. Mais il peut exister dans certains cas et suivant la disposition des appareils; des circonstances accessoires capables d'influence. Ainsi l'état hygrométrique de l'air ne peut-il pas agir sur le ménisque? Je prends, comme exemple, un cas où l'on pourrait *à priori,* supposer très-considérable cette influence : j'applique l'appareil dont je me suis servi dans ces recherches à la détermination des hauteurs capillaires de l'acide sulfurique. Cet acide étant très-avide d'eau, il pourra arriver que le ménisque absorbe une quantité notable de la vapeur d'eau dont l'air intérieur de mon appareil peut être considéré comme saturé. Dès lors il y aurait une modification de la surface du ménisque, et comme c'est la couche superficielle qui joue le principal rôle, il pourra en résulter une perturbation considérable.

Il était facile de résoudre cette question; il suffisait d'observer en remplissant tour à tour l'appareil d'eau et d'acide sulfurique. Dans le premier cas l'air est saturé de vapeur, dans le second, on peut le supposer parfaitement sec. Le manomètre dans ces deux séries d'observations renfermait le même liquide que le flacon, eau d'abord, acide sulfurique ensuite. La densité de cet acide ayant été trouvée égale à 1,8313, il fallait diviser par ce chiffre la hauteur manométrique d'eau, et l'on avait :

$$H = \frac{h}{1,8313} + D.$$

J'ai trouvé ainsi avec l'appareil rempli d'eau :

| $h$ (eau) | D | H |
|---|---|---|
| = 91.3 | = — 4,6 | = 45.2 |
| 101.4 | — 10.3 | 43.8 |
| 105.3 | — 10.3 | 47.3 |
| 119.8 | — 19.6 | 45.8 |
| | Moyenne. . . . . | 45.5. |

Avec l'appareil renfermant de l'acide :

| $h$ (acide). | D. | H. |
|---|---|---|
| 54.7 | 10.2 | 44.5 |
| 69.1 | 24.9 | 44.2 |
| 66.6 | 22.2 | 44.4 |
| 59.5 | 15.2 | 44.3 |
| 45.6 | 1.3 | 44.3 |
| | Moyenne. . . . . | 44.3 |

Cette moyenne est inférieure de $\frac{1}{35}$ environ à la précédente, mais comme elle est supérieure à l'un des chiffres obtenus avec l'appareil renfermant de l'eau, nous ne pouvons pas affirmer que l'état hygrométrique de l'air ait, dans ces deux observations, exercé une influence sensible. Nous pouvons seulement constater que si cette influence existe, elle est très-faible dans le cas actuel, et par suite qu'elle sera négligeable dans la plupart des cas.

Je terminerai la discussion de la méthode de Simon en extrayant de nos diverses expériences différents résultats, obtenus avec différents liquides par les deux méthodes, la méthode directe et la mesure manométrique.

| LIQUIDES. | Rayons des tubes. | Élévations mesurées | |
|---|---|---|---|
| | | directement. | manométriquem^t. |
| Eau . . . . . . . . . . . . | 0.180 | 77.5 | 78.3 |
| Id. . . . . . . . . . . . . | 0.155 | 90.4 | 94.5 |
| Id. . . . . . . . . . . . . | 0.143 | 100.6 | 100.1 |
| Acide sulfurique . . . . . . . | 0.143 | 43.6 | 44.3 |
| Alcool . . . . . . . . . . | 0.180 | 34.3 | 34.7 |
| Alcool amylique . . . . . . . | 0.180 | 33.7 | 32.7 |
| Acétone . . . . . . . . . . | 0.180 | 34.3 | 36.3 |
| Chloroforme . . . . . . . . | 0.0375 | 103.5 | 104.4 |
| Ether. . . . . . . . . . . | 0.180 | 28.7 | 27.6 |
| Id. . . . . . . . . . . . | 0.0182 | 315.80 | 315.5 |

L'accord entre les résultats des deux méthodes est assez satisfaisant, d'autant plus que la plupart d'entre eux n'ont été cherchés que comme contrôle

l'un de l'autre dans des recherches sur une relation entre les hauteurs capillaires de différents liquides, où il me suffisait de savoir si les nombres obtenus ne s'écartaient pas trop de la vérité. Je ne puis donc affirmer l'identité des conditions dans lesquelles les deux méthodes ont été appliquées; je ne pourrais même pas garantir que les tubes dont je me suis servi fussent parfaitement calibrés; les rayons que j'indique correspondent aux points où se trouvaient les ménisques; il est possible qu'ils fussent un peu différents à l'extrémité des tubes.

Je me bornerai donc à conclure que les deux méthodes fournissent des résultats peu différents, et que probablement ces résultats seraient identiques si toutes les précautions avaient été prises. Cependant ces expériences m'ont fait voir que, pour certains liquides, il est difficile d'obtenir de bons résultats de la mesure manométrique; de ce nombre sont le brome, dont j'ai parlé plus haut, et l'éther. Avec ce dernier liquide et un tube qui ne soit pas très-capillaire, le dégagement des bulles d'air se fait d'une manière tumultueuse et est accompagné de la formation de petites colonnes de liquide, qui ont, à l'extrémité du tube, une sorte de mouvement vibratoire, durant lequel elles rentrent dans le tube, s'y divisent pour se reformer en un autre point, puis s'échappent pour y rentrer bientôt. Avec un tube très-étroit, ce phénomène ne se reproduit pas; mais alors on reconnaît que le dégagement des bulles se fait avec une grande lenteur et pendant fort longtemps.

Ce dernier fait est très-important, car il jette beaucoup de doute sur les résultats de Simon. Ce physicien objecte à la mesure directe de l'élévation la lenteur des opérations, la nécessité d'attendre plusieurs heures avant d'observer, et il affirme que sa méthode abrége beaucoup la durée de l'expérience. Il est certain que l'équilibre s'établit plus rapidement dans le mode d'expérience de Simon que dans le mouvement d'une colonne liquide à l'intérieur d'un tube. On a en effet, dans ce dernier cas, le frottement contre les parois du tube qui produit une résistance notable, absente dans le phénomène du dégagement des bulles; mais on commettrait des erreurs importantes si l'on croyait l'équilibre établi lorsque le dégagement des bulles paraît arrêté. J'ai reconnu qu'avec des tubes très-capillaires, ce dégagement des bulles continuait pendant plusieurs heures après qu'on aurait pu le

croire arrêté. Il arrive précisément ce que l'on observe quand on soulève une colonne liquide dans un tube capillaire, pour la laisser redescendre librement. Le mouvement de descente est d'abord rapide, puis la colonne semble stationnaire et il faut l'observer avec la lunette micrométrique pour reconnaître qu'elle continue à descendre; et ce n'est souvent que 24 heures après, que l'équilibre est réellement établi. Eh bien, lorsqu'on applique la méthode de Simon à des tubes très-capillaires, des faits analogues se présentent: le dégagement des bulles se fait d'abord rapidement, puis il paraît s'arrêter; mais si l'on continue à observer, on voit que le dégagement continue; seulement les bulles ne se succèdent plus qu'à de longs intervalles, et il faut encore plusieurs heures pour que l'équilibre soit réellement établi. On reconnaît en même temps que la colonne manométrique est notablement diminuée : ainsi, avec un tube de 0,0182 de rayon et avec des liquides très-mobiles, comme l'éther et le chloroforme, j'ai vu la colonne manométrique diminuer de plus de $^1/_{10}$ de sa valeur, à partir de l'instant où le dégagement des bulles paraissait arrêté, et n'être vraiment stationnaire que plus de deux heures après cet instant. Avec les mêmes liquides et un tube beaucoup plus étroit, dont je n'ai pu mesurer le diamètre, j'ai vu le dégagement des bulles continuer pendant une journée entière, et pendant ce temps la colonne manométrique s'abaisser continuellement.

Ces faits rendent la méthode manométrique à peu près aussi impraticable que la mesure directe, quand il s'agit de tubes très-capillaires. En effet, il faudrait, pendant toute la durée de l'expérience, maintenir constante la température de l'air intérieur de l'appareil; on comprend sans peine que des variations même faibles de cette température doivent apporter de grandes perturbations dans l'équilibre.

Or, sans faire mention d'aucune précaution particulière, Simon rapporte les résultats d'expériences dans lesquelles il a mesuré des pressions allant jusqu'à $6828^{mm}$ d'eau, tandis que dans ces observations, où j'ai vu le dégagement des bulles se produire pendant toute une journée, je n'ai mesuré qu'une colonne manométrique de mercure de $159^{mm}$, correspondant à une colonne d'eau de $2150^{mm}$, c'est-à-dire moindre que le tiers de la plus haute de celles qui ont été mesurées par Simon, et moindre que les quatre dernières de celles-ci.

Il est donc permis de croire que Simon n'a pas remarqué ce fait de la continuation du dégagement des bulles après le premier arrêt apparent, et qu'il a mesuré ses colonnes manométriques immédiatement après ce premier arrêt. Dès lors ses résultats doivent être affectés d'erreurs d'autant plus grandes, que les diamètres des tubes étaient plus petits, et il se peut que ce soit là la cause du notable accroissement que prennent les produits des hauteurs par les diamètres à mesure que ceux-ci diminuent. En effet, mes expériences, faites après le rétablissement réel de l'équilibre, me donnent comme hauteur capillaire de l'eau dans un tube de 0mm,0182 de rayon, la valeur 824mm,8, ce qui donne, pour le produit de la hauteur par le rayon, 15,05, et par le diamètre, 30,10. Pour un tube de 0,05 de diamètre, c'est-à-dire moins capillaire que le précédent, Simon trouve 663mm d'élévation qui, multipliée par le diamètre, donne 33,15. La différence est de $^1/_{10}$ environ, c'est-à-dire égale à l'erreur que j'ai reconnue possible en observant immédiatement après le premier arrêt de dégagement des bulles.

En résumé, la méthode de Simon ne donne des résultats bien certains qu'appliquée à des tubes qui ne soient ni trop ni trop peu capillaires. Nous pouvons assigner comme limites entre lesquelles cette méthode est vraiment commode et sûre, les valeurs des rayons 0mm,2 et 0mm,02. Or, comme entre ces limites la mesure directe au cathétomètre n'offre pas de difficultés sérieuses, qu'elle est même tout aussi commode généralement que la mesure manométrique, il n'y a aucune raison de lui préférer celle-ci, si ce n'est dans certains cas particuliers, dont nous verrons des exemples; mais pour la question principale de la mesure des hauteurs capillaires dans les tubes de verre, il vaut mieux recourir à la mesure au cathétomètre, tout en employant, si l'on veut, la méthode de Simon comme moyen de contrôle.

Il m'a paru curieux d'appliquer cette dernière méthode à l'observation de la dépression du mercure, ou plutôt de voir ce qui se passe, lorsqu'au lieu d'appliquer cette méthode à un liquide qui s'élève dans les tubes capillaires, on l'applique à un liquide qui s'y déprime. J'ai employé un des appareils qui m'avaient servi précédemment, celui dont le tube capillaire avait 0mm,180 de rayon, et j'ai fait l'expérience exactement comme je l'eusse faite avec de l'eau. On observe encore ici que le dégagement des bulles, après s'être pro-

duit rapidement, s'arrête pour ne reprendre que quelque temps après et très-lentement. En mesurant aussitôt après ce premier arrêt, j'ai obtenu :

| EXPÉRIENCES. | COLONNE manométrique de mercure A. | PROFONDEUR du bas du tube D. | HAUTEUR capillaire H. |
|---|---|---|---|
| Ire . . . . . . . . . | 57.50 | — 32.90 | 24.60 |
| IIme . . . . . . . . . | 39.50 | — 15.10 | 24.40 |

La hauteur $h$ ne se maintient que fort peu de temps, quelques minutes ou même quelques secondes. Le dégagement des bulles reprend et cette hauteur diminue jusqu'à devenir bientôt inférieure à D, de sorte que $h$ devient négatif. Il n'en est pas moins remarquable que cette hauteur $h$ puisse être positive, même pendant un temps assez court, que le mercure puisse, pendant ce temps, manifester une tendance à s'élever dans le tube; et ce qui rend ce fait plus remarquable encore, c'est que si l'on calcule le produit $(H + \frac{r}{3})r$, on trouve ici comme moyenne 4,44, nombre voisin des produits que nous avons obtenus lorsque $h$ représentait la dépression du mercure dans le tube de rayon $r$. Il semble donc que le mercure manifeste momentanément une tendance à s'élever dans le tube égale à celle qu'il a à s'y déprimer d'une manière permanente. Du reste, ce fait s'explique facilement par la considération des pressions dues à la courbure des surfaces. Lorsque le mercure est en contact avec le verre, il y a entre ces deux corps une adhésion assez forte; c'est ce qui arrive dans notre expérience entre le mercure et la section inférieure du tube qui y plonge : l'air, pour s'échapper par l'extrémité, ne peut pas brusquement vaincre cette adhésion; le mercure commence par former une surface courbe adhérente au contour de la section intérieure du tube, un véritable ménisque concave offrant une résistance semblable à celle des ménisques des liquides capables de s'élever des tubes capillaires. Quand cette résistance peut faire équilibre à la pression intérieure de l'air, l'équilibre s'établit; mais bientôt le mercure, sous l'effort de cette

pression, se détache lentement de la surface du tube, de même qu'un disque de verre ne se détache que lentement d'une surface de mercure à laquelle il adhère : cette adhésion une fois vaincue, l'air passe entre le mercure et la surface du tube, sans devoir former chaque fois un ménisque de mercure.

Je rappelle, en terminant, les principales conclusions générales que l'on peut tirer de ce qui précède :

1° La nature de l'atmosphère qui surmonte un liquide dans un tube capillaire n'a pas d'influence sur l'élévation de ce liquide dans le tube;

2° La pression de cette atmosphère n'exerce pas non plus d'influence, au moins tant qu'elle est comprise entre 1 et 1 $^1/_2$ atmosphère;

3° L'état hygrométrique de l'air n'exerce pas non plus d'influence sensible sur l'élévation des liquides, même très-avides d'eau, dans les tubes capillaires;

4° L'équilibre entre la pression de l'air qui s'échappe par l'extrémité d'un tube plongé dans un liquide et la force qui tend à soulever ce liquide dans ce tube, ne s'établit qu'au bout d'un temps d'autant plus long que le tube est plus étroit.

Après les recherches de Simon, auxquelles nous avons cru devoir nous arrêter assez longtemps, parce que la discussion de son procédé d'observation soulevait des questions intéressantes, je dois rappeler celles dont j'ai publié les résultats dans les *Mémoires de l'Académie royale* de 1852. Ces résultats conduisaient à des conclusions qui eussent été d'une haute importance, si elles avaient pu être accueillies sans réserve. Il me suffira de mentionner l'influence observée de l'épaisseur des tubes sur l'ascension de l'eau et surtout sur la dépression du mercure, ainsi que les inégalités reconnues dans la loi du rapport inverse de l'ascension ou de la dépression au diamètre. Nous examinerons bientôt attentivement ce qui concerne l'influence de l'épaisseur; quant aux inégalités présentées par l'ascension de l'eau, rappelons dès maintenant qu'on pouvait les expliquer en admettant une correction indiquée par M. Plateau, et qui consistait à retrancher du rayon du tube l'épaisseur de la couche liquide que l'on peut supposer rester adhérente au tube. La détermination de cette épaisseur présente, en elle-même et par rapport à

cette correction, assez d'intérêt pour que j'aie cru devoir exécuter quelques recherches dans le but d'obtenir des données au moins approximatives sur sa valeur. Ces recherches font l'objet du chapitre suivant. J'exposerai dans d'autres parties de ce travail les résultats des observations faites, depuis la publication de mon premier mémoire, par plusieurs savants sur l'équilibre des liquides dans les tubes capillaires.

### *Recherches sur l'épaisseur de la couche liquide qui peut adhérer aux parois d'un tube cylindrique vertical.*

Lorsqu'une colonne liquide descend dans un tube, elle abandonne le long des parois une couche d'une certaine épaisseur. Cette épaisseur dépend probablement de certains éléments constants et essentiels, tels que la nature du liquide, sa densité, son adhésion au verre, et d'autres éléments variables tels que la vitesse avec laquelle le liquide se meut dans l'intérieur du tube, et des forces qui le sollicitent pendant son mouvement.

Il importerait surtout pour nous de pouvoir mesurer cette épaisseur dans le cas ordinairement observé d'élévation capillaire, c'est-à-dire lorsqu'un tube capillaire étant plongé dans un liquide, on a soulevé celui-ci par aspiration ou par tout autre moyen pour le laisser ensuite descendre. C'est le cas où il faudrait appliquer la correction indiquée par M. Plateau, c'est-à-dire soustraire du rayon du tube l'épaisseur de la couche mouillante.

Malheureusement il ne me paraît pas possible de mesurer exactement l'épaisseur de la couche produite de cette manière. En revanche, il est très-facile de déterminer celle d'une couche aussi analogue que possible et formée dans des conditions à peu près identiques : je veux parler de la couche laissée le long des parois du tube par une colonne liquide isolée descendant dans son intérieur. Les seules forces qui concourent à ce mouvement sont, comme dans le cas précédent, la pesanteur et les actions moléculaires. Il doit par suite y avoir peu de différence entre l'épaisseur de cette couche et celle que nous ne pouvons mesurer, de sorte que nous pourrons, avec quelque sécurité, étendre à cette dernière couche les conclusions obtenues pour la première.

Or, on peut mesurer assez exactement l'épaisseur de celle-ci par un moyen fort simple : supposons que nous ayons un tube parfaitement cylindrique et dans lequel nous avons fait pénétrer une colonne liquide; nous pouvons, en bouchant une extrémité du tube, maintenir cette colonne en équilibre, et alors, au moyen d'un cathétomètre, mesurer sa longueur $l$, et par là j'entends la distance entre le point le plus bas du ménisque supérieur et le point le plus haut du ménisque inférieur. Cette mesure faite, nous ouvrirons l'extrémité fermée du tube, et nous laisserons la colonne liquide descendre librement jusqu'à un certain point où nous l'arrêterons de nouveau. Le cathétomètre nous fera connaître la distance $d$ parcourue par le point le plus bas du ménisque supérieur et la nouvelle longueur $l'$ de la colonne. Cette longueur $l'$ sera moindre que $l$ parce que le volume de la colonne aura diminué d'un volume égal à celui de la couche mouillante de longueur $d$. Si nous supposons l'épaisseur de cette couche uniforme et égale à $e$, son volume sera :

$$\pi[r^2-(r-e)^2]\,d,$$

$r$ étant le rayon du tube, et l'on aura évidemment

$$\pi[r^2-(r-e)^2]\,d=\pi r^2(l-l').$$

D'où, en négligeant $\frac{e^2}{r^2}$,

$$e=\frac{l-l'}{d}\,\frac{r}{2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

En réalité, l'épaisseur de la couche n'étant pas constante, il faudra entendre par l'épaisseur moyenne celle dont la valeur est

$$\int_0^d \frac{xde}{d}.$$

Mais ce procédé n'est applicable que pour autant que le tube soit rigoureusement cylindrique; s'il en est autrement, la longueur $l$ de la colonne en mouvement variera en même temps par les variations de diamètre et par l'abandon de la couche mouillante. Or, on ne peut guère compter sur des tubes parfaitement calibrés, et le plus souvent la variation dépendant des iné-

galités de diamètre sera plus considérable que l'autre. Toutefois il n'y a pas là de difficulté sérieuse. Il suffit d'opérer d'abord comme précédemment, c'est-à-dire de mesurer les longueurs $l, l', l''$,.... correspondantes aux distances $o, d, d'$.... Cela fait, on introduit dans le tube une colonne de mercure telle qu'amenée dans la position primitive de la longueur $l$, sa longueur $l_1$ soit aussi égale que possible à celle-ci. On fera ensuite parcourir à cette colonne les distances $d, d'$.... et l'on mesurera chaque fois sa longueur. Celle-ci variera uniquement par le défaut de calibrage du tube; elle sera donc ce que serait la longueur de la colonne liquide, si ce liquide ne laissait pas une couche adhérente aux parois. Si donc on a eu d'abord exactement $l_1 = l$, il suffira de substituer chaque fois à $l$ dans la formule (1) la valeur de $l_1$ correspondante à la distance $d$. Mais comme on ne peut pas obtenir rigoureusement l'égalité $l_1 = l$, on devra par une simple proportion ramener les différentes valeurs de $l_1$ à ce qu'elles seraient si la valeur primitive avait été $l$. Ce procédé a été appliqué au premier tableau relatif à l'alcool absolu.

Il peut être considérablement simplifié : il suffit en effet d'employer un tube divisé en parties d'égale capacité. Dès lors les variations de longueur donnent exactement les variations de volume. De plus, si l'on a eu soin de n'employer que des tubes assez bien calibrés, la distance $d$ peut aussi se mesurer en nombre de ces divisions. On a ainsi immédiatement le rapport $\frac{l-l'}{d}$.

On peut facilement, en lisant à l'aide d'une lunette, partager en dix parties des divisions d'environ $\frac{1}{2}^{mm}$ de longueur, et atteindre par suite à une assez grande exactitude. Je préfère même de beaucoup ce dernier procédé à celui que j'ai décrit d'abord, parce que l'on peut vérifier d'avance l'égalité de capacité des divisions et n'avoir plus à craindre d'erreur d'aucun côté, tandis que dans le premier procédé, on court double chance de se tromper, par cela seul que l'on a pour chaque point du tube deux longueurs à mesurer.

Il est bon d'employer des colonnes liquides aussi petites que possible ; en effet, les variations dues à l'humectation des parois du tube ne dépendent pas de la longueur de la colonne, tandis que l'erreur résultant de ce que le calibrage, tel que nous pouvons le faire, n'est pas rigoureusement exact, croît avec cette longueur. Cependant on ne peut pas employer de très-petites

colonnes, attendu que le frottement suffit alors pour les empêcher de descendre librement, et quand on a recours à des moyens artificiels tels que la pression de l'air, on n'obtient plus aucune constance dans les résultats.

Lorsque la colonne liquide a parcouru tout le tube, si on retourne celui-ci, on remarque une perte de longueur beaucoup plus faible, et après avoir retourné le tube deux ou trois fois, la longueur $l$ ne varie plus, ce qui indique que le liquide n'abandonne plus de couches le long des parois, que celles-ci en sont en quelque sorte saturées. La lettre $r$, dans les tableaux suivants, indique que le tube a été ainsi retourné une ou plusieurs fois.

La lettre $a$ signifie que la colonne liquide a été abandonnée à elle-même pendant un certain temps, le plus souvent un ou plusieurs jours.

Nous désignerons par :

R le rayon du tube mesuré comme nous l'avons vu dans un chapitre précédent;

$d$ la distance du ménisque supérieur à sa position primitive ;

$l$ la longueur de la colonne à cette distance ;

$l_1$ (dans le premier tableau) la longueur de mercure à la même distance;

$\frac{L-L'}{D}$ est la valeur moyenne des valeurs de $\frac{l-l'}{d}$. C'est à cette valeur que correspond l'épaisseur moyenne E de toute la couche mouillante.

Mes observations ont porté sur l'eau, l'alcool absolu, l'éther sulfurique, l'acide sulfurique et l'huile d'orange. Les résultats sont contenus dans les tableaux suivants.

*Alcool absolu.*

**TABLEAU I.**

| Nos des tubes. | R | $d$ | $l$ | $l_1$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,05020 | 0.00 | 16.65 | 14.43 | 0,00310 | 0,01143 | 0,000078 | 0,000285 |
| | | 28.40 | 16.50 | 14.36 | 0,01478 | » | 0,000371 | |
| | | 120.45 | 15.90 | 14.46 | 0,01162 | » | 0,000292 | |
| | | 185.05 | 14.25 | 14.21 | 0,01588 | » | 0,000399 | |
| | | 259.50 | 12.55 | 14.45 | | | | |
| 2 | 0,08659 | 0.00 | 84.20 | 83.05 | 0,01242 | 0,01124 | 0,000538 | 0,000487 |
| | | 128.00 | 85.70 | 86.10 | 0,01080 | » | 0,000467 | |
| | | 239.00 | 83.95 | 85.35 | 0,01051 | » | 0,000455 | |
| | | 287.35 | 82.70 | 84.55 | 0,01110 | 0,01065 | 0,000481 | 0,000461 |
| r | r | » | 84.25 | 86.25 | 0,01020 | » | 0,000441 | |
| » | » | » | 83.65 | 85.40 | | | | |
| 3 | 0,1865 | 0.00 | 11.55 | 10.03 | 0,00282 | 0,01137 | 0,000282 | 0,001065 |
| | | 70.85 | 11.40 | 10.07 | 0,01346 | » | 0,001255 | |
| | | 195.45 | 9.40 | 10.45 | 0,01348 | » | 0,001257 | |
| | | 272.15 | 8.40 | 10.63 | 0,01572 | » | 0,001465 | |
| | | 360.80 | 6.95 | 10.96 | 0,01170 | 0,01153 | 0,001091 | 0,001073 |
| r | | » | 7.80 | 10.44 | 0,01136 | » | 0,001055 | |
| » | | » | 7.50 | 10.07 | | | | |
| 4 | 0,3116 | 0.00 | 72.45 | 73.60 | 0,01248 | 0,01331 | 0,001945 | 0,002073 |
| | | 106.55 | 72.15 | 74.65 | 0,01413 | » | 0,002201 | |
| | | 168.50 | 71.20 | 74.75 | | | | |
| 5 | 0,3181 | 0.00 | 3.20 | 2.88 | 0,01928 | 0,01500 | 0,003067 | 0,002886 |
| | | 40.45 | 2.45 | 2.91 | 0,01438 | » | 0,002286 | |
| | | 96.00 | 1.90 | 2.95 | 0,01354 | » | 0,002153 | |
| | | 175.10 | 0.95 | 2.99 | 0,01280 | » | 0,002036 | |
| | | 241.35 | 0.35 | 3.10 | 0,01210 | 0,01231 | 0,001925 | 0,001958 |
| r | | » | 0.45 | 3.03 | 0,01251 | » | 0,001990 | |
| » | | » | 0.15 | 2.85 | | | | |
| 6 | 0,600 | 0.00 | 8.10 | 8.10 | 0,004660 | 0,007310 | 0,001391 | 0,002182 |
| | 0,595 | 30.05 | 8.10 | 8.24 | 0,007779 | » | 0,002322 | |
| | 0,596 | 110.55 | 7.35 | 8.21 | 0,009492 | » | 0,002833 | |
| | 0,590 | 150.65 | 6.95 | 8.38 | 0,015240 | 0,015805 | 0,004524 | 0,004705 |
| r | 0,589 | » | 6.10 | 8.41 | 0,016370 | » | 0,004885 | |
| » | 0,604 | » | 5.50 | 7.99 | | | | |

*Alcool absolu.*

TABLEAU II.

| Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E | Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,0 | 35,9 | | | | | IV. | 0,0 | 33,0 | | | | |
| 0,05779 | 125,4 | 35,2 | 0,00588 | 0,00909 | 0,000158 | 0,000257 | 0,1788 | 144,3 | 30,5 | 0,01735 | 0,01890 | 0,001549 | 0,001690 |
| | 276,2 | 33,9 | 0,00724 | | 0,000204 | | | 310,8 | 26,6 | 0,02059 | » | 0,001680 | |
| | 418,9 | 29,85 | 0,01444 | | 0,000408 | | | 409,8 | 25,3 | 0,01879 | » | 0,001841 | |
| *r.* | 436,9 | 32,65 | 0,00744 | 0,00744 | 0,000210 | 0,000210 | *r.* | » | 25,0 | 0,01952 | 0,01952 | 0,001745 | 0,001745 |
| II. | 0,0 | 53,1 | | | | | V. | 0,0 | 29,7 | | | | |
| 0,08775 | 194,5 | 51,0 | 0,01080 | 0,00903 | 0,000474 | 0,000396 | 0,2869 | 155,7 | 23,7 | 0,03849 | 0,02953 | 0,005528 | 0,004279 |
| | 413,4 | 50,1 | 0,00726 | | 0,000318 | | | 295,2 | 21,5 | 0,02778 | » | 0,003985 | |
| | 0,0 | 66,6 | | | | | | 458,1 | 16,9 | 0,02794 | » | 0,004008 | |
| | 471,2 | 60,7 | 0,01252 | 0,01252 | 0,000549 | 0,000549 | | 542,5 | 16,7 | 0,02391 | » | 0,003430 | |
| *r.* | » | 61,1 | 0,01167 | 0,01156 | 0,000512 | 0,000507 | *r.* | » | 12,9 | 0,03097 | 0,02314 | 0,004443 | 0,003319 |
| *r.* | » | 61,2 | 0,01146 | » | 0,000503 | | » | » | 14,3 | 0,02839 | » | 0,004072 | |
| III. | 0,0 | 29,05 | | | | | » | » | 18,3 | 0,02101 | » | 0,003014 | |
| 0,09703 | 126,45 | 27,90 | 0,00910 | 0,01099 | 0,000441 | 0,000533 | » | » | 18,0 | 0,02157 | » | 0,003094 | |
| | 226,45 | 26,30 | 0,01284 | » | 0,000589 | | » | » | 19,0 | 0,01928 | » | 0,002765 | |
| | 327,95 | 25,50 | 0,01083 | » | 0,000525 | | » | » | 19,3 | 0,01917 | » | 0,002750 | |
| | 349,35 | 24,90 | 0,01188 | » | 0,000576 | | » | » | 18,0 | 0,02157 | » | 0,003094 | |
| | 0,0 | 41,9 | | | | | *r. a.* | » | 25,2 | 0,00830 | 0,00830 | 0,001190 | 0,001190 |
| | 104,75 | 40,6 | 0,01194 | 0,01217 | 0,000588 | 0,000586 | | | | | | | |
| | 200,95 | 39,5 | 0,01213 | » | 0,000579 | | | | | | | | |
| | 313,65 | 38,0 | 0,01243 | » | 0,000590 | | | | | | | | |
| *r.* | 327,50 | 37,65 | 0,01322 | 0,01322 | 0,000641 | 0,000641 | | | | | | | |

*Eau.*

| Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E | Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,0 | 95,5 | | | | | | 0,0 | 38,2 | | | | |
| 0,05779 | 98,1 | 94,1 | 0,01427 | 0,01423 | 0,000403 | 0,000402 | | 83,5 | 36,4 | 0,02156 | 0,01902 | 0,001046 | 0,000923 |
| | 200,8 | 92,6 | 0,01444 | » | 0,000408 | | | 194,3 | 35,0 | 0,01647 | | 0,000799 | |
| | 307,6 | 91,2 | 0,01398 | » | 0,000395 | | III. | 0,0 | 74,5 | | | | |
| *r.* | » | 91,2 | 0,01398 | 0,01398 | 0,000395 | 0,000395 | 0,1788 | 194,0 | 72,3 | 0,01134 | 0,01134 | 0,001014 | 0,001014 |
| II. | 0,0 | 48,0 | | | | | | 0,0 | 130,5 | | | | |
| 0,09703 | 117,4 | 46,8 | 0,01022 | 0,00762 | 0,000496 | 0,000369 | | 158,6 | 127,5 | 0,01892 | 0,01893 | 0,001691 | 0,001692 |
| | 251,9 | 46,5 | 0,00596 | » | 0,000289 | | | 195,4 | 126,8 | 0,01894 | » | 0,001693 | |
| | 352,95 | 45,65 | 0,00667 | » | 0,000323 | | IV. | 0,0 | 93,4 | | | | |
| *r.* | 375,6 | 43,4 | 0,01225 | 0,01371 | 0,000594 | 0,000665 | 0,2869 | 116,6 | 91,2 | 0,01887 | 0,01957 | 0,002707 | 0,002808 |
| | » | 42,3 | 0,01517 | » | 0,000736 | | | 315,7 | 87,0 | 0,02027 | » | 0,002908 | |

*Éther.*

| Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E | Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,0 | 84,7 | | | | | *r.* | » | 5,2 | 0,01320 | 0,01159 | 0,000579 | |
| 0,05779 | 207,8 | 83,0 | 0,00818 | 0,00854 | 0,000231 | 0,000241 | » | » | 5,4 | 0,01255 | | 0,000551 | |
| | 404,5 | 81,1 | 0,00890 | » | 0,000251 | | | 0,0 | 30,5 | | | | |
| *r.* | » | 80,0 | 0,01162 | 0,01162 | 0,000328 | 0,000328 | | 113,6 | 29,7 | 0,00704 | 0,00880 | 0,000309 | 0,000386 |
| | 0,0 | 40,8 | | | | | | 321,9 | 27,4 | 0,00963 | » | 0,000423 | |
| | 138,2 | 38,5 | 0,00941 | 0,00920 | 0,000266 | 0,000260 | | 461,8 | 26,0 | 0,00974 | » | 0,000427 | |
| | 356,4 | 37,6 | 0,00898 | » | 0,000254 | | » | » | 25,8 | 0,01018 | 0,01162 | 0,000447 | 0,000510 |
| *r.* | » | 37,1 | 0,01038 | 0,01038 | 0,000293 | 0,000293 | » | » | 25,1 | 0,01169 | » | 0,000513 | |
| II. | 0,0 | 9,3 | | | | | » | » | 24,5 | 0,01299 | » | 0,000570 | |
| 0,08775 | 139,7 | 8,7 | 0,00430 | 0,00489 | 0,000188 | 0,000214 | III. | 0,0 | 52,6 | | | | |
| | 310,7 | 7,6 | 0,00547 | » | 0,000240 | | 0,2869 | 329,1 | 46,8 | 0,01762 | 0,01611 | 0,002528 | 0,002310 |
| *r.* | » | 6,5 | 0,00901 | » | 0,000395 | 0,000508 | *r.* | » | 47,8 | 0,01459 | » | 0,002092 | |

*Acide sulfurique.*

| Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E | Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,0 | 45,7 | | | | | III. | 0,0 | 32,7 | | | | |
| 0,05779 | 101,0 | 43,5 | 0,02178 | 0,02138 | 0,000615 | 0,000604 | 0,2869 | 265,6 | 30,1 | 0,00979 | 0,01018 | 0,001404 | 0,001460 |
| | 200,5 | 41,7 | 0,01997 | » | 0,000564 | | | 376,7 | 28,8 | 0,01035 | » | 0,001483 | |
| | 272,5 | 39,6 | 0,02239 | » | 0,000632 | | | 461,6 | 27,9 | 0,01040 | » | 0,001492 | |
| *r.* | » | 38,7 | 0,02569 | 00,2569 | 0,000725 | 0,000725 | *r.* | » | 26,6 | 0,01322 | 0,01582 | 0,001896 | 0,002002 |
| II. | 0,0 | 52,9 | | | | | » | » | 24,2 | 0,01841 | » | 0,002108 | |
| 0,1758 | 96,0 | 52,2 | 0,00729 | 0,00663 | 0,000652 | 0,000593 | *r. a.* | » | 32,6 | 0,00022 | 0,00054 | 0,000031 | 0,000077 |
| | 200,9 | 51,7 | 0,00597 | » | 0,000534 | | *r. a.* | » | 32,3 | 0,00087 | » | 0,000124 | |
| *r.* | » | 49,4 | 0,01742 | 0,01742 | 0,001558 | 0,001558 | | | | | | | |
| *r. a.* | » | 52,9 | 0,00000 | 0,00000 | 0,000000 | 0,000000 | | | | | | | |

*Huile d'orange.*

| Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E | Nos et rayons. | $d$ | $l$ | $\frac{l-l'}{d}$ | $\frac{L-L'}{D}$ | $e$ | E |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 0,0 | 49,9 | | | | | II. | 0,0 | 19,6 | | | | |
| 0,1758 | 288,9 | 45,5 | 0,01523 | 0,01523 | 0,001362 | 0,001362 | 0,2869 | 102,3 | 17,0 | 0,02542 | 0,02393 | 0,003646 | 0,003433 |
| *a.* 30′ | » | 46,4 | 0,01212 | » | 0,001083 | | | 207,9 | 15,0 | 0,02213 | » | 0,003174 | |
| 35′ | » | 47,2 | 0,00935 | » | 0,000836 | | | 334,8 | 11,2 | 0,02509 | » | 0,003599 | |
| 50′ | » | 48,0 | 0,00658 | » | 0,000583 | | | 519,9 | 7,6 | 0,02308 | » | 0,003311 | |
| $1^h0$ | » | 48,2 | 0,00588 | » | 0,000526 | | *a.* $3^h30'$ | 521,1 | 18,0 | 0,00307 | 0,00307 | 0,000440 | 0,000440 |
| 1 45 | » | 48,6 | 0,00450 | » | 0,000402 | | | | | | | | |
| 5 0 | » | 49,0 | 0,00312 | 0,00312 | 0,000278 | 0,000278 | | | | | | | |
| 3 jours. | » | 48,7 | 0,00415 | » | 0,000371 | | | | | | | | |

Je tire des expériences précédentes quelques conclusions qui me paraissent ne pas manquer d'intérêt :

1. Les épaisseurs des couches laissées dans différents tubes par une colonne liquide qui y descend librement ne sont pas constantes. Elles croissent plus que proportionnellement au rayon, c'est-à-dire qu'elles peuvent être représentées par une formule de la forme

$$e = \alpha r + f(r),$$

$f(r)$ étant une fonction de $r$, positive et croissant avec $r$.

Cette conclusion s'applique aussi bien aux épaisseurs des couches formées par un seul mouvement descendant que par plusieurs parcours du tube. Elle se déduit immédiatement des valeurs du rapport $\frac{L-L'}{D}$ qui, si les couches avaient, dans différents tubes, les mêmes épaisseurs, devraient être en raison inverse du rayon, et par conséquent diminuer rapidement quand celui-ci augmente. Or nous voyons ce rapport croître avec $r$.

2. La couche laissée par un liquide le long des parois d'un tube n'y reste point adhérente, mais s'en détache au bout d'un temps plus ou moins long, au bout duquel il ne reste plus de couche mouillante.

Il suffit, pour se convaincre de la vérité de cette assertion, de considérer les expériences II et III sur l'acide sulfurique et I et II sur l'huile d'orange; nous y trouvons sous l'indice $r. a.$, pour le premier de ces liquides, les épaisseurs $0^m,0000000$ et $0^m,000077$, l'une tout à fait nulle, l'autre vraiment inappréciable. Pour l'huile d'orange, aux indices $a.5^h$ et $a.3^h,30'$ se trouvent les épaisseurs 0,000278 et 0,000440 qui sont plus sensibles, mais inférieures aux limites que l'expérience peut franchir avec certitude. Ainsi donc, pour l'acide sulfurique et l'huile d'orange, l'épaisseur des couches mouillantes observées après un temps suffisamment long est nulle ou insensible.

Comment admettre qu'il puisse en être ainsi pour des liquides visqueux comme l'acide sulfurique et l'huile d'orange, et non pour des liquides tels que l'alcool et l'éther, qui montrent bien moins d'adhérence au verre? Nous ne trouvons dans les tableaux précédents qu'une seule expérience capable de nous éclairer sur cette question; elle concerne l'alcool (V, $r.a$) et nous montre que, bien que l'épaisseur se soit, par le repos du liquide pendant vingt-quatre

heures, réduite au tiers de ce qu'elle était d'abord, elle a néanmoins conservé une grandeur appréciable $0^{mm},00119$. Depuis, j'ai fait quelques observations sur l'éther, et j'ai toujours trouvé que la colonne liquide, au bout de vingt-quatre heures, n'avait pas augmenté de longueur, de sorte que l'épaisseur de la couche mouillante n'avait pas diminué par le repos. Or, il répugnerait d'admettre que l'éther pût rester plus adhérent aux parois du tube que l'alcool, et celui-ci plus que l'acide sulfurique et l'huile d'orange. On s'explique d'ailleurs très-facilement comment l'expérience peut conduire à un tel résultat : en effet, l'acide sulfurique et l'huile d'orange sont des liquides très-peu volatils, le premier surtout. Par suite, les couches de ces liquides peuvent, sans s'évaporer, se détacher lentement des parois du tube et rejoindre la colonne restée dans le tube. Pour des liquides volatils, au contraire, il peut et il doit arriver que la couche mouillante, à mesure qu'elle se forme, s'évapore en partie. La vapeur produite peut s'échapper par les extrémités du tube que l'on doit maintenir ouvertes pour laisser descendre la colonne. Celle qui ne s'échappe pas peut, lorsque le tube est ensuite fermé, rester à l'état de saturation, ou se condenser en partie, si la température s'abaisse. Cette partie condensée s'ajouterait alors à la partie de la couche mouillante qui ne s'est pas évaporée, pour rendre à la colonne liquide une partie de sa longueur primitive. Voici sur ce sujet deux expériences qui me paraissent décisives :

1° Ayant introduit dans le tube de rayon $0^{mm},1758$ une colonne d'éther, je fermai aussitôt les deux extrémités de ce tube et le plongeai dans de la glace pilée. Au bout d'une demi-heure, je mesurai la longueur de la colonne qui se trouva de $60^{D},0$. Je retirai alors le tube et j'ouvris les deux extrémités, puis fermant imparfaitement l'extrémité inférieure au moyen d'un tampon de cire molle, je replongeai le tube dans la glace, et lorsque la colonne eut parcouru une longueur suffisante, j'appuyai le tube contre le fond du vase plein de glace, de manière à achever de fermer l'extrémité inférieure, en même temps je bouchai l'extrémité supérieure à l'aide d'un second tampon de cire molle. Observant alors à la lunette, je reconnus que la longueur parcourue était $271^{D},0$ et celle de la colonne de $58^{D},4$. Au bout d'une demi-heure j'observai de nouveau, et je retrouvai à la colonne exactement sa longueur primitive $60^{D},0$ ;

2° Ayant effilé les deux extrémités d'un tube de rayon 0,2869, j'y fis pénétrer une colonne d'éther, et je mesurai sa longueur, qui était de $29^D,0$, après avoir fermé à la lampe les deux extrémités du tube; les ayant de nouveau brisées, je vis la colonne descendre très-lentement; après un parcours de $294^D,0$ le tube ayant été refermé, je trouvai à la colonne une longueur de $28^D,5$. Au bout de trois heures, cette colonne n'avait pas varié.

Ces deux expériences fournissent des indications précises sur le phénomène qui nous occupe. Je ne puis, en effet, m'expliquer leurs résultats différents que de la manière suivante :

Lorsqu'une colonne d'éther descend dans un tube, la couche qu'elle abandonne le long des parois n'y adhère que très-peu; une partie rejoint constamment la colonne mobile, une autre s'évapore et s'échappe; celle-ci est d'autant moindre que la température est plus basse et que les vapeurs formées peuvent moins s'échapper. C'est ce qui explique les très-petites pertes de longueur observées dans ces deux expériences. En effet, dans la première nous avons :

$$\frac{l-l'}{d} = \frac{1,6}{271} = 0,005904,$$

et dans la seconde :

$$\frac{l-l'}{d} = \frac{0,5}{294} = 0,001735.$$

Or, au lieu de cette dernière valeur, nous trouvons pour le même tube dans le tableau concernant l'éther le nombre 0,01762.

On s'explique facilement pourquoi, malgré l'infériorité de la température, la perte a été plus considérable d'abord dans le premier tube, et pourquoi cette perte s'est ensuite réduite à 0°, tandis que la seconde plus faible d'abord a subsisté. Il suffit de remarquer que l'air pénétrant difficilement à travers les extrémités effilées du deuxième tube, le mouvement de la colonne était très-lent, de sorte que la partie non évaporée pouvait la rejoindre constamment. Dans le premier tube il en était tout autrement, le mouvement se faisait plus rapidement, mais la partie évaporée devait être presque nulle, le tube étant à 0°. La colonne a donc pu diminuer momentanément de longueur pour se reconstituer ensuite, la perte par l'évaporation étant insensible.

Ces considérations se trouvent confirmées par différents phénomènes qui se présentent pendant l'observation, surtout avec l'alcool et l'éther. Après que l'on a fermé l'extrémité supérieure du tube, la colonne continue quelque temps à descendre, mais bientôt on la voit remonter de quelques millimètres, pour redescendre ensuite; elle exécute ainsi plusieurs oscillations dont l'amplitude va en décroissant, et il faut attendre assez longtemps avant que le mouvement s'arrête; alors une secousse donnée au tube suffit pour le reproduire. Enfin, au moment où l'on ouvre le haut du tube, l'extrémité inférieure étant ouverte aussi, on voit la colonne s'élever brusquement de quelques millimètres, avant de descendre librement. Ces faits me paraissent ne pouvoir être attribués qu'à la tension de l'air et des vapeurs contenues dans le tube.

Nous devons faire observer ici que ce mouvement d'oscillation, bien qu'il soit gênant pour l'observation, ne peut entraîner d'erreur sensible dans l'évaluation de $\frac{l-l'}{d}$ et de $e$; en effet, outre que ce mouvement est assez faible, la longueur de la colonne au bout de deux ou trois oscillations ne doit plus varier, le tube étant *saturé* de liquide dans l'étendue de ces oscillations. Il faudra seulement prendre pour $d$ la plus grande longueur parcourue.

La conclusion la plus importante de ces expériences est certainement celle que nous venons de discuter, et que nous pouvons énoncer ainsi :

*Une couche liquide d'épaisseur sensible ne peut pas rester adhérente à une surface verticale.*

Ce résultat remarquable rend inutiles les efforts que Poisson a faits pour accorder le fait d'une couche mouillante d'épaisseur sensible avec le principe de l'insensibilité de l'attraction à une distance sensible.

Il permet également de supposer que la correction indiquée par M. Plateau ne doit pas s'appliquer aux résultats de mes expériences, puisque je ne mesurais l'élévation de l'eau qu'après l'avoir laissée se produire pendant 24 heures. Nous n'aurons pas non plus désormais à nous préoccuper de cette correction, parce que, si dans nos observations nous n'avons pas toujours laissé écouler un temps aussi long entre le commencement du phénomène et sa mesure (ce qui eût été difficile pour les liquides très-volatils), nous avons au moins attendu suffisamment pour que l'épaisseur de la couche mouillante formée fût devenue insensible.

D'ailleurs la correction de M. Plateau, appliquée même à des observations immédiates, ne conduirait pas aux résultats que ce savant avait prévus, puisqu'elle ne retrancherait point du rayon une quantité constante, mais une quantité croissant avec lui.

Toutefois ces considérations relatives à cette correction ne sont pas d'une rigueur absolue, attendu que les couches mouillantes que nous avons observées ne se produisaient pas d'une manière identique à celles qui peuvent se former au-dessus du ménisque d'un liquide en équilibre dans un tube capillaire. Il est possible qu'une couche d'une très-petite hauteur se maintienne immédiatement au-dessus du ménisque, de manière à terminer celui-ci; dès lors la correction de M. Plateau pourrait être fondée. Mais les expériences précédentes montrent tout au moins l'incertitude de cette correction.

### *Élévation des liquides dans les tubes de verre.*

L'élévation des liquides dans les tubes de verre d'un petit diamètre est certainement l'un des phénomènes capillaires qui ont les premiers frappé l'attention des observateurs; cependant les expériences sérieuses faites sur ce sujet sont loin d'être suffisantes. Au lieu de chercher à vérifier les lois indiquées par les théories et très-incomplétement confirmées, la plupart des physiciens ont accepté ces lois et ont fondé sur elles des recherches qui, par cela même, ont perdu beaucoup de leur valeur.

Il en a été ainsi surtout de la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre, loi fondamentale cependant, puisque de sa vérification dépend non-seulement celle des théories de l'action capillaire, mais encore la détermination d'une constante qui se retrouve dans l'expression analytique de tous les phénomènes qu'embrassent ces théories, savoir le produit, constant d'après cette loi, de l'élévation d'un liquide dans un tube capillaire par le rayon de ce tube; c'est la constante H de la théorie de Laplace, la constante $\alpha^2$ de la théorie de Gauss.

Les traités de physique ne constatent guère qu'une seule vérification de cette loi, vérification dont il est vraiment étonnant que l'on se soit contenté aussi longtemps; car elle n'est basée que sur deux xpériences faites avec

soin sans doute par Gay-Lussac, mais absolument insuffisantes, comme nous l'avons déjà dit, aussi bien par le nombre aussi petit que possible des tubes soumis à l'observation que par le peu de différence des diamètres de ces tubes.

Le travail de Simon, dont nous nous sommes déjà longuement occupé, est le premier dans lequel on trouve sur ce sujet des expériences faites, comme l'exige l'importance de la question, en très-grand nombre et dans des limites très-étendues. Nous avons vu que les résultats de ces expériences étaient contraires à la loi théorique, même dans les limites où cette loi devrait se trouver le mieux vérifiée : en effet, Simon trouve que le produit de l'élévation capillaire par le rayon du tube croît assez rapidement à mesure que le rayon diminue.

Les expériences dont je présentais en 1852 les résultats à l'Académie conduisaient à la même conclusion, mais d'une manière moins nette; les inégalités que je constatais entre les produits en question étaient loin d'être aussi fortes que celles trouvées par Simon; on pouvait même expliquer ces inégalités en admettant la correction indiquée par M. Plateau, qui consistait à retrancher du rayon du tube l'épaisseur de la couche liquide que l'on pouvait supposer adhérente aux parois du tube. J'ai montré dans le chapitre précédent que cette correction était très-incertaine; mais il n'en reste pas moins vrai qu'il suffit d'admettre une erreur de $^1/_{1000^e}$ de millimètre sur la valeur des rayons des tubes, pour expliquer les inégalités observées.

J'ai montré d'ailleurs, par la discussion expérimentale du procédé d'observation de Simon, que l'on pouvait expliquer la valeur plus grande de ses inégalités par le seul fait que Simon mesurait les hauteurs capillaires avant que l'équilibre fût parfaitement établi, et alors que ces hauteurs étaient d'autant plus supérieures aux hauteurs finales que les diamètres des tubes étaient plus petits.

Ainsi, d'une part cette incertitude ou plutôt cette présomption basée sur l'expérience d'une inexactitude dans les résultats de Simon, d'autre part la petitesse des inégalités résultant de mes recherches, ne permettaient pas de considérer la loi du rapport inverse de l'ascension au diamètre, comme infirmée par l'expérience d'une manière bien certaine et bien nette. D'ailleurs les

recherches de Simon et les miennes n'avaient été effectuées que sur un seul liquide, et encore sur l'un de ceux dont l'observation donne les résultats les moins constants. Depuis, M. Ed. Dessains a publié [1] parmi les résultats de ses recherches sur la capillarité, ceux des observations faites sur trois tubes capillaires dont les rayons étaient $0^{mm},620$, $2^{mm},627$ et $4^{mm},639$. Ces observations ne concernant encore que l'ascension de l'eau ont fourni une remarquable confirmation de la loi en question, mais à la condition de supposer au ménisque liquide la forme ellipsoïdale; la correction résultant de cette hypothèse était nécessaire à cause de la valeur considérable des rayons des tubes; on remarquera en effet que les valeurs indiquées sont toutes trois notables. Plus loin, il est vrai, M. Dessains rapporte d'autres expériences, faites sur deux tubes plus capillaires, l'un de $0^{mm},201$ de rayon, l'autre de $0^{mm},074$, et qui sont encore d'accord avec la loi théorique. Néanmoins le nombre total des tubes est encore trop restreint, et l'emploi d'un seul liquide d'une observation difficile, trop peu décisif pour que l'on puisse se contenter d'une telle vérification d'une loi aussi fondamentale.

J'ai donc cru devoir reprendre cette vérification et faire sur ce sujet des expériences aussi complètes que possible, en observant l'ascension d'un grand nombre de liquides dans un grand nombre de tubes de diamètres très-différents; ces observations devaient d'ailleurs fournir des données intéressantes pour d'autres recherches.

Les liquides dont j'ai observé l'ascension sont au nombre de 29, savoir : l'eau, l'acide sulfurique, l'huile de naphte, l'alcool ordinaire du commerce, l'alcool absolu, l'éther, le collodion, les éthers chlorhydrique, iodhydrique, bromhydrique, formique, acétique, méthylacétique, oxalique, le chloroforme, l'acétone, l'alcool méthylique, l'alcool amylique, la liqueur des Hollandais, la benzine, l'huile d'orange, l'essence de térébenthine, le brome, le sulfure de carbone, le protochlorure de soufre, l'ammoniaque et les acides chlorhydrique, azotique et acétique.

J'ai préparé ou rectifié moi-même avec le plus grand soin tous ces liquides, à l'exception de la benzine, de l'huile d'orange et de l'alcool du commerce.

[1] *Ann. de chimie et de physique*, 3me série, t. LI, p. 402. (Décembre 1857.)

J'ai indiqué précédemment les différents procédés que j'ai employés aussi bien pour la mesure des rayons des tubes que pour celle des élévations capillaires. Je me bornerai à rappeler que cette dernière mesure se faisait au moyen du cathétomètre pour les tubes d'un petit diamètre, et au moyen du sphéromètre pour les tubes d'un diamètre plus considérable. L'emploi de ce dernier instrument est dans le cas actuel fort simple, et n'exige pas d'artifice particulier d'observation, comme lorsqu'il s'agit de la mesure des dépressions du mercure; on est en effet immédiatement averti de l'instant précis du contact entre la pointe du sphéromètre et le liquide, par un mouvement brusque de celui-ci, qui en cet instant se soulève pour mouiller la pointe; il faut seulement que celle-ci soit bien aiguë et bien propre. Autrement elle peut s'enfoncer d'une quantité sensible dans le liquide sans que celui-ci s'élève contre la surface. Il se produit alors un phénomène analogue à l'équilibre d'une aiguille d'acier, ou de certains insectes qui se soutiennent sur la surface de l'eau en la déprimant légèrement.

Les tableaux suivants contiennent les résultats détaillés de mes expériences. On verra immédiatement par leur inspection que je n'ai pas cherché à vérifier, pour tous les liquides soumis à l'observation, la loi du rapport inverse de l'ascension au diamètre, dans des limites également étendues; je me proposai seulement pour plusieurs d'entre eux de déterminer ce que nous pourrons appeler désormais la constante capillaire, c'est-à-dire le produit supposé constant du rayon du tube par l'élévation corrigée.

Je n'ai également indiqué que pour quelques liquides les différentes données relatives aux tubes employés, me dispensant de ce soin pour les liquides sur l'élévation desquels certaines de ces données, telles que la nature (cristal ou verre) et l'épaisseur des tubes, paraissaient sans aucune influence.

Il me reste à ajouter que toutes les expériences dont les résultats sont indiqués dans ces tableaux ont été faites sur les tubes mouillés; dans la première de chaque groupe, le liquide soulevé redescendait librement pendant longtemps; dans la seconde, le tube ayant été enfoncé dans le liquide, celui-ci devait remonter; dans la troisième enfin, le tube était relevé et le liquide redescendait.

*Élévation des liquides dans les tubes de verre.*

| NATURE des liquides et température. | Nos des tubes. | NATURE des tubes. | Épaisseur. | Rayons $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. | | | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h + \frac{r}{3}\right) r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | | |
| | | | mm. | mm. | | | | | |
| Eau. 15°,4. | 1 | c. | 1,62 | 10,015 | 0,094 | 0,091 | 0,086 | 0,090 | 34,31 |
| | 2 | c. | 1,31 | 7,851 | 0,252 | 0,237 | 0,228 | 0,239 | 22,45 |
| | 3 | v. | 0,79 | 5,295 | 0,736 | 0,724 | 0,718 | 0,726 | 13,24 |
| | 4 | c. | 3,22 | 3,605 | 1,584 | 1,568 | 1,560 | 1,570 | 9,97 |
| | 5 | c. | 3,76 | 2,583 | 3,293 | 3,192 | 3,159 | 3,215 | 10,52 |
| | 6 | v. | 0,12 | 0,881 | 11,65 | 11,40 | » | 11,53 | 10,41 |
| | 7 | v. | 0,20 | 0,270 | 39,75 | 40,90 | 40,35 | 40,33 | 10,90 |
| | 8 | c. | 0,16 | 0,217 | 69,10 | 69,00 | 68,95 | 69,02 | 13,89 |
| | 9 | c. | 4,00 | 0,180 | 82,80 | 82,60 | 83,25 | 82,88 | 14,95 |
| | 10 | c. | 4,20 | 0,172 | 89,10 | 88,95 | 89,25 | 89,10 | 15,32 |
| | 11 | c. | 4,20 | 0,170 | 90,60 | 90,15 | » | 90,38 | 15,37 |
| | 12 | c. | 0,16 | 0,113 | 120,15 | 120,00 | 120,20 | 120,12 | 13,62 |
| | 13 | c. | 4,70 | 0,094 | 161,00 | 159,60 | » | 160,30 | 15,13 |
| | 14 | c. | 0.15 | 0,078 | 187,85 | 188,20 | 187,75 | 187,93 | 14,73 |
| | 15 | c. | 4,40 | 0,063 | 244,80 | 242,05 | 243,35 | 243,40 | 15,26 |
| | 16 | c. | 3,70 | 0,0516 | 288,85 | 287,20 | 287,85 | 287,97 | 14,87 |
| | 17 | c. | 0,18 | 0,0182 | 824,80 | » | » | 824,80 | 15,05 |
| Acide sulfurique. 16°. | 1 | c. | 1,62 | 10,015 | 0,038 | 0,038 | » | 0,038 | 33,81 |
| | 2 | c. | 1,31 | 7,851 | 0,087 | 0,085 | » | 0,086 | 21,20 |
| | 3 | v. | 0,79 | 5,295 | 0,169 | 0,173 | 0,170 | 0,171 | 10,96 |
| | 4 | c. | 3,22 | 3,605 | 0,572 | 0,569 | » | 0,570 | 6,38 |
| | 5 | c. | 3,76 | 2,583 | 1,007 | 1,024 | 1,039 | 1,020 | 4,86 |
| | 6 | v. | 1,12 | 2,107 | 3,00 | 3,00 | 3,00 | 3,00 | 7,80 |
| | 7 | c. | 1,46 | 1,505 | 3,65 | 4,05 | 3,85 | 3.85 | 6,55 |
| | 8 | c. | 1,20 | 0,955 | 6,60 | 6,75 | 6,65 | 6,68 | 6,69 |
| | 9 | v. | 0,57 | 0,896 | 6,60 | 7,25 | » | 6,93 | 6,48 |
| | 10 | c. | 1,25 | 0,613 | 10,30 | 11,15 | » | 10,73 | 6,76 |
| | 11 | c. | 0,38 | 0,501 | 14,50 | 14,45 | 14,20 | 14,38 | 7,28 |
| | 12 | v. | 1,00 | 0,345 | 18,85 | 18,80 | » | 18,83 | 6,52 |
| | 13 | c. | 0,20 | 0,284 | 23,80 | » | » | 23,80 | 6,75 |
| | 14 | c. | 0,27 | 0,270 | 24,95 | 25,00 | 25,25 | 25,07 | 6,78 |
| | 15 | c. | 2,50 | 0,204 | 31,90 | 32,95 | » | 32,43 | 6,62 |
| | 16 | c. | 4,01 | 0,180 | 38,65 | 39,05 | » | 38,85 | 7,75 |
| | 17 | c. | 4,01 | 0,179 | 37,45 | 38,70 | » | 38,08 | 7,25 |

| NATURE des liquides et température. | Nos des tubes. | NATURE des tubes. | Épaisseur. | Rayons $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | mm. | mm. | | | | | |
| Acide sulfurique (suite). | 18 | c. | 2,05 | 0,160 | 41,20 | 41,65 | » | 41,43 | 6,62 |
| | 19 | c. | 3,38 | 0,128 | 56,80 | 55,75 | 58,75 | 57,03 | 7,31 |
| 16°. | 20 | c. | 2,71 | 0,127 | 57,80 | 59,75 | » | 58,78 | 7,47 |
| | 21 | c. | 0,15 | 0,122 | 57,75 | 59,05 | » | 58,40 | 7,11 |
| | 22 | c. | 2,79 | 0,106 | 67,00 | 67,30 | 68,70 | 67,67 | 7,14 |
| | 23 | c. | 0,17 | 0,097 | 71,10 | 71,30 | 71,60 | 71,33 | 6,93 |
| | 24 | c. | 2,95 | 0,094 | 79,85 | 79,80 | » | 79,83 | 7,48 |
| Huile de naphte. | » | c. | 1,62 | 10,015 | 0,029 | 0,030 | 0,031 | 0,030 | 33,73 |
| | » | c. | 1,31 | 7,851 | 0,126 | 0,128 | 0,130 | 0,128 | 21,55 |
| 13°,5. | » | v. | 0,79 | 5,295 | 0,447 | 0,455 | 0,463 | 0,455 | 11,86 |
| | » | o. | 3,22 | 3,605 | 1,110 | 1,114 | 1,116 | 1,113 | 8,34 |
| | » | c. | 3,76 | 2,583 | 1,902 | 1,909 | 1,913 | 1,908 | 7,20 |
| | » | v. | 1,12 | 2,107 | 2,50 | 2,70 | » | 2,60 | 6,95 |
| | » | c. | 1,46 | 1,505 | 4,05 | 4,00 | 4,15 | 4,07 | 6,88 |
| | » | c. | 1,20 | 0,955 | 6,65 | 6,55 | 6,70 | 6,63 | 6,64 |
| | » | v. | 0,57 | 0,896 | 7,10 | 7,05 | » | 7,08 | 6,62 |
| | » | c. | 1,25 | 0,613 | 10,75 | 10,40 | 10,50 | 10,55 | 6,59 |
| | » | v. | 1,00 | 0,343 | 19,15 | 19,10 | 19,20 | 19,15 | 6,63 |
| | » | c. | 4,03 | 0,175 | 37,60 | 37,85 | 37,85 | 37,77 | 6,63 |
| | » | c. | 2,05 | 0,160 | 43,15 | 43,75 | 43,50 | 43,47 | 6,92 |
| | » | c. | 2,95 | 0,094 | 68,90 | 69,10 | » | 69,00 | 6,49 |
| | » | c. | 2,00 | 0,058 | 110,45 | 110,70 | 110,65 | 110,60 | 6,39 |

| NATURE DES LIQUIDES et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alcool ordinaire. | 10,015 | 0,029 | 0,031 | 0,033 | 0,031 | 33,74 |
| Température 7°. | 7,851 | 0,098 | 0,100 | 0,102 | 0,100 | 21,33 |
| Densité à 0° : 0,8422. | 5,295 | 0,380 | 0,386 | 0,392 | 0,386 | 11,07 |
| | 3,605 | 0,966 | 0,984 | 1,006 | 0,985 | 7,88 |
| | 2,583 | 1,747 | 0,757 | 0,768 | 1,757 | 6,76 |

| NATURE DES LIQUIDES et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. I^re expérience. | II^e expérience. | III^e expérience. | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Alcool ordinaire (suite). | 2,107 | 2,60 | 2,50 | » | 2,55 | 6,86 |
| | 1,505 | 3,70 | 3,60 | » | 3,65 | 6,24 |
| | 0,955 | 6,70 | 6,60 | 6,65 | 6,65 | 6,06 |
| | 0,896 | 7,10 | 6,90 | 6,80 | 6,93 | 6,48 |
| | 0,613 | 10,10 | 9,95 | 10,65 | 10,23 | 6,45 |
| | 0,343 | 18,20 | 18,00 | 17,90 | 18,03 | 6,24 |
| | 0,024 | 31,20 | 31,05 | 31,05 | 31,10 | 6,35 |
| | 0,160 | 38,65 | 38,85 | 38,45 | 38,65 | 6,18 |
| | 0,094 | 64,75 | 64,70 | 64,80 | 64,75 | 6,09 |
| | 0,041 | 154,75 | 153,80 | 154,30 | 154,28 | 6,33 |
| | 0,0182 | 362,20 | 361,60 | 361,00 | 361,60 | 6,60 |
| Même alcool. Température 15°,7. | 0,156 | 39,25 | 39,50 | » | 39,38 | 6,13 |
| | 0,153 | 39,90 | 40,40 | » | 40,15 | 6,12 |
| | 0,140 | 43,80 | » | » | 43,80 | 6,14 |
| | 0,095 | 66,00 | » | » | 66,00 | 6,26 |
| | 0,074 | 83,25 | 82,00 | » | 82,63 | 6,12 |
| | 0,068 | 88,45 | 89,25 | 90,90 | 89,53 | 6,16 |
| | 0,056 | 108,80 | 109,40 | 111,40 | 109,87 | 6,11 |
| | 0,050 | 121,50 | 123,40 | 123,80 | 122,90 | 6,15 |
| Alcool absolu. Température 14°. Densité à 0° : 0,8275. | 0,881 | 6,20 | 6,15 | 6,25 | 6,20 | 5,71 |
| | 0,303 | 19,15 | 19,20 | 19,35 | 19,23 | 5,87 |
| | 0,288 | 19,45 | 19,55 | 19,65 | 19,55 | 5,67 |
| | 0,236 | 24,20 | 24,65 | 24,35 | 24,40 | 5,78 |
| | 0,094 | 61,75 | 62,75 | 62,60 | 62,37 | 5,88 |
| | 0,078 | 72,00 | 72,75 | 72,70 | 72.48 | 5,63 |
| | 0,047 | 123,85 | 119,45 | 121,00 | 121,43 | 5,71 |
| Éther. Température 18°,8. Densité à 0° : 0,7430. | 2,107 | 2,00 | 2,15 | » | 2,08 | 5,87 |
| | 1,505 | 3,20 | 3,30 | 3,05 | 3,18 | 5,58 |
| | 0,955 | 5,15 | 5,35 | 5,35 | 5,28 | 5,35 |
| | 0,915 | 5,45 | 5,50 | 5,55 | 5,50 | 5,32 |
| | 0,896 | 5,65 | 5,60 | 5,55 | 5,60 | 5,29 |

| NATURE DES LIQUIDES et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. | | | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | | |
| **Éther** (suite). | 0,613 | 8,45 | 8,40 | 8,70 | 8,52 | 5,42 |
| | 0,602 | 8,30 | 8,30 | 8,40 | 8,33 | 5,14 |
| | 0,343 | 15,15 | 15,55 | 15,50 | 15,40 | 5,34 |
| | 0,288 | 17,60 | 17,50 | 17,65 | 17,58 | 5,10 |
| | 0,204 | 26,00 | 26,45 | 26,30 | 26,25 | 5,36 |
| | 0,160 | 31,95 | 32,60 | 32,15 | 32,25 | 5,17 |
| | 0,117 | 45,30 | 45,28 | 46,40 | 45,68 | 5,33 |
| | 0,094 | 54,05 | 56,25 | 54,05 | 54,78 | 5,15 |
| | 0,086 | 58,70 | 58,75 | 59,10 | 58,85 | 5,09 |
| | 0,078 | 62,55 | 63,85 | 63,40 | 63,27 | 4,94 |
| | 0,047 | 105,90 | 106,20 | 106,25 | 106,12 | 4,99 |
| | 0,041 | 129,85 | 127,90 | 132,65 | 130,13 | 5,34 |
| | 0,0183 | 318,40 | » | » | 318,40 | 5,82 |
| | 0,0182 | 315,80 | » | » | 315,80 | 5,74 |
| **Collodion.** Température 12°,5. | 1,505 | 3,20 | » | » | 3,20 | 5,56 |
| Ce collodion est fait avec l'éther | 0,955 | 5,30 | » | » | 5,30 | 5,37 |
| précédent, saturé de pyroxyle, | 0,896 | 5,50 | » | » | 5,50 | 5,20 |
| sans addition d'alcool. | 0,613 | 8,30 | 8,30 | » | 8,30 | 5,28 |
| | 0,343 | 15,10 | 15,10 | » | 15,10 | 5,23 |
| | 0,204 | 26,00 | 26,20 | » | 26,10 | 5,33 |
| | 0,160 | 32,95 | 32,75 | » | 32,85 | 5,26 |
| | 0,094 | 54,40 | 54,20 | » | 54,30 | 5,10 |
| **Éther chlorhydrique.** Température 0°. | 0,175 | 25,30 | 25,15 | 25,30 | 25,25 | 4,42 |
| | 0,120 | 35,85 | 35,85 | 36,25 | 35,92 | 4,31 |
| | 0,0416 | 111,85 | 111,75 | 111,60 | 112,07 | 4,66 |
| **Éther iodhydrique.** Température 16°0. | 0,287 | 10,30 | 10,55 | 10,40 | 10,45 | 3,03 |
| | 0,054 | 52,50 | 52,95 | 52,90 | 52,78 | 2,85 |
| **Éther bromhydrique.** Température 14°7. | 0,287 | 12,60 | 12,80 | 12,90 | 12,77 | 3,69 |
| | 0,054 | 62,95 | 63,15 | 63,20 | 63,10 | 3,41 |

| NATURE DES LIQUIDES. et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. | | | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | | |
| **Éther formique.** Température 10°,4. | 0,287 | 19,70 | 19,80 | 19,85 | 19,78 | 5,70 |
| | 0,092 | 60,70 | 60,65 | 60,90 | 60,75 | 5,61 |
| | 0,054 | 101,40 | 102,00 | 101,90 | 101,77 | 5,50 |
| **Éther acétique.** Température 11°,7. | 0,287 | 20,20 | 20,20 | 20,20 | 20,20 | 5,82 |
| | 0,092 | 59,85 | 60,25 | 60,35 | 60,15 | 5,55 |
| | 0,054 | 101,40 | 101,85 | 101,80 | 101,68 | 5,49 |
| **Éther methylacétique.** Température 16°,0. | 0,180 | 30,30 | 30,35 | » | 30,33 | 5,47 |
| **Éther oxalique.** Température 15°,8. | 0,287 | 20,05 | 20,35 | 20,40 | 20,27 | 5,84 |
| | 0,092 | 61,90 | 62,25 | 62,40 | 62,18 | 5,74 |
| | 0,054 | 104,10 | 105,25 | 105,00 | 104,78 | 5,66 |
| **Acétone.** Température 19°,3. | 0,180 | 34,30 | 34,25 | 34,35 | 34,30 | 6,18 |
| **Alcool méthylique.** Température 14°,1. | 0,287 | 21,30 | 21,40 | » | 21,35 | 6,15 |
| | 0,180 | 32,85 | 33,00 | » | 32,93 | 5,93 |
| | 0,092 | 64,60 | 64,80 | 64,70 | 64,90 | 5,97 |
| | 0.054 | 110,30 | 110,25 | 110,65 | 110,40 | 5,96 |
| **Alcool amylique.** Température 16°,0. | 0,884 | 6,35 | 6,65 | 6,80 | 6,60 | 6,10 |
| | 0,180 | 32,85 | 33,05 | 33,20 | 33,03 | 5,95 |
| | 0,092 | 63,30 | 62,65 | » | 63,48 | 5,85 |
| **Liqueur des Hollandais.** Température 19°,2. | 0,180 | 29,00 | 29,05 | » | 29,08 | 5,23 |
| | 0,092 | 54,90 | 55,00 | » | 54,95 | 5,19 |

| NATURE DES LIQUIDES et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Benzine.** | 0,287 | 22,85 | 22,95 | 22,90 | 22,90 | 6,60 |
| Température 10°,4. | 0,180 | 36,65 | 36,65 | 36,65 | 36, 65 | 6,60 |
| | 0,092 | 69,10 | 69,35 | 69,40 | 69,28 | 6,38 |
| | 0,054 | 116,10 | 115,70 | 117,65 | 116,52 | 6,60 |
| **Huile d'orange.** | 0,946 | 6,65 | 6,90 | 6,95 | 6,82 | 6,75 |
| Température 14°,4. | 0,605 | 10,95 | 10,80 | 10,45 | 10,73 | 6,61 |
| | 0,280 | 23,85 | 24,20 | 24,20 | 24,08 | 6,76 |
| | 0,168 | 39,45 | 39,45 | » | 39,45 | 6,65 |
| | 0,166 | 40,25 | 40,75 | 40,70 | 40,57 | 6,76 |
| | 0,129 | 51,75 | 51,00 | 51,30 | 51,35 | 6,64 |
| | 0,127 | 53,15 | 52,90 | 52,35 | 52,80 | 6,71 |
| | 0,102 | 65,95 | 65,55 | 65,20 | 65,53 | 6,68 |
| | 0,0675 | 97,50 | 97,95 | 97,90 | 97,78 | 6,60 |
| **Essence de térébenthine.** | 0,912 | 6,65 | 6,60 | 6,55 | 6,60 | 6,29 |
| Température 14°,4. | 0,250 | 25,35 | 25,35 | 25,40 | 25,37 | 6,36 |
| | 0,288 | 22,75 | 21,50 | 22,00 | 22,08 | 6,40 |
| | 0,120 | 50,25 | 50,00 | 50,60 | 50,28 | 6,03 |
| | 0,086 | 73,05 | 70,80 | 71,80 | 71,88 | 6,21 |
| | 0,078 | 80,00 | 79,90 | 81,65 | 80,52 | 6,26 |
| | 0,058 | 105,75 | 104,50 | 107,70 | 105,98 | 6,19 |
| | 0,047 | 131,85 | 130,10 | 130,70 | 130,88 | 6,16 |
| **Brome.** | 0,614 | 3,90 | 4,20 | 3,85 | 3,98 | 2,51 |
| Température 6°,8. | 0,301 | 8,00 | 8,15 | 8,50 | 8,20 | 2,57 |
| | 0,166 | 15,85 | 15,35 | 15,30 | 15,51 | 2,57 |
| | 0,054 | 52,05 | 52,00 | 51,85 | 51,98 | 2,81 |
| | 0,048 | 56,35 | 56,10 | 55,80 | 55,99 | 2,66 |
| | 0,037 | 72,85 | 73,10 | 76,55 | 74,17 | 2,73 |
| **Sulfure de carbone.** | 0,620 | 9,10 | 9,20 | 9,10 | 9,13 | 5,85 |
| Température 12°,9. | 0,317 | 17,05 | 17,20 | 17,00 | 17,08 | 5,48 |
| | 0,175 | 31,10 | 31,70 | 31,85 | 31,67 | 5,56 |

| NATURE DES LIQUIDES. et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. I<sup></sup>re expérience. | II<sup></sup>e expérience. | III<sup></sup>e expérience. | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sulfure de carbone (suite). | 0,097 | 55,00 | 55,50 | 55,05 | 55,18 | 5,36 |
| | 0,088 | 59,60 | 59,20 | 59,55 | 59,45 | 5,22 |
| | 0,058 | 91,50 | 91,00 | » | 91,25 | 5,26 |
| Protochlorure de soufre. Température 18°,8. | 0,287 | 17,95 | 18,05 | 18,30 | 18,05 | 5,21 |
| | 0,180 | 27,05 | 27,30 | 27,60 | 27,25 | 4,91 |
| | 0,092 | 93,25 | 94,45 | 94,65 | 94,12 | 5,33 |
| Ammoniaque. Température 18°,7. | 0,935 | 13,75 | 14,10 | 14,00 | 13,95 | 13,33 |
| | 0,305 | 42,95 | 42,45 | 43,30 | 42,90 | 13,10 |
| Acide chlorhydrique. Température 18°,7. | 0,929 | 13,20 | 13,20 | 13,30 | 13,25 | 12,28 |
| | 0,180 | 67,45 | 67,50 | 67,70 | 67,55 | 12,18 |
| Acide azotique. Température 18°,7. | 0,935 | 10,75 | 10,80 | 10,85 | 10,80 | 10,10 |
| | 0,289 | 32,35 | 32,50 | 32,55 | 32,47 | 9,41 |
| | 0,097 | 101,00 | 101,10 | 101,15 | 101,05 | 9,81 |
| Acide acétique. Température 12°,5. | 0,915 | 5,50 | 5,45 | » | 5,48 | 5,30 |
| | 0,602 | 8,65 | 8,60 | 8,65 | 8,63 | 5,32 |
| | 0,287 | 19,15 | 19,25 | 19,45 | 19,29 | 5,56 |
| | 0,274 | 20,55 | 20,55 | 20,45 | 20,42 | 5,61 |
| | 0,175 | 32,80 | 33,05 | 33,10 | 33,00 | 5,89 |
| | 0,097 | 59,10 | 57,80 | 59,20 | 58,70 | 5,70 |
| | 0,088 | 61,45 | 63,50 | 62,85 | 62,60 | 5,49 |
| | 0,081 | 67,95 | 68,15 | 68,25 | 68,12 | 5,51 |
| | 0,058 | 97,60 | 98,25 | 97,60 | 97,82 | 5,65 |
| Chloroforme. Température 12°,4. | 1,505 | 2,15 | 2,00 | » | 2,08 | 3,88 |
| | 0,955 | 3,80 | 3,70 | » | 3,75 | 3,89 |
| | 0,896 | 3,90 | 3,80 | » | 3,85 | 3,71 |

| NATURE DES LIQUIDES et observations. | Rayons des tubes $r$. | HAUTEURS OBSERVÉES. | | | Hauteurs moyennes. | Produits $\left(h+\frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | | |
| Chloroforme (suite). | 0,613 | 6,00 | 6,00 | » | 0,00 | 3,86 |
| | 0,344 | 11,10 | 11,20 | » | 11,15 | 3,88 |
| | 0,287 | 13,20 | 13,80 | 13,70 | 13,57 | 3,92 |
| | 0,204 | 18,85 | 18,90 | » | 18,88 | 3,86 |
| | 0,160 | 23,20 | 23,15 | » | 23,18 | 3,71 |
| | 0,136 | 28,40 | 28,50 | » | 28,45 | 3,87 |
| | 0,094 | 40,10 | 40,50 | » | 40,50 | 3,79 |
| | 0,092 | 39,10 | 39,80 | 39,50 | 39,50 | 3,64 |
| | 0,054 | 65,65 | 66,40 | 66,40 | 66,15 | 3,59 |
| | 0,0375 | 103,50 | 103,50 | » | 103,50 | 3,88 |
| | 0,0182 | 272,50 | 276,50 | » | 274,50 | 5,01 |

Nous tirerons des résultats consignés dans ces tableaux les conclusions suivantes :

1° L'élévation des liquides dans les tubes mouillés atteint la même valeur, qu'elle se produise après un mouvement ascendant ou après un mouvement descendant dans le tube;

2° La nature et l'épaisseur des parois du tube n'influent pas sur l'élévation de la plupart des liquides.

L'eau et l'acide sulfurique sont les seuls parmi ceux que nous avons observés qui fassent exception. Les inégalités constatées étant du même ordre et dans le même sens que celles présentées par le mercure, et pouvant être attribuées aux mêmes causes, nous ne nous arrêterons pas à les discuter. Nous pouvons en effet nous borner à dire que ces deux liquides, mouillant assez difficilement le verre, des causes légères de résistance peuvent altérer l'angle de contact de ces liquides, de même que celui du mercure, et produire ainsi des inégalités considérables;

3° Le produit du rayon du tube par l'élévation capillaire augmentée du tiers du rayon, commence à être sensiblement constant pour des rayons de $1^{mm}$ jusqu'à la limite inférieure des rayons de nos observations, soit $0^{mm},05$.

Pour des rayons supérieurs à $1^{mm}$, le produit en question croît rapidement

avec le rayon, ce qui, du reste, peut prouver seulement que la correction du tiers du rayon est beaucoup trop forte; et, sous ce rapport, l'expérience est d'accord avec la théorie.

Les inégalités que l'on rencontre entre les résultats correspondants aux tubes vraiment capillaires ne sont pas assez importantes (abstraction faite de celles que présentent l'eau et l'acide sulfurique) et sont trop irrégulières pour que nous ne puissions les attribuer aux erreurs inhérentes à ces délicates observations. Cependant nous voyons, pour l'éther et l'alcool, le produit $(h+\frac{r}{3})r$ prendre un accroissement notable quand le rayon est très-petit.

Nous pouvons donc considérer la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre comme suffisamment exacte pour des rayons compris entre $0^{mm},05$ et $1^{mm}$; mais il ne nous est pas encore permis d'étendre cette loi au delà de ces limites.

Nous venons de dire que, pour les tubes d'un rayon supérieur à $1^{mm}$, l'addition du tiers du rayon à l'élévation constituait une correction trop forte : en effet, dans ce cas, le ménisque est visiblement d'une forme différente de la sphère, et si, comme nous l'avons déjà fait, on assimile sa surface à celle d'un ellipsoïde de révolution ayant ses deux grands axes égaux au diamètre de la sphère, et son demi-petit axe égal à la hauteur du ménisque, la correction approximative indiquée par la théorie consistera dans l'addition du tiers de cette hauteur, toujours plus petite que le rayon du tube. Il nous faut donc tout d'abord, pour apprécier les résultats relatifs à des rayons notables, mesurer les hauteurs des ménisques correspondantes à ces rayons.

Je n'avais pour mesurer ces hauteurs que le cathétomètre dont les indications étaient, du reste, suffisamment exactes pour le but que nous nous proposons, savoir l'appréciation d'une correction. Les observations ayant fourni des résultats identiques ou ne différant tout au plus que de $0^{mm},05$, je me borne à indiquer les moyennes de ces observations.

| RAYONS des tubes. | HAUTEURS DES MÉNISQUES. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Eau. | Alcool. | Éther. | Chloroforme. | Naphte. | Acide sulfurique. |
| 0,158 | 0,15 | » | 0,15 | 0,15 | 0,15 | 0,15 |
| 0,313 | » | » | 0,33 | » | 0,28 | » |
| 0,343 | » | » | » | 0,35 | » | 0,33 |
| 0,613 | » | » | 0,58 | 0,60 | 0,58 | 0,58 |
| 0,625 | 0,63 | 0,63 | 0,60 | 0,65 | » | » |
| 0,838 | » | » | » | 0,85 | 0,83 | 0,88 |
| 0,955 | » | » | 1,05 | 0,80 | 0,85 | 0,93 |
| 1,138 | 0,95 | 1,05 | 1,03 | » | » | » |
| 1,363 | 1,20 | 1,13 | 1,28 | » | » | » |
| 1,450 | » | » | 1,15 | 1,30 | 1,35 | 1,28 |
| 1,725 | 1,35 | 1,38 | 1,43 | » | » | » |
| 2,107 | » | » | » | » | 1,80 | 1,75 |
| 2,163 | 1,93 | 1,70 | 1,70 | » | » | » |
| 2,550 | 2,13 | 1,83 | 1,78 | » | » | » |
| 3,600 | 2,55 | 2,20 | 2,05 | » | » | » |
| 3,700 | 2,88 | 2,30 | 2,23 | » | » | » |
| 5,938 | 3,35 | 2,53 | 2,30 | » | » | » |
| 7,100 | 3,68 | 2,53 | 2,30 | » | » | » |
| 8,563 | 3,78 | 2,43 | 2,25 | » | » | » |

On déduit de ces résultats les deux conclusions suivantes :

1° Les hauteurs des ménisques sont sensiblement égales aux rayons des tubes tant que ces rayons ne dépassent pas $1^{mm}$ ;

2° A partir d'un certain rayon, dont la valeur dépend de la nature du liquide, les hauteurs des ménisques sont constantes et égales à l'élévation du liquide contre une paroi verticale peu courbée [1].

On rend ces conclusions évidentes en construisant des courbes dans lesquelles les abscisses sont les rayons, et les hauteurs des ménisques les ordonnées; ces courbes se terminent sensiblement par deux lignes droites, l'une faisant un angle de 45° avec l'axe de $x$, l'autre parallèle à cet axe.

La limite à laquelle paraît cesser la constance des produits de l'élévation

[1] Les observations relatives à l'élévation des liquides contre une paroi verticale plane ou peu courbée, seront publiées postérieurement.

par le rayon est bien celle qu'indique la théorie, puisque les hauteurs des ménisques ne sont égales aux rayons que pour autant que ceux-ci soient inférieurs à $1^{mm}$; au delà de cette valeur les hauteurs des ménisques deviennent inférieures aux rayons, et en corrigeant les élévations par l'addition du tiers du rayon, on commet des erreurs d'autant plus grandes que les rayons sont plus grands, le volume $\pi r^2\left(h + \frac{r}{3}\right)$ devenant de plus en plus supérieur au véritable volume soulevé.

A partir de cette limite, il devient difficile de comparer les élévations observées avec les élévations théoriques, parce que l'on n'a pour calculer celles-ci que des formules très-faiblement approximatives; ces formules ne s'accordent nullement avec les expériences; elles n'ont même pas le mérite d'une bonne formule d'interpolation. Pour comparer avec sécurité l'observation à la théorie, on devrait, en ne considérant que les élévations, calculer celles qui doivent se produire théoriquement dans les tubes non capillaires, à l'aide de la méthode que Laplace a indiquée pour le calcul des dépressions du mercure dans les tubes barométriques. Ces calculs sont très-laborieux, et il ne m'a point paru que l'importance des résultats fût ici en rapport avec la difficulté de les obtenir. En effet, les élévations des liquides dans les tubes d'un diamètre notable ne présentent pas un intérêt immédiat d'application, comme les dépressions du mercure, mais uniquement ce que nous pourrions appeler un intérêt de vérification. Or, l'on peut obtenir une confirmation ou une infirmation plus complète des lois théoriques en mesurant les volumes liquides soulevés dans des tubes, de la même manière que nous avons déterminé les volumes déprimés de mercure. Après avoir rodé avec soin l'extrémité d'un tube, je le mastique sur un petit fragment de glace; on a ainsi une sorte de petit vase. Je détermine le poids que l'on doit y ajouter lorsqu'on le place sur le plateau d'une balance, pour faire équilibre à un poids quelconque placé sur l'autre plateau; puis je verse un liquide dans son intérieur et je tare de nouveau; la différence des pesées donne exactement le poids P du liquide. Cela fait, je mesure au sphéromètre la hauteur H du point le plus bas du ménisque au-dessus du fond de ce petit vase. Il est clair que le volume du ménisque sera :

$$v = \frac{P}{\delta} - \pi r^2 H.$$

On appelle $r$ le rayon du tube et $\delta$ le poids spécifique du liquide.

De plus, comme le ménisque doit être dans ce cas le même que si le tube était ouvert à la partie inférieure et plongé dans le liquide, le volume qui serait soulevé alors serait

$$V = \frac{P}{\delta} - \pi r^2 H + \pi r^2 h,$$

ou

$$V = \frac{P}{\delta} - \pi r^2 (H - h),$$

$h$ étant l'élévation observée précédemment dans le tube.

Si maintenant la loi générale du rapport du volume soulevé au contour est exacte, on devra avoir rigoureusement

$$\frac{V}{2\pi r} = \text{const.}$$

Mais pour les tubes très-étroits on a

$$V = \pi r^2 \left(h + \frac{r}{3}\right),$$

d'où

$$\frac{V}{2\pi r} = \frac{1}{2}\left(h + \frac{r}{3}\right) r = \frac{a^2}{2},$$

en désignant par $a^2$ la constante égale pour chaque liquide au produit de l'élévation corrigée dans un tube capillaire par le rayon de ce tube.

Donc enfin, si la loi générale et rigoureuse que nous venons de citer est exacte, on devra avoir :

$$\frac{\frac{P}{\delta} - \pi r^2 (H - h)}{\pi r} = a^2.$$

Or, voici les résultats de quelques expériences faites dans le but de vérifier cette égalité.

*Eau.*

| r. | h | H | P | $a^2$ | MOYENNES. |
|---|---|---|---|---|---|
| mm. | mm. | mm. | m. g. | mm. 2. | |
| 7,851 | 0,239 | 6,989 | 1,510 | 8,23 | 7,54 |
| | | 5,806 | 1,254 | 7,14 | |
| | | 2,643 | 644 | 7,26 | |
| 5,295 | 0,720 | 6,856 | 685 | 8,72 | 8,58 |
| | | 5,547 | 570 | 8,72 | |
| | | 8,793 | 755 | 8,30 | |
| 3,605 | 1,570 | 5,152 | 239 | 8,21 | 7,74 |
| | | 9,250 | 399 | 7,50 | |
| | | 7,703 | 335 | 7,50 | |
| | | *Alcool.* $\delta = 0,8268$. | | | |
| 7,851 | 0,100 | 7,990 | 1,350 | 5,03 | 4,99 |
| | | 6,082 | 890 | 4,95 | |
| 5,295 | 0,386 | 5,880 | 480 | 5,83 | 5,80 |
| | | 5,408 | 445 | 5,77 | |
| 3,605 | 0,985 | 8,141 | 298 | 6,00 | 6,14 |
| | | 9,677 | 352 | 6,27 | |
| | | *Naphte.* $\delta = 0,7908$. | | | |
| 7,851 | 0,128 | 6,903 | 947 | 4,78 | 4,85 |
| | | 3,511 | 614 | 4,91 | |
| 5,295 | 0,455 | 7,312 | 490 | 6,55 | 6,67 |
| | | 8,765 | 695 | 6,79 | |

Ces résultats sont loin d'être suffisamment précis; ils paraissent conduire à cette conclusion que la quantité $a^2$, au lieu d'être constante, diminue quand le rayon augmente. Pour l'eau cette conséquence est moins certaine; mais en revanche, il est impossible d'admettre que la constante $a^2$ est la même pour les tubes larges que pour les tubes capillaires; car pour ces derniers nous avons trouvé à peu près $a^2 = 15$; c'est-à-dire environ le double des valeurs que nous venons d'obtenir.

Il est évidemment impossible d'attribuer de semblables différences à des erreurs d'observation; d'ailleurs, on doit remarquer que les expériences de

Simon et les nôtres montrent l'abaissement continu de la constante $a^2$ relative à l'eau. En effet, des résultats obtenus par Simon, résultats plus nombreux que les nôtres, et qui concordent parfaitement avec eux (sauf en ce qui concerne les tubes très-capillaires, dont nous ne nous occupons pas en ce moment), nous pouvons déduire les valeurs suivantes de $hr$ et $(h + \frac{r}{3})r$ entre lesquelles la véritable valeur de $a^2$, savoir $\frac{V}{\pi r}$ doit être nécessairement comprise.

| $r$. | $h$. | $hr$. | $(h+\frac{r}{3})r$. |
|---|---|---|---|
| 0,625 | 24,00 | 15,00 | 15,13 |
| 1,1 | 12,80 | 14,08 | 14,49 |
| 1,7 | 7,70 | 13,09 | 14,11 |
| 1,8 | 7,02 | 12,64 | 13,72 |
| 2,7 | 3,65 | 9,86 | 12,30 |
| 3,33 | 2,41 | 8,03 | 11,73. |

Nous serions donc porté à conclure que les volumes d'eau soulevés dans les tubes de verre ne sont proportionnels aux contours de ces tubes que pour des valeurs du rayon inférieur à $1^{mm}$, et qu'au delà de cette valeur ils croissent moins vite que le contour.

Les expériences de Simon conduiraient même à admettre, que déjà pour les tubes de moins de $1^{mm}$ de rayon, le rapport du volume d'eau soulevé au contour décroît quand le rayon augmente. Nos premières observations présentaient la même conséquence; mais des expériences dont je vais indiquer les résultats font supposer que les inégalités offertes par les valeurs de $a^2$ relatives à l'eau, dans des limites où pour les autres liquides cette quantité est constante, peuvent être attribuées à des causes semblables à celles que nous avons vues agir si fortement sur la dépression du mercure. En effet, pour éliminer les causes perturbatrices principales, et ne pas avoir à nous préoccuper des effets possibles de différences de nature ou d'état de la surface des tubes, j'ai étiré, comme je l'avais déjà fait dans l'étude de la dépression du mercure, d'un même tube de cristal, cinq tubes minces de diamètres différents, et j'ai mesuré l'élévation de l'eau dans leur intérieur. Après cette mesure, je déterminais au microscope le rayon du tube au point même où

s'était trouvé le ménisque. Voici les données de ces observations et les valeurs de $a^2 = (h + \frac{r}{3})r$, que l'on en déduit.

*Température 15°.*

| Épaisseur des tubes. | Rayons des tubes. | Élévations observées. | | Moyennes. | Valeurs de $a^2$. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Ire expérience. | IIe expérience. | | |
| m. | mm. | mm. | mm. | mm. | mm. q. |
| 0,35 | 0,708 | 20,50 | 20,80 | 20,65 | 14,80 |
| 0,35 | 0,328 | 42,80 | 43,05 | 42,93 | 14,86 |
| 0,18 | 0,180 | 81,40 | 82,00 | 81,70 | 14,75 |
| 0,11 | 0,130 | 139,45 | 140,20 | 139,83 | 14,41 |
| » | 0,081 | 178,95 | 180,00 | 179,48 | 14,54 |

Nous voyons que ces valeurs de $a^2$ ne présentent entre elles que des différences très-faibles et irrégulières. Nous devons donc admettre que l'élévation de l'eau dans des tubes identiques de nature et d'état moléculaire, et différents seulement par les diamètres, est en raison inverse du rayon, au moins pour toutes les valeurs de celui-ci comprises entre $0^{mm},708$ et $0^{mm},081$. En d'autres termes, la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre est exacte pour l'eau, au moins pour toutes les valeurs du diamètre comprises entre $1^{mm},416$ et 0,162. Entre ces limites, la valeur constante du produit de l'élévation corrigée par le rayon est $14^{mm.2},69$ (moyenne des cinq valeurs précédentes de $a^2$) à la température 15°, ou, d'après la règle donnée par Simon et vérifiée par nos expériences, 15,23 à 0°.

Les expériences dont les résultats sont contenus dans le tableau de la page 158 permettent de supposer beaucoup plus éloignée, sinon indéfinie, la limite inférieure des valeurs du rayon pour lesquelles la loi en question est exacte. Les expériences de Simon montrent au contraire que la quantité $a^2$ prend des accroissements notables et continus à mesure que le rayon devient de plus en plus petit. J'ai déjà expliqué, en parlant de sa méthode, comment Simon a pu trouver des valeurs plus grandes pour les tubes très-étroits que pour les tubes d'un diamètre plussensible; mais il y a dans les résultats

rapportés dans le tableau de ses expériences une continuité remarquable, qui ferait repousser toute idée d'erreurs, naturellement irrégulières, et dont quelques-unes au moins devraient avoir lieu dans différents sens, s'il n'y avait aussi dans ce tableau une chose dont on ne peut s'empêcher d'être frappé: c'est le peu de précision des valeurs des diamètres. Ce n'est que pour les diamètres inférieurs à $0^{mm},05$ que Simon indique les $1000^{es}$ de millimètres. Or, il pouvait les évaluer avec une précision suffisante, puisqu'il a pu mesurer des diamètres de $0^{mm},007$ et $0^{mm},006$. Pour moi je déclare que j'ai eu beaucoup de peine à mesurer bien exactement un rayon de $0^{mm},018$, donc un diamètre de $0^{mm},036$, c'est-à-dire six fois plus fort que le plus petit de ceux mesurés par Simon. Cependant je ne crains pas de garantir, à $^1/_{1000}$ de millimètre près, l'exactitude des valeurs des rayons que j'ai rapportées.

De même Simon n'a pas indiqué les fractions de millimètre dans les valeurs des élévations supérieures à $76^{mm}$. Bien que ces indications n'eussent pas eu grande importance à cause de leur incertitude, cependant leur absence, jointe au peu de précision des valeurs des diamètres, nous conduit à supposer que les données présentées par Simon ne sont pas les véritables moyennes de *toutes* ses observations, mais des valeurs choisies de manière à présenter cette continuité d'accroissement des produits du rayon par la hauteur, que l'on remarque dans le tableau de Simon et que présentait probablement la majorité de ses résultats. En effet, comment expliquer autrement une aussi grande régularité d'accroissement d'un produit dont les deux facteurs ne sont déterminés qu'avec une faible approximation? Nous ne pouvons admettre que les diamètres indiqués en $100^{es}$ de millimètre soient précisément égaux à un certain nombre de $100^{es}$ de millimètre. Ainsi, pour le diamètre 0,05, supposons seulement une erreur en trop de 0,001, le produit 33,150 descendra à 32,49, et nous remonterons de deux tubes dans l'ordre du tableau; une erreur de 0,002, en réduisant à 31,84, nous reporte à cinq tubes en arrière. Or, nous pouvons admettre une erreur plus grande encore, car le chiffre 0,05 nous dit seulement que le diamètre est compris entre 0,045 et 0,055.

Pour résumer cette discussion, je conclus que la parfaite continuité des produits donnés par Simon ne peut, en présence du peu de précision de leurs

facteurs, s'expliquer que par un choix fait entre un grand nombre d'observations, sous l'influence d'une idée préconçue, et qu'il est permis de soupçonner des résultats présentant une régularité impossible.

Les résultats de nos premières expériences s'écartent moins de ceux de ces nouvelles recherches que ceux de Simon. En effet, nous en déduisons :

| | | |
|---|---|---|
| Pour $r$ = 1,025 | $h$ = 12,31 | $a^2$ = 13,17 |
| 0,621 | 23,23 | 14,56 |
| 0,0795 | 189,60 | 15,07. |

La différence des deux dernières valeurs de $a^2$ est $1/30$ de la dernière, et peut être attribuée à une différence de nature ou d'état du tube aussi bien qu'aux erreurs d'observation.

Nous pouvons donc admettre comme bien décisifs les résultats de nos dernières expériences, et en conclure que l'eau, aussi bien que les autres liquides de nos observations, satisfait à la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre, lorsque celui-ci ne dépasse pas $2^{mm}$.

Constatons enfin que les dernières expériences prouvent encore l'absence totale de l'influence de l'épaisseur des parois du tube. En effet, les cinq produits que nous avons obtenus en dernier lieu avec des tubes très-minces, ont la même valeur que ceux que l'on obtient avec des tubes d'une épaisseur sensible. Les résultats contraires que nous avons observés doivent donc être considérés comme exceptionnels, et dus à des causes purement accidentelles, ou à un état particulier de la surface du verre.

Mais un autre fait important paraît résulter de nos expériences, c'est l'influence de la nature du tube; nous voyons en effet, dans le tableau relatif à l'eau, que pour deux tubes de diamètre et d'épaisseur peu différents, mais l'un de verre, l'autre de cristal, les produits de l'élévation par le rayon diffèrent notablement : les rayons étant 0,270 pour le tube de verre et 0,227 pour le tube de cristal, les produits en question sont 10,90 pour le premier, et 13,89 pour le second; mais ce résultat étant le seul bien décisif de nos observations, nous ne pouvons admettre sans contrôle la conclusion importante qu'il semble fournir. C'est pourquoi j'ai mesuré l'élévation de l'eau dans un tube de verre de Bohême et dans quatre tubes minces tirés de

celui-ci. Les températures des deux observations étaient 13° et 17°. Nous pouvons rapporter leur moyenne à 15°, car des deux égalités

$$h = h_0 (1 - at) \quad h' = h_0 (1 - at'),$$

on déduit

$$\frac{h + h'}{2} = h_0 \left(1 - a \frac{t + t'}{2}\right).$$

Voici les résultats obtenus :

| Rayons. | Élévations observées. | | Moyennes à 15°. | Produits $\left(h + \frac{r}{3}\right)r$. |
|---|---|---|---|---|
| | Iʳᵉ expérience : 17°. | IIᵉ expérience : 13°. | | |
| 1,40 | 10,2 | 10,2 | 10,2 | 14,94 |
| 0,281 | 52,2 | 53,2 | 52,7 | 14,82 |
| 0,267 | 54,5 | 55,9 | 55,2 | 14,75 |
| 0,112 | 130,4 | 131,8 | 131,1 | 14,73 |
| 9,109 | 132,2 | 133,8 | 133,0 | 14,47 |

Nous concluons de ces expériences que l'élévation de l'eau, dans les tubes de verre de Bohême, est la même que dans les tubes de cristal. En effet, la moyenne des produits précédents est 14,74, nombre fort peu différent de celui que nous avons trouvé, à la même température, pour les tubes en cristal, savoir 14,66.

Si nous considérons les données de nos tableaux, relatives au tube de rayon $0^{mm},0182$, nous reconnaîtrons sur-le-champ que le produit $\left(h + \frac{r}{3}\right)r$ n'est égal aux précédents que pour l'eau seulement. Pour l'alcool, l'éther, le chloroforme surtout, les valeurs de ce produit sont très-supérieures aux valeurs relatives à des tubes moins capillaires. Mais il est permis de croire à une erreur provenant soit d'une fausse mesure du diamètre de ce tube, soit de l'état de sa surface intérieure; surtout si l'on remarque, dans le tableau relatif au chloroforme, le résultat obtenu avec un tube de $0^{mm},0375$ de rayon, c'est-à-dire double seulement de celui du tube qui nous occupe, résultat qui s'accorde parfaitement avec ceux qui se rapportent à des rayons

atteignant jusqu'à $1^{mm},505$. Il répugnerait d'admettre qu'entre ces deux valeurs de rayon $0^{mm},0375$ et $0^{mm},0182$, les lois physiques du phénomène de l'élévation des liquides dans les tubes capillaires éprouvassent de soudaines et considérables perturbations.

Cependant je ne puis écarter mes doutes sur ce sujet, en présence d'autres résultats qu'il me reste à rapporter. Désirant avoir une donnée nouvelle sur l'élévation dans les tubes très-étroits, et ne pouvant mesurer exactement les diamètres très-petits, j'ai recouru à un procédé indirect, savoir la comparaison des hauteurs à laquelle des liquides différents s'élèveraient dans un même tube. Pour mesurer ces hauteurs, j'ai dû employer la méthode manométrique de Simon, qui m'avait du reste donné des résultats concordants pour l'éther, avec un tube de $0^{mm},0182$ (*voir* pp. 137 et 161). Le liquide du manomètre était du mercure; pour avoir les hauteurs capillaires cherchées, il suffisait de multiplier les colonnes manométriques soulevées par le rapport de la densité du mercure à celle du liquide observé; la profondeur de 1 ou $2^{mm}$ du bas du tube au-dessous du niveau était tout à fait négligeable.

Pour comparer les résultats obtenus, nous supposerons que l'eau, suivant exactement la loi du rapport inverse de l'élévation au diamètre, le produit $hr$ conserve, pour le petit tube observé, la valeur $15^{mm.2}$ obtenue avec des tubes moins capillaires. En divisant cette valeur par la hauteur capillaire mesurée, nous aurons une valeur hypothétique du rayon (cette valeur sera ici environ $0^{mm},007$), par laquelle nous multiplions ensuite les hauteurs des autres liquides, pour nous assurer si les produits ainsi obtenus concordent également pour ces liquides avec ceux trouvés pour des tubes moins capillaires. En d'autres termes, nous multiplions le produit $hr = 15^{mm.2}$, admis pour l'eau, par le rapport des hauteurs observées de chacun des liquides à la hauteur observée de l'eau, et nous aurons ainsi les valeurs que doit avoir ce produit $hr$ pour ce liquide, si sa valeur pour l'eau est réellement $15^{mm.2}$. Si ce calcul nous donne pour ces autres liquides des valeurs concordantes avec celles qui se rapportent à des tubes moins étroits, ce sera une forte présomption en faveur de l'exactitude de la loi même pour des tubes très-étroits. Or, il n'en est pas ainsi, car nous avons obtenu les résultats suivants :

| Température 13 à 15°. | Colonnes manométriques de mercure. | | | Hauteur capillaire moyenne. | Produits $hr$. |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ire expérience. | IIe expérience. | IIIe expérience. | | |
| | mm. | mm. | mm. | mm. | |
| Eau . . . 13°. | 158,0 | 160,0 | 159,0 | 2147 | 15,00 (supposé.) |
| Alcool. . . 15°. | 58,6 | 57,7 | 58,15 | 950 | 6,63 |
| Éther . . . 15°. | 46,1 | 45,5 | 45,8 | 825 | 5,76 |
| Chloroforme. 15°. | 115,2 | 115,4 | 115,3 | 1040 | 7,27 |

Si ces résultats sont exacts, nous sommes forcés de conclure que la loi du rapport inverse des hauteurs aux rayons n'est pas vraie, pour tous les liquides, pour des rayons très-petits. Car, si nous admettons son exactitude pour l'eau, et par suite la valeur supposée $hr = 15$, nous devrons aussi admettre les valeurs 6,63 pour l'alcool, 5,76 pour l'éther, 7,27 pour le chloroforme, valeurs qui ne s'accordent pas avec les produits que nous ont donnés ces liquides pour des tubes moins capillaires, mais qui, chose remarquable, s'accordent très-bien avec celles que nous a données pour l'alcool et l'éther le tube de rayon $0^{mm},0182$. Quant au produit relatif au chloroforme, son accroissement est tellement rapide qu'il me paraît peu naturel, et jette même des doutes sur les autres chiffres. Ces doutes ne pourraient être levés que par des expériences directes, faites avec des moyens de précision suffisants. C'est pourquoi je n'insisterai pas sur les conséquences de ces dernières observations.

Je m'abstiendrai également de formuler une conclusion bien nette sur l'élévation des liquides dans les tubes d'un diamètre notable. Les inégalités constatées avec l'alcool et l'huile de naphte ne sont pas assez certaines pour que l'on puisse en rien conclure. Celles que nous a présentées l'eau sont beaucoup plus fortes, et montrent une perturbation complète dans la loi du phénomène, perturbation que nous verrons se reproduire quand nous observerons l'élévation entre deux glaces parallèles. Mais ce seul fait, que l'eau seule s'écarte à ce point de la loi théorique, nous permet d'attribuer cette anomalie à des propriétés particulières de ce liquide, dont l'action devient très-puissante dès que l'angle du contact de la surface et du verre peut prendre des valeurs différentes de 0°. Il n'en est pas de même des autres

liquides qui, s'étendant facilement sur le verre, tendent toujours à former avec sa surface un angle nul. C'est ainsi, je crois, qu'il faut expliquer les anomalies continuelles que présentent les phénomènes capillaires observés avec l'eau.

Nous nous bornerons donc, en résumé, pour rester dans le domaine des faits bien acquis, à poser cette conclusion :

Les liquides capables de mouiller le verre suivent la loi du rapport inverse de l'élévation au rayon du tube, pour toutes les valeurs du rayon comprises entre $0^{mm},05$, et la valeur pour laquelle la hauteur du ménisque cesse d'être sensiblement égale au rayon.

### *Élévation d'une colonne liquide interrompue par des bulles d'air.*

Nous avons précédemment (p. 114) rapporté l'énoncé d'un théorème posé par M. Bertrand, et en vertu duquel le volume d'une colonne liquide soulevée ou déprimée dans un tube capillaire et interrompue par des bulles d'air, doit être indépendant du nombre et du volume de ces bulles, et par conséquent égal au volume d'une colonne continue soulevée ou déprimée dans ce tube. Nous avons vu que ce théorème, appliqué à la dépression du mercure, ne se vérifiait nullement. Nous allons examiner maintenant s'il s'applique à l'élévation d'autres liquides. J'ai choisi pour ces observations quatre liquides capables de présenter dans ces phénomènes des différences notables : ce sont l'eau, l'acide sulfurique concentré, l'éther sulfurique et l'huile d'orange.

Dans un tube mouillé de $0^{mm},096$ de rayon, l'eau s'est élevée de $154^{mm},00$. Une petite bulle d'air de $0^{mm},25$ de hauteur ayant été introduite dans la colonne, la colonne soulevée s'est composée d'une colonne continue de $179^{mm},05$ surmontée de cette bulle et d'une petite colonne d'eau de $5^{mm},85$; la hauteur totale soulevée était ainsi 184,90. Le théorème ne se vérifie donc pas pour l'eau.

Dans le même tube, l'acide sulfurique s'est élevé de $76^{mm},00$. Deux bulles d'air ayant été introduites, la composition de la colonne a été la suivante :

| Colonnes liquides soulevées. | Bulles d'air. |
|---|---|
| 2.75 | |
| | 35.80 |
| 3.55 | |
| | 43.45 |
| 204.90 | |

La hauteur soulevée totale était donc de $211^{mm},20$, c'est-à-dire presque triple de l'élévation d'une colonne continue.

J'ai observé le même phénomène avec l'éther, dans deux tubes différents : le premier avait $0^{mm},2884$ de rayon, l'éther s'y élevait de $17^{mm},75$. Après l'introduction de deux bulles d'air, la colonne était ainsi formée :

| Colonnes liquides soulevées. | Bulles d'air. |
|---|---|
| 3.30 | |
| | 15.90 |
| 5.45 | |
| | 84.75 |
| 9.25 | |

La hauteur du liquide soulevé était donc $18^{mm},00$; mais nous devons, pour que cette hauteur représente le volume soulevé, lui faire subir une correction, fort inutile dans les expériences précédentes, et qui consiste à ajouter deux fois le tiers du rayon pour chaque bulle d'air, et une fois cette quantité pour le haut de la colonne. Ici nous aurons donc à ajouter $\frac{5 \times 0,2884}{3}$ ou 0,46, ce qui donne la hauteur corrigée $18^{mm},46$. Elle diffère de $0^{mm},71$ ou de $\frac{1}{26}$ de celle de la colonne continue $17^{mm},75$.

Dans un tube de $0^{mm},0578$ de rayon, l'éther s'élevait de $90^{mm},70$ au-dessus du niveau. J'observai ensuite deux colonnes interrompues par des bulles d'air. Dans la première observation, la composition de la colonne était la suivante :

| Colonnes liquides soulevées. | Bulles d'air. |
|---|---|
| 11.05 | |
| | 0.40 |
| 2.40 | |
| | 18.50 |
| 14.15 | |
| | 16.50 |
| 65.70 | |

Ce qui donne pour la hauteur totale observée $93^{mm},30$, et pour cette hauteur corrigée $93^{mm},43$.

Dans la seconde observation on avait :

| Colonnes liquides soulevées. | Bulles d'air. |
|---|---|
| 1.70 | |
| | 3.95 |
| 0.35 | |
| | 3.40 |
| 0.35 | |
| | 2.70 |
| 0.30 | |
| | 5.15 |
| 0.55 | |
| | 2.05 |
| 0.40 | |
| | 3.85 |
| 0.50 | |
| | 1.55 |
| 0.20 | |
| | 8,65 |
| 0.75 | |
| | 16.75 |
| 1.05 | |
| | 12.40 |
| 0.85 | |
| | 14.15 |
| 93.05 | |

La somme des hauteurs liquides est $100^{mm},15$; il faut y ajouter $\frac{23 \times 0,0578}{3}$ ou $0^{mm},44$, ce qui donne $100^{mm},59$. Nous constatons entre les deux colonnes précédentes et la colonne continue de longueur corrigée 90.72 les différences $93.43 - 90.72 = 2.71$, ou environ $\frac{1}{33}$ et $100.44 - 90.72 = 9.72$, ou à peu près $\frac{1}{9}$. Il paraît donc admissible que le volume soulevé d'une colonne d'éther sulfurique interrompue par des bulles d'air croît avec le nombre et le volume de ces bulles.

J'ai aussi observé l'huile d'orange dans deux tubes différents, dont l'un était le premier des deux tubes précédents, celui dont le rayon est 0,2884. Ce liquide s'y élevait à une hauteur de $23^{mm},35$. Deux expériences m'ont donné :

| Iʳᵉ EXPÉRIENCE. | | IIᵉ EXPÉRIENCE. | |
|---|---|---|---|
| Colonnes liquides. | Bulles d'air. | Colonnes liquides. | Bulles d'air. |
| 14.10 | | 2.00 | |
| | 52.60 | | 1.35 |
| 5.95 | | 0.30 | |
| | 41.90 | | 0.65 |
| 3.10 | | 0.40 | |
| | | | 1.35 |
| | | 1.35 | |
| | | | 48.30 |
| | | 13.10 | |
| | | | 19.10 |
| | | 14.05 | |
| | | | 81.55 |
| | | 2.90 | |

La première expérience donne comme hauteur corrigée 23.71, et la seconde 25,35. Ces valeurs diffèrent de la hauteur continue corrigée 23,45 de $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{12}$. Cette dernière différence est seule sensible.

Dans un tube de $0^{mm},0447$ de rayon, l'huile d'orange s'est élevée, sans que le tube fût mouillé, à $149^{mm},70$ et, après avoir été soulevée plus haut, elle est revenue à une élévation de $149^{mm},95$. Nous admettrons comme élévation dans ce tube la moyenne 149,83. J'ai ensuite observé dans ce tube une colonne divisée ainsi formée :

| Colonnes liquides. | Bulles d'air. |
|---|---|
| 26.45. | |
| | 5.75 |
| 16.80 | |
| | 4.30 |
| 5.70 | |
| | 0.15 |
| 2.25 | |
| | 2.10 |
| 0.20 | |
| | 0.15 |
| 0.25 | |
| | 2.10 |
| 4.50 | |
| | 4.60 |
| 2.45 | |
| | 3.15 |
| 90.25 | |

La somme des hauteurs des colonnes liquides est 148.85. En y ajoutant $\frac{17 \times 0,0488}{5}$ on a 149,09, ce qui ne diffère de 149.83 que de $\frac{1}{200}$.

Il résulte de ces expériences que le théorème de M. Bertrand peut être considéré comme vrai pour l'huile d'orange, à peu près exact pour l'éther sulfurique et tout à fait inadmissible pour l'eau et l'acide sulfurique.

On constate avec ce dernier liquide un phénomène curieux, dont l'étude me paraît se rattacher à celle que nous venons de faire : le tube employé dans l'expérience précédente sur ce liquide n'était autre que le tube soudé à un manomètre dont je m'étais servi pour l'examen du procédé de Simon. Voulant faire une nouvelle expérience relative à cet examen, je versai dans le manomètre une certaine quantité d'acide sulfurique, afin d'expulser le liquide resté dans le tube et de faire naître le dégagement de bulles d'air, principe du procédé ; mais mon attente fut trompée. A mesure que la colonne liquide descendait dans le tube, il se formait au-dessus d'elle une série de petites colonnes liquides sensiblement égales entre elles, et séparées les unes des autres par des distances à très-peu près égales. Ces petites colonnes descendaient lentement, chassant devant elles le liquide resté dans le tube, et toujours suivies de colonnes semblables. J'ai observé ce phénomène pendant plus d'un mois, temps au bout duquel je fus forcé de déplacer mon appareil. De jour en jour la distance de deux petites colonnes consécutives augmentait, mais leur longueur n'a subi qu'une seule variation : le jour même de leur formation, cette longueur était $1^{mm},9$ (les valeurs extrêmes étaient 1,65 et 2,20), le lendemain, elle était de $1^{mm},30$, et depuis elle n'a plus varié. La distance des bulles a varié de $5^{mm}$ à $23^{mm},5$. Pendant tout le temps que ce phénomène s'est produit, la colonne manométrique, diminuée de la hauteur du niveau au-dessus de l'extrémité du tube, a toujours mesuré exactement l'élévation $76^{mm},0$ qui avait lieu dans ce tube, et il me paraît que l'on voit dans ce fait une vérification remarquable du principe du théorème précédent, principe également posé par M. Bertrand, et qui consiste en ce qu'une colonne liquide suspendue dans un tube vertical n'est soumise à d'autres forces qu'à son poids (abstraction faite du frottement). En effet, la colonne manométrique ayant précisément la même hauteur qu'elle aurait eue si le tube eût été entièrement vide de liquide, nous devons admettre que

les bulles liquides et gazeuses renfermées dans le tube ne modifiaient pas l'équilibre et ne se mouvaient que sous l'action de la pesanteur. Par suite, il est présumable que si l'on observait une colonne divisée d'acide sulfurique, plusieurs mois après sa formation, on reconnaîtrait pour ce liquide l'exactitude du théorème dont nous nous sommes occupés.

Il me paraît facile d'expliquer cette formation pendant fort longtemps de bulles liquides sans cesse renaissantes et se succédant dans un ordre remarquable : elle se fait probablement aux dépens d'une couche restée adhérente aux parois de la partie du manomètre soudée au tube capillaire, et qui ne peut pas s'écouler assez vite par ce tube. Les portions détachées de cette couche s'amassent dans le haut du tube capillaire, et y forment une petite bulle qui se met en mouvement aussitôt que son poids lui permet de vaincre le frottement; aussitôt une autre commence à se former, qui se mettra en mouvement quand elle aura acquis le même poids, et ainsi de suite. On comprend ainsi l'égalité de longueur et de distance de deux bulles; on s'explique aussi l'augmentation de cette distance, résultant de ce que la couche génératrice devient de plus en plus faible, de sorte que les bulles liquides n'acquièrent pas aussitôt le volume nécessaire pour entrer en mouvement. Il est probable aussi que l'excès de longueur observé le premier jour provient de ce que le tube n'était pas alors parfaitement mouillé dans toute sa longueur, de sorte que le frottement étant plus considérable, les bulles devaient, avant de se mouvoir, acquérir plus de poids.

### *Élévation de l'eau dans les tubes métalliques.*

J'ai fait un assez grand nombre d'expériences sur l'élévation de l'eau dans les tubes métalliques. J'ai essayé d'abord le procédé de Simon, qui paraît très-commode pour des observations de ce genre : cependant il ne m'a donné aucun résultat sérieux : appliqué à l'observation de l'élévation dans des tubes d'étain, de cuivre et d'argent, dont les rayons variaient de $0^{mm},258$ à $0^{mm},791$, il m'a fourni des nombres si différents d'une expérience à l'autre, que j'ai été réduit à tirer comme seule conclusion de ces observa-

tions, une nouvelle preuve du peu de précision que peut donner la mesure manométrique appliquée à des tubes qui ne sont pas très-capillaires.

J'ai essayé ensuite un autre procédé fondé sur l'observation de différents niveaux de l'eau dans la branche de verre d'un siphon formé d'un tube de verre recourbé et mastiqué à un tube de métal. Ce procédé ne m'a pas non plus donné de résultats constants. La véritable difficulté de ces expériences réside dans l'ignorance absolue où l'on est de l'état de la surface intérieure du tube. Nous trouverons d'ailleurs dans l'observation de l'élévation des liquides entre des plaques parallèles, un moyen beaucoup plus sûr de résoudre la question de l'influence de la nature du solide en contact avec le liquide.

### *Comparaison des élévations dans les tubes capillaires d'un liquide et de ses solutions.*

Je me suis proposé, dans cette série d'observations, de déterminer quelle influence exerçait sur la cohésion d'un liquide une substance solide en dissolution dans ce liquide. A cet effet, j'ai déterminé par la méthode de Simon les colonnes d'eau capables de faire équilibre au poids de liquide que la capillarité tend à soulever dans le tube, en un mot, de mesurer la cohésion du liquide. Car l'on doit bien remarquer que la cohésion ne peut être mesurée par la hauteur soulevée, mais par le produit de cette hauteur par la densité, c'est-à-dire par le poids soulevé. Or, c'est ce que donne immédiatement la mesure manométrique, lorsque la colonne du manomètre est de l'eau, et que l'on en retranche la profondeur du tube au-dessous du niveau multipliée par la densité du liquide observé.

Je me borne à rapporter, dans le tableau suivant, les résultats moyens de mes observations, les données de celles-ci différant tellement peu les unes des autres, qu'il serait superflu de les présenter en détail :

| | Densité. | Poids soulevé. |
|---|---|---|
| Rayon du tube = 0,180. | — | — |
| Eau . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1.000 | 85.4 |
| Sol. saturée de sulfate ferreux . . . . . . . . . . . | | 87.9 |
| » » » étendue de ½ volume d'eau . . . . . | | 87.6 |
| » » » » 2 ½ » » . . . . . | | 86.3 |

| | Densité. | Poids soulevé. |
|---|---|---|
| Alcool (11°,8) | 0.827 | 28.3 |
| » saturé de chlorure de calcium | 0.929 | 30.4 |
| » » étendu de 1 vol. alcool. | 0.878 | 29.6 |
| » » » 2 » | 0.861 | 28.4 |
| » » » 3 » | 0.840 | 27.0 |
| Alcool | 0.823 | 26.6 |
| » saturé de potasse | 0.906 | 27.6 |
| » » d'acide gallique | 0.823 | 27.0 |
| Éther étendu de $^1/_{10}$ d'alcool en volume | 0.734 | 19.0 |
| Collodion fait avec cet éther. | 0.774 | 19.9 |

Rayon du tube = 0,143.

| | | |
|---|---|---|
| Eau | 1.000 | 101.1 |
| » saturée de chlorure de calcium. | 1.260 | 113.5 |
| » » » étendue de 1 vol. d'eau. | 1.130 | 107.7 |
| » » » » de 2 » | 1.087 | 106.0 |
| » » » » de 3 » | 1.065 | 104.7 |

Rayon du tube 0,093.

| | | |
|---|---|---|
| Alcool | 0.823 | 51.1 |
| » saturé de potasse. | 0.906 | 54.9 |
| » » d'acide gallique | 0.833 | 51.2 |

Rayon du tube 0,042.

| | | |
|---|---|---|
| Alcool | 0.823 | 118.9 |
| » saturé de potasse | 0.906 | 125.6 |

Toutes ces expériences, excepté une seule, s'accordent à montrer que la cohésion d'un liquide est augmentée par la dissolution d'une substance solide dans ce liquide, et d'autant plus fortement que cette solution est plus concentrée. La seule expérience qui tend à mettre en doute cette conclusion est la première de celles qui concernent l'alcool; encore peut-on suspecter fortement le chiffre relatif à l'alcool même; car dans l'expérience suivante, pour un alcool de densité à peu près égale, nous trouvons dans les mêmes conditions 26.6 au lieu de 28.3.

On ne peut guère espérer pouvoir tirer des résultats précédents une rela-

tion entre la cohésion et la densité d'une solution; cependant nos expériences sur les solutions de chlorure de calcium semblent en fournir une remarquable. En effet, si nous comparons d'une part le rapport des cohésions de ces solutions à celles de l'eau, de l'autre les densités de ces solutions, nous trouvons que les carrés de ces rapports diffèrent peu des densités. Voici ces nombres, la cohésion de l'eau étant supposée égale à 1.

| | Carrés des cohésion. | Densités. | Différences. |
|---|---|---|---|
| | — | — | — |
| Eau . . . . . . . . . . . . | 1,000 | 1,000 | |
| Sol. saturée de la cl. . . . . . | 1,262 | 1,260 | $^1/_{630}$ |
| » plus 1 vol. d'eau. . . . . | 1,136 | 1,130 | $^1/_{190}$ |
| » » 2 » . . . . | 1,099 | 1,087 | $^1/_{92}$ |
| » » 3 » . . . . | 1,074 | 1,065 | $^1/_{120}$ |

Il résulterait de cette comparaison que les cohésions de différentes solutions d'une même substance solide dans un liquide, sont proportionnelles aux racines carrées des densités de ces solutions.

Cette loi n'est point vérifiée par nos autres observations; mais on doit remarquer que la série que nous venons de considérer est la seule qui nous fournisse des résultats à la fois bien certains et bien tranchés, des nombres assez différents les uns des autres pour que des erreurs faibles ne puissent pas influer fortement sur les résultats de leur comparaison. Ainsi, si nous comparons la cohésion de la solution alcoolique saturée de potasse avec la cohésion de l'alcool, nos trois expériences nous donnent pour les carrés du rapport de ces cohésions

1.153, 1.079, 1.117,

nombres dont la moyenne est 1.116. Eh bien, le rapport des densités de cette solution et de l'alcool est 1.100, qui ne diffère que de $^1/_{70}$ de cette moyenne, tandis que la différence s'élève à $^1/_{20}$, si nous comparons les nombres 1.153 et 1.100.

### *Équilibre de deux liquides superposés dans un tube capillaire.*

La loi théorique de cet équilibre peut s'énoncer ainsi [1] : Le poids total de deux liquides, soulevé dans un tube capillaire, est le même que si ce tube ne renfermait que le liquide inférieur. Ainsi appelons $h_1$ la hauteur du ménisque du liquide inférieur au-dessous du niveau extérieur, $d_1$ la densité de ce liquide, $h_2$ la hauteur de la colonne superposée du second liquide, $d_2$ la densité, et $H_1$ la hauteur à laquelle le liquide inférieur s'élèverait dans le tube s'il s'y trouvait seul, on devra avoir :

$$h_1 d_1 + h_2 d_2 = H_1 d_1$$

ou

$$h_1 + h_2 \frac{d_2}{d_1} = H_1.$$

C'est cette égalité que je me suis proposé de vérifier. J'ai, à cet effet, mesuré les hauteurs $h_1$, $h_2$, en employant successivement de l'eau et de l'huile de naphte, de l'acide sulfurique et de l'huile de naphte, du chloroforme et de l'eau.

Les résultats moyens de ces expériences sont rapportés dans les tableaux suivants. $H_2$ y représente l'élévation qu'atteindrait le liquide supérieur s'il se trouvait seul dans le tube.

| Rayons des tubes. | $h_1 + h_2 \frac{d_2}{d_1}$ | $H_1$ | $H_2$ |
|---|---|---|---|
| | *Eau de naphte.* | | |
| | $d_1 = 1{,}000$ | $d_2 = 0{,}791$ | |
| 0,955 | 6,7 | 15.8 | 6.6 |
| 0,615 | 10,9 | 24.5 | 10.6 |
| 0,343 | 19,4 | 44.0 | 19.2 |
| 0,204 | 34,2 | 73.9 | 32.5 |
| 0,160 | 42,7 | 94.1 | 43.5 |

[1] Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, § 72.

| Rayons des tubes. | $h_1 + h_2 \frac{d_2}{d_1}$ | $H_1$ | $H_2$ |
|---|---|---|---|
| | *Acide sulfurique et naphte.* | | |
| | $d_1 = 1{,}831$ | $d_2 = 0{,}791$ | |
| 0,955 | 2,6 | 6,6 | 6,6 |
| 0,613 | 4,6 | 10,3 | 10,6 |
| 0,343 | 7,7 | 18,9 | 19,2 |
| 0,204 | 15,1 | 31,9 | 32,5 |
| 0,160 | 17,5 | 41,2 | 43,5 |
| 0,094 | 33,5 | 59,9 | 69,0 |
| | *Chloroforme et eau.* | | |
| | $d_1 = 1{,}497$ | $d_2 = 1{,}00$ | |
| 0,343 | 29,6 | 33,3 | 44,0 |
| 0,094 | 59,3 | 62,4 | 160,3 |

Ces résultats sont absolument contraires à la formule théorique, et cela ne doit point surprendre dans un phénomène où se produisent nécessairement des actions mutuelles dont la théorie ne peut pas tenir compte. Les expériences relatives à l'eau et au chloroforme sont les seules qui prêtent à la formule théorique un faible appui.

Mais, ce qu'il y a de bien remarquable, c'est que si l'on change de place les quantités qui entrent dans la formule théorique, tout en conservant la forme de celle-ci, on arrive à une relation bien évidente entre les données de l'expérience, mais tout autre que celle que la théorie indique.

Ainsi la seule inspection du tableau précédent prouve que, pour l'eau et le naphte, on a avec une remarquable exactitude :

$$h_1 + h_2 \frac{d_2}{d_1} = H_2.$$

Avec l'acide sulfurique et le naphte cette relation ne se présente pas, mais si, au moyen des données des tableaux insérés à la fin de ce mémoire, on calcule les sommes :

$$h_2 + \frac{h_1 d_1}{d_2}$$

on trouve les nombres

7.0 — 11.1 — 17.9 — 35.0 — 40.7 — 77.8,

qui s'éloignent peu, sauf le dernier, des valeurs de $H_1$ et surtout de $H_2$. Ainsi l'on a pour ces deux liquides

$$h_2 + h_1 \frac{d_1}{d_2} = H_1 \text{ ou } H_2,$$

relation autre encore que la précédente.

Je crois que tout ce que nous pouvons conclure pour le moment de ces résultats, c'est que l'équilibre de deux liquides superposés est un phénomène très-complexe, dans lequel les actions mutuelles des deux liquides jouent généralement le principal rôle, de sorte que l'expression analytique de la loi du phénomène doit elle-même changer avec la nature des liquides mis en présence.

### *Influence de la température sur l'élévation des liquides dans les tubes capillaires.*

La théorie indique que l'élévation d'un liquide dans un tube capillaire varie avec la température dans le même rapport que la densité, en d'autres termes, que le rapport de l'élévation à la densité est le même à toutes les températures. Des expériences de Gay-Lussac paraissent avoir vérifié ce principe; mais je ne pense pas que leurs résultats numériques aient été publiés. Les travaux les plus importants que l'on possède sur cette question sont ceux de Simon [1], de Brünner [2], de Frankenheim [3], et de Wolf [4].

Les recherches de Simon ne concernent que l'eau; et il règne malheu-

[1] Simon, *Recherches sur la capillarité.* ANN. DE CH. ET DE PHYS., 3me série, t. XXXII.

[2] Brünner, *Recherches sur la cohésion des liquides.* POGG. ANN., t. LXX, p. 481.

[3] Frankenheim, *Cohäsions Lehre*, p. 85, et *Recherches sur la dépendance existant entre quelques phénomènes de cohésion et la température.* POGG. ANN., t. LXXII, p. 177.

[4] C. Wolf, *Influence de la température sur les phénomènes qui se passent dans les tubes capillaires*, ANN. DE CHIM. ET DE PHYS., 3e série, t. XLIX.

reusement beaucoup d'incertitude non-seulement sur la valeur de ses résultats, mais encore sur la manière dont il les a obtenus ; il dit seulement qu'il chauffait au moyen d'une lampe à esprit-de-vin la capsule contenant l'eau dans laquelle plongeait le tube. Il est clair que de cette façon la mesure au cathétomètre ne pouvait pas donner de résultats sérieux ; car il serait impossible d'admettre que la température dans le tube fût la même que dans la capsule. La température du ménisque serait donc tout à fait inconnue. Nous devons supposer qu'ici encore Simon a employé la méthode qui lui est propre, et que j'ai appelée mesure manométrique de la capillarité ; mais, dans cette hypothèse, une autre incertitude se présente : les colonnes manométriques étaient-elles à la température ordinaire ou à la température de la capsule? Cette dernière supposition est peu probable, car il eût fallu un appareil spécial pour établir cette égalité de température, et Simon n'aurait pu se dispenser de le décrire. Donc, nous sommes conduit à penser que Simon s'est borné à plonger l'extrémité du tube capillaire dans le liquide chauffé, tout en laissant celui du manomètre à la température extérieure. Dès lors les colonnes manométriques ne peuvent représenter les ascensions capillaires, à moins d'être ramenées par le calcul à ce qu'elles seraient à la température de l'eau de la capsule. Simon ne dit point avoir fait ce calcul, et, s'il l'a fait, ce ne peut être que d'une manière inexacte ; car ce physicien commet une singulière erreur en concluant la proportionnalité de l'ascension à la densité, de ce que l'ascension décroît proportionnellement à la température : c'est supposer que la densité décroît aussi proportionnellement à la température ; or, il n'en est nullement ainsi, et si Simon a corrigé ses colonnes manométriques en s'appuyant sur cette proportionnalité, ces corrections ont dû produire de fortes erreurs.

Quoi qu'il en soit, il résulte au moins des expériences de Simon une démonstration bien certaine de cette loi, que la différence d'ascension à des températures différentes, est proportionnellement la même pour des tubes de divers diamètres.

Les recherches de Brünner paraissent faites avec soin ; mais sa méthode d'observation me paraît sujette à deux causes d'erreurs importantes. Le tube capillaire est placé dans l'intérieur d'un cylindre de verre contenant le liquide

à observer, et plongé dans un bain d'huile. La hauteur capillaire se mesure au cathétomètre. Or, pendant l'expérience, il se fait une évaporation notable de liquide, qui fait varier sensiblement les niveaux à l'intérieur et à l'extérieur du tube capillaire; et comme ces deux niveaux ne sont pas pris simultanément, on obtient une hauteur capillaire trop grande ou trop petite selon que l'on détermine d'abord le niveau intérieur ou le niveau extérieur. En second lieu, avec cet appareil il est difficile de répondre qu'au moment de l'observation la température du liquide, dans l'intérieur du tube, est exactement la même que celle du bain d'huile; car, pour que cette égalité de température s'établisse, il faut que la chaleur du bain d'huile traverse les parois du cylindre de verre, la masse d'air qu'il contient et les parois du tube capillaire. Il y a donc là une grande source d'incertitude.

M. Brünner conclut de ses observations que la loi établissant la proportionnalité de la hauteur capillaire à la densité n'est pas exacte; particulièrement en ce qui concerne l'eau, l'élévation de température produit une diminution beaucoup plus rapide de la hauteur capillaire que de la densité. Comme Simon, M. Brünner conclut à la proportionnalité du décroissement de hauteur à la température. Ainsi ses observations bornées à l'eau, l'éther et l'huile d'olive, ont donné pour la valeur de la hauteur $h_t$ à $t^o$, dans un tube de $1^{mm}$ de rayon, les valeurs :

| | |
|---|---|
| Pour l'eau . . . . . . . . | $h_t = 15{,}332 - 0{,}0286\ t$ |
| Pour l'éther . . . . . . . | $h_t = 5{,}354 - 0{,}0280\ t$ |
| Pour l'huile d'olive . . . . . | $h_t = 7{,}464 - 0{,}0105\ t.$ |

On peut déduire de ces formules les rapports $\frac{h_t - h_0}{h_0 t}$ qui exprime la fraction dont décroît la hauteur de 0° pour une augmentation de température de 1°. Ce rapport est :

| | |
|---|---|
| Pour l'eau. . . . . . . . . . . . . | 0,0019 |
| » l'éther . . . . . . . . . . . . | 0,0052 |
| » l'huile d'olive. . . . . . . . . | 0,0014. |

D'après Simon, ce rapport pour l'eau est : 0,0024.

Les premières observations de M. Frankenheim, rapportées dans son *Traité*

*de la cohésion*, n'ont, comme leur auteur le reconnait lui-même, que peu de valeur; mais les recherches qu'il a publiées en 1841 avec M. Sondhauss, dans le journal d'Erdmann, et surtout celles que M. Frankenheim a publiées seul, en 1847, dans les *Annales de Poggendorf*, sont très-importantes et par leur nombre et par les soins que l'auteur y a apportés. Malheureusement encore une grave cause d'erreur et d'incertitude pèse sur les résultats de ce grand travail. En effet, l'appareil de M. Frankenheim consistait essentiellement en un siphon ou tube en U, dont une des branches était un tube capillaire, et qui était plongé dans un bain d'eau dont on maintenait la température constante. Ce procédé est déjà plus convenable que celui de Brünner, on peut être bien plus certain de l'égalité de température du bain et du liquide intérieur du tube, il ne reste que l'incertitude due à l'évaporation; pour la diminuer, M. Frankenheim fermait imparfaitement la branche large du tube U au moyen d'un bouchon. Or, de cette disposition, en apparence peu importante, peuvent provenir des erreurs très-fortes. En effet, il peut arriver, avec des liquides très-volatils, que le passage existant entre les parois du tube et celles du bouchon soit insuffisant pour laisser échapper toute la vapeur qui se forme et qui, à la température du bain, peut avoir une tension plus forte que celle de l'air. Alors la hauteur capillaire se trouve fortement augmentée : c'est ce que j'ai constaté avec l'éther. A mesure que la température s'élève, l'influence de cette cause d'erreur augmente, d'où il résulte en dernière analyse que la décroissance des hauteurs capillaires observées est notablement plus faible que celle que l'on devrait trouver. D'autres fois, au contraire, quand le bouchon laissera échapper une quantité de vapeur suffisante, on pourra observer des hauteurs trop petites : en effet, les vapeurs pouvant s'échapper librement du tube capillaire, l'évaporation pourra y être plus rapide que dans la branche large, et si l'on commence par prendre le niveau dans celle-ci, on trouvera, je le répète, une élévation trop faible, et cette erreur croissant encore avec la température, il arrivera que le décroissement de hauteur sera beaucoup plus rapide en apparence qu'elle ne l'est en réalité.

M. Frankenheim conclut de ces recherches, que le décroissement de la hauteur capillaire avec l'élévation de température est, en général, beaucoup plus rapide que celui de la densité, que, pour certains liquides il est approxi-

mativement proportionnel à l'accroissement de température; le plus souvent on doit, pour représenter les résultats de l'expérience, recourir à une formule d'interpolation de forme parabolique; parfois même cette forme ne suffit pas. En nous contentant de la première approximation, et en posant

$$h_t = h_0 (1 - at),$$

on aurait, d'après M. Frankenheim, pour $h_0$ et $a$ les valeurs suivantes, en supposant le rayon du tube $= 1^{mm}$ :

| | Densité. | $h_0$. | $a$. |
|---|---|---|---|
| Eau. . . . . . . . . . . . . . | 1,000 | 15,37 | 0,0019 |
| Essence de térébenthine. . . . . . | 0,890 | 6,71 | 0,0024 |
| Essence de citron . . . . . . . . . | 0,858 | 7,10 | 0,0023 |
| Id. . . . . . . . . . | 0,856 | 6,88 | 0,0024 |
| Naphte. . . . . . . . . . . . . | 0,847 | 6,95 | 0,0023 |
| Alcool . . . . . . . . . . . . . | 0,821 | 6,05 | 0,0024 |
| Éther acétique . . . . . . . . . . | 0,905 | 6,10 | 0,0034 |
| Éther . . . . . . . . . . . . . | 0,737 | 5,40 | 0,0047 |
| Sulfure de carbone . . . . . . . | 1,290 | 5,10 | 0,0020 |
| Acide acétique . . . . . . . . . | 1,052 | 8,51 | 0,0011 |
| Acide formique. . . . . . . . . | 1,105 | 10,20 | 0,0012 |
| Id. . . . . . . . . | 1,044 | 10,21 | 0,0013 |
| Acide sulfurique . . . . . . . . | 1,840 | 8,40 | 0,0025 |
| Chlorure de zinc . . . . . . . . | 1,363 | 10,06 | 0,0022 |
| Alcool étendu . . . . . . . . . | 0,927 | 6,41 | 0,0019 |
| Id. . . . . . . . . . | 0,967 | 7,27 | 0,0022 |
| Solution de potasse . . . . . . . | 1,274 | 7,70 | 0,0025 |
| Soufre. . . . . . . . . . . . . | 1,980 | 4,61 (à 100°) | 0,0044. |

Le travail de M. Wolf [1] est une des études les plus complètes que l'on puisse désirer sur le sujet qui nous occupe [2]. Les observations concernant les hauteurs

[1] *Ann. de chim. et de phys.*, IIIe série, t. XLIX.

[2] Je crois devoir saisir cette occasion de répondre aux observations que fait M. Wolf, dans son travail, relativement à mon premier *Mémoire sur la capillarité.*

En premier lieu M. Wolf exprime des doutes sur l'exactitude de mes résultats, en fondant ces doutes aussi bien sur l'égalité des résultats que j'ai obtenus pour la dépression du mercure et l'ascension de l'eau dans un même tube, malgré des différences notables de température, que sur l'inégalité des résultats obtenus à des températures constantes. Il cite, comme preuve, plusieurs chiffres de mes expériences.

J'ai été le premier à concevoir des doutes sur l'exactitude de mes résultats; cependant je me

capillaires de l'eau à différentes températures sont d'une extrême précision et très-nombreuses. Les résultats obtenus avec deux tubes de diamètre différent confirment cette conclusion des recherches de Simon, que le diamètre du tube n'influe pas sur les variations de la hauteur capillaire avec la température; ils permettent également de représenter l'ensemble de ces variations par une formule d'interpolation du premier degré, bien qu'il serait plus exact de recourir à une équation d'un degré supérieur. Cette formule approximative serait pour l'eau :

$$h_t = 15{,}533 - 0{,}0287\ t.$$

On voit que les données numériques de cette expression sont à peu près identiques à celles de la formule de M. Brünner

$$h_t = 15{,}332 - 0{,}0286\ t.$$

Les recherches de M. Wolf confirment nécessairement en même temps cette conclusion contraire à la théorie, que la hauteur capillaire décroît, quand la température s'élève, beaucoup plus rapidement que la densité.

En poussant jusqu'au bout cette conséquence de ses recherches, M. Wolf

permettrai de répondre à M. Wolf que, en faisant les remarques que je viens de rapporter, il a dû perdre de vue un des points essentiels de mon travail. J'ai montré en effet, dans ce mémoire, comment en employant un jaugeage au mercure pour mesurer le rayon moyen des tubes, on était forcé, pour corriger les erreurs dues aux inégalités de calibre du tube, de prendre une moyenne entre les dépressions ou les élévations observées en différents points du tube. Cela étant, on comprend que ces dépressions ou ces élévations peuvent être modifiées plus fortement par ces inégalités de calibre que par la température, de sorte que l'on ne peut plus constater une influence régulière de celle-ci.

Plus loin M. Wolf déclare ne pas bien comprendre ce que j'ai voulu exprimer, en objectant au procédé de Simon que l'air du réservoir avait à vaincre, pour refouler le liquide, non-seulement la capillarité de celui-ci, mais aussi celle de l'air. Cette idée me paraissait cependant assez simple pour n'avoir pas besoin de développement; il suffit de concevoir un instant l'air du tube liquéfié, pour se représenter le ménisque d'air, arrivé au bout du tube, comme capable de résister à une pression, très-faible sans doute, mais qui n'est peut-être pas négligeable. Il n'était donc pas question là de frottement, mais réellement de capillarité. Au reste, je n'accorde que fort peu d'importance à cette idée, et je reconnais beaucoup plus sérieuse l'objection de M. Wolf, fondée sur les variations de l'angle de contact à l'extrémité du tube, objection qui se trouve d'accord avec les différents phénomènes que j'ai rapportés dans ma discussion du procédé de Simon.

est arrivé à découvrir un fait très-curieux et vraiment fondamental. Il s'est demandé si, à une température que les formules linéaires d'interpolation donneraient égale à $\frac{1}{a}$, l'élévation capillaire d'un liquide ne deviendrait pas nulle. Sans pouvoir vérifier directement ce fait, il a au moins reconnu qu'à une température voisine de celle de la volatilisation complète, déterminée par M. Cagniard-Latour, le ménisque du liquide, d'abord concave, devient plan et enfin convexe, jusqu'au moment où le liquide se volatilise entièrement.

Ce phénomène est complétement en désaccord avec la théorie d'après laquelle l'élévation capillaire décroissant proportionnellement à la densité, ne pourrait jamais être nulle et encore moins négative, comme l'implique la forme plane ou convexe du ménisque.

Les recherches que nous venons d'analyser rapidement laissent si peu de chose à désirer, qu'en publiant les résultats des observations que j'avais faites longtemps avant la publication de celles de M. Wolf, j'ai pour unique but de présenter à mon tour quelques données capables de contrôler les résultats des recherches de MM. Frankenheim et Brünner.

On peut éviter, d'une manière extrêmement simple, l'importante cause d'erreur que j'ai indiquée dans les observations de M. Frankenheim. Il suffit de mettre en communication le tube capillaire et la branche large du siphon, au moyen d'un tube de caoutchouc adapté au tube capillaire d'un côté, et de l'autre au tube large, dont on a préalablement étiré l'extrémité. Ainsi le tube en U forme un système fermé dont toutes les parties sont saturées de vapeur et en équilibre de pression.

Avec cette simple modification à l'appareil de M. Frankenheim, j'ai déterminé les élévations à diverses températures de cinq liquides : alcool, chloroforme, huile de naphte, huile d'orange, acide acétique (cristallisable). Avant chaque mesure, prenant une précaution à laquelle M. Frankenheim me parait ne pas avoir attaché assez d'importance, je m'assurai qu'il ne pouvait y avoir d'erreur de réfraction en mesurant au cathétomètre la distance de deux traits tracés sur le tube, distance qui avait été mesurée avant que l'appareil fût placé dans le bain. La branche large de cet appareil avait $15^{mm}$ de diamètre, et le tube capillaire $0^{mm},2712$ ou $0^{mm},1356$ de rayon. Ce tube était parfaitement calibré; je n'en ai pas employé d'autres dans ces observations,

quoique M. Frankenheim conseille de souder à la branche large un nouveau tube, chaque fois qu'on change de liquide. J'ai déjà dit, dans mon premier mémoire, que cette précaution était inutile avec les liquides que j'ai nommés plus haut, pourvu que l'on eût soin de laver le tube avec ces liquides mêmes. D'ailleurs, je crois que l'opération de la soudure altère au moins autant la surface du tube, que le pourrait faire le contact d'un liquide. D'un autre côté, j'ai cru inutile de soumettre à une nouvelle vérification la conclusion des expériences suffisamment variées de Simon, concernant la non-influence du diamètre sur la relation entre l'élévation et la température. J'ai pensé que si cette conclusion était vraie pour l'eau, elle devait l'être à plus forte raison pour les liquides qui présentent plus de constance et de régularité dans leurs phénomènes.

Je n'inscris dans le tableau suivant que les moyennes de mes observations, attendu que les différences n'ont jamais porté que sur les 20$^{mes}$ de millimètre.

| DÉSIGNATION des liquides. | Température T. | Élévations observées $H_T$. | $\frac{H_0 - H_T}{H_0\,T}$ |
|---|---|---|---|
| Alcool. | 0°,0 | 46,20 | |
| | 15,1 | 44,75 | 0,0021 |
| | 18,2 | 44,45 | 0,0021 |
| | 20,5 | 44,30 | 0,0020 |
| | 21,7 | 44,25 | 0,0020 |
| | 22,4 | 44,05 | 0,0021 |
| | 29,1 | 43,40 | 0,0021 |
| | 36,0 | 42,85 | 0,0020 |
| | 45,0 | 41,85 | 0,0021 |
| Chloroforme. | 0,0 | 29,63 | |
| | 37,0 | 26,53 | 0,0028 |
| Huile de naphte. | 0,0 | 49,55 | |
| | 22,8 | 46,70 | 0,0025 |
| | 31,0 | 45,25 | 0,0028 |
| | 37,0 | 44,58 | 0,0027 |

| DÉSIGNATION des liquides. | Température T. | Élévations observées $H_T$. | $\frac{H_0 - H_T}{H_0 T}$ |
|---|---|---|---|
| Huile d'orange. | 18,7 | 48,95 | |
| | 52,0 | 44,80 | 0,0025 |
| Acide acétique. | 9,3 | 42,75 | |
| | 25,7 | 41,45 | 0,0018 |
| | 35,0 | 40,55 | 0,0019 |

Ces expériences confirment les conclusions de MM. Brünner, Wolf et Simon, sur la proportionnalité au moins approximative du décroissement de la hauteur capillaire à l'accroissement de température, conclusions que l'on peut tirer également de la plupart des expériences de M. Frankenheim, surtout des expériences faites sur les liquides qui donnent généralement des résultats constants.

On sait que c'est particulièrement de la température du ménisque que dépend l'élévation d'un liquide dans un tube. Il était important de chercher si l'état de température du reste de liquide n'a d'autre effet que de modifier la densité, et indirectement seulement l'élévation. A cet effet, j'ai mastiqué un tube capillaire au fond d'un cylindre; une partie du tube se trouvait à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de ce cylindre; cette dernière plongeait dans de l'alcool dont on relevait le niveau jusqu'à ce que le ménisque parvînt dans la partie du tube intérieur au cylindre, et seulement 1 ou $2^{mm}$ au-dessus du fond de celui-ci. On versait alors dans ce cylindre de l'eau dont on maintenait la température constante. Le ménisque d'alcool prenait la température de ce bain d'eau, tandis que le reste de la colonne se maintenait à la temperature extérieure.

Soit $h$ la hauteur totale soulevée, $l$ la partie du tube non chauffée, T la température du ménisque et $t$ la température de l'air. On pourra considérer la hauteur soulevée comme représentant le poids soulevé, si, supposant toute la colonne à T°, on ajoute à $h$, la quantité

$$\alpha l (T - t),$$

$\alpha$ étant le coefficient moyen de dilatation du liquide $= 0{,}0011$ pour l'alcool.

S'il est vrai que la température du ménisque seule influe sur la dépression, on devra trouver pour $h + \alpha l(T - t)$, les mêmes valeurs que l'on observe quand toute la colonne est à T°.

Avec un fragment du tube précédent, ayant exactement le même diamètre, j'ai trouvé dans une expérience de ce genre faite sur l'alcool :

Température extérieure $t = 16°,0$. — $l = 33^{mm}$.

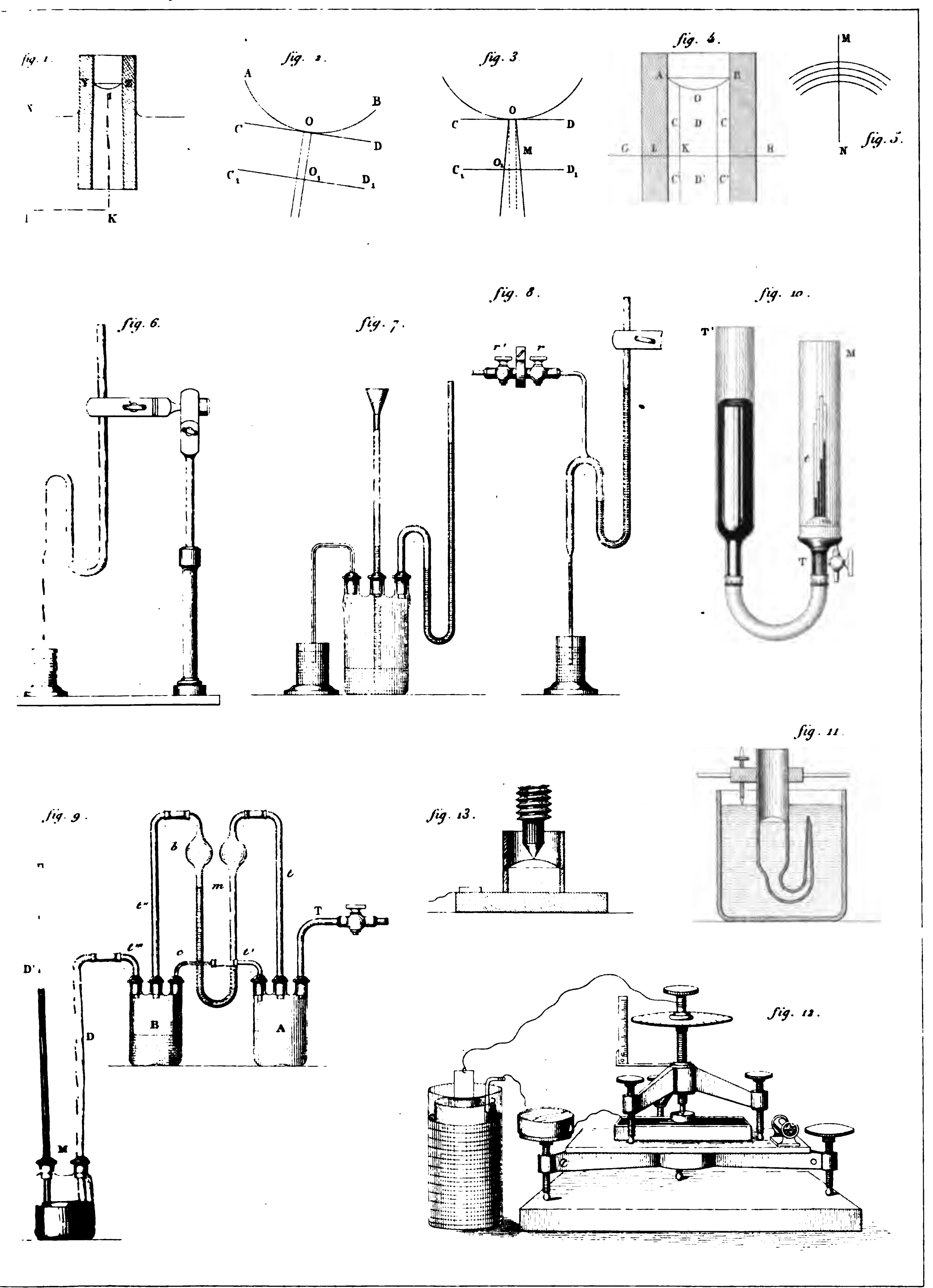
| TEMPÉRATURE du ménisque. T | Hauteur soulevée. $h$ | $h + \alpha l(T - t.) = h_T$ | $\frac{h_0 - h_T}{T\, h_0}$ |
|---|---|---|---|
| 0° | 46,7 | 46,1 | |
| 16 | 44,5 | 44,5 | 0,0022 |
| 30 | 42,5 | 43,0 | 0,0022 |
| 52 | 39,3 | 40,6 | 0,0023 |
| 71 | 37,6 | 39,6 | 0,0022 |

Ces résultats diffèrent fort peu de ceux que nous avons obtenus précédemment.

Nous pouvons donc admettre, sinon comme rigoureuse, au moins comme très-approchée, cette loi :

« Les poids de liquides soulevés à différentes températures dans un tube
» capillaire, décroissent proportionnellement aux températures des ménis-
» ques, et sont indépendants des températures des autres parties de la masse
» liquide. »

# TABLE DES MATIÈRES.


fig. 1
fig. 2
fig. 3
fig. 4
fig. 5
fig. 6
fig. 7
fig. 8
fig. 9
fig. 10
fig. 11
fig. 12
fig. 13

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Dépressions du Mercure dans les tubes de verre d'après Laplace.

Dépressions du Mercure observées entre les lames parallèles.

Dépressions du Mercure entre les lames parallèles.

Dépression du Mercure dans les tubes barométriques d'après Laplace.

Dépressions du Mercure observées dans les tubes barométriques.

Dépression du Mercure dans les tubes barométriques d'après Cavendish.

A

$V_1$ $V_3$ $V_4$ $V_5$ $V_6$ $V_7$

$C_1$ $C_2$ $C_3$ $C_4$ $C_8$ $C_9$

19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

# MONOGRAPHIE

DU

# GENRE PILOBOLUS, TODE,

SPÉCIALEMENT ÉTUDIÉ

**AU POINT DE VUE ANATOMIQUE ET PHYSIOLOGIQUE;**

PAR

EUGÈNE COEMANS.

—

(Mémoire présenté le 14 mai 1861.)

# INTRODUCTION.

Schau, ich prahle hier in Glanz,
Habe Licht in mich gezogen.

SALLET.

Parmi ces petits êtres gentils et éphémères, aux diverses couleurs, aux formes souvent si bizarres et si gracieuses à la fois qui caractérisent les dernières phalanges de l'immense classe des champignons, le petit genre *Pilobolus* occupe, sans contredit, une des premières places, et semble réclamer par sa naïve beauté un intérêt de prédilection spéciale.

L'élégance de ses formes, son organisation merveilleuse, sa fraîcheur inimitable, sa robe de perles cristallines, et surtout le phénomène mystérieux de la projection de ses spores, tout cela ne pouvait manquer d'attirer les regards et de charmer l'attention des mycologues de toutes les époques. Peu de champignons, en effet, furent décrits si souvent, aucun peut-être ne fut peint ou dessiné un si grand nombre de fois que certaine espèce du genre *Pilobolus*.

Aussi trouve-t-on, pour faire son histoire, une cinquantaine d'ouvrages à consulter, et pas moins de vingt-cinq ou vingt-six figures, souvent très-dissemblables, à comparer entre elles.

Après cela, ce genre devrait, semble-t-il, être parfaitement connu et les moindres mystères de son organisation expliqués depuis longtemps. Il n'en est cependant pas ainsi. L'observation, même la plus patiente, ne mène pas toujours à la certitude et moins souvent encore à la vérité, comme ne l'éprou-

vent que trop souvent ceux qui se sont donné la noble mais laborieuse mission d'approfondir les œuvres de Dieu.

Une étrange confusion, nous devons l'avouer, règne encore aujourd'hui parmi les espèces de ce genre, et bien peu de phénomènes, si remarquables pourtant, de la vie de ces gentilles mucorinées ont reçu une explication satisfaisante. Nous n'accusons point pour cela la légèreté des anciennes observations : la faute en est plutôt aux nombreuses difficultés que rencontre l'observateur qui veut étudier ces fragiles productions, dont l'existence momentanée et fugitive s'évanouit au moindre toucher. Et quand on considère combien d'éminents botanistes se sont trompés en écrivant sur ce genre, on serait presque tenté d'adresser aux *Pilobolus* le reproche des anciens poëtes aux sirènes de Lucanie, d'avoir égaré tous leurs admirateurs.

En 1860, j'eus le bonheur de rencontrer et de pouvoir cultiver en même temps les espèces principales de ce genre. Pour les voir de plus près, et surprendre leurs secrets, je les ai cultivées pendant quatre mois dans ma chambre de travail, je les observais là tous les jours; j'ai vu ainsi les générations succéder aux générations, je les ai vues naître cent fois et mourir de même. L'étude de leur vie m'est devenue facile; et je me plais aujourd'hui à présenter à l'appréciation savante de l'Académie les résultats de ces heures de paisibles et chères études, moments heureux pour ceux qui en connaissent les charmes, doux moments où le cœur se repose des fatigues de la vie, puisqu'ils faisaient dire au vénérable doyen des mycologues, au grand Fries, à la fin d'une carrière d'immenses travaux : *Sub vitae meae crepusculo meminisse juvat, quantas voluptates fungorum studium, per quinquaginta et quod excurit annos continuatum, mihi paraverit* [1].

Les *Pilobolus*, il est vrai, ne sont pas délicats sur le choix de leur habitat : c'est sur des excréments d'animaux ou sur la vase des bourbiers qu'on les trouve comme des perles tombées d'une riche parure; mais la science

[1] *Monographia hymenomycetum Sueciae.— Historia studii mei mycologici*, p. XI.

ennoblit tout, et la nature aussi, qui ne connait pas nos préventions, se plait parfois, pour nous apprendre, dirait-on, à ne rien mépriser dans son empire, à placer sur certains théâtres pour lesquels le vulgaire n'éprouverait que du dégoût, les scènes les plus pures et les plus délicates de la vie végétale.

J'ai divisé ce travail en quatre parties :

La *première* donne l'histoire du genre et résume les observations anciennes;

La *deuxième* est consacrée à l'anatomie générale des *Pilobolus*, dont les organes offrent peu de variations spécifiques;

Dans la *troisième* partie, j'ai tâché de décrire les différentes phases de leur développement, et de grouper méthodiquement les observations physiologiques;

Enfin, dans la *quatrième* partie, je m'occupe de la description et de la critique des espèces connues jusqu'à ce jour.

Gand, le 1er mai 1861.

# MONOGRAPHIE

DU

# GENRE PILOBOLUS, TODE,

SPÉCIALEMENT ÉTUDIÉ

AU POINT DE VUE ANATOMIQUE ET PHYSIOLOGIQUE.

## I.

## PARTIE HISTORIQUE.

1. C'est aux zoologues que nous devons les premières données sur les *Pilobolus*.

HENRY BAKER (1744), micrographe anglais distingué, élevait des polypes d'eau douce dont il nous a laissé une intéressante histoire. Un vase rempli de limon noir de la Tamise lui servait à conserver les vers dont il nourrissait ses favoris.

Un jour il vit cette vase brillante et toute couverte de corpuscules ovalaires d'une belle transparence, dont chacun portait une espèce de petit bouton noir. Courant à son miscroscope, il reconnut dans ces êtres singuliers une infinité de petites plantes lagéniformes, remplies d'un liquide clair

et couronnées d'une belle boule noire, qu'il considère avec raison comme le fruit de la plante : c'étaient des *Pilobolus*. La description et les dessins de Baker[1] ne laissent à ce sujet aucun doute; les phénomènes de la transsudation et de la projection lui échappèrent cependant. La station qu'indique le zoologue de Londres me fait rapporter la première espèce trouvée au *Pilobolus oedipus*, Montagne.

2. Vingt ans plus tard (1764), le célèbre zoologue danois, F.-Otto Müller, découvrit une seconde espèce : le *Pilobolus cristallinus*, qu'il décrivit et figura avec beaucoup de soin; mais l'amour du merveilleux l'égara, trop de poésie et une observation un peu légère lui firent voir dans ce frêle champignon, couvert de gouttelettes cristallines et qu'habitent parfois de petits vers blancs, d'abord un cristal-végétal, puis une plante-animal, un merveilleux organisme, comme il dit, dans lequel les trois règnes de la nature, oubliant leurs limites, venaient se donner la main.

Cette singulière découverte eut un certain retentissement dans les recueils scientifiques de l'époque[2].

3. J.-A. Scopoli (1772) fit ensuite connaître son *Mucor obliquus*[3], qui est certainement un *Pilobolus*. Il l'avait trouvé sur un peu de terre dans laquelle il conservait une larve de *Sphinx atropos*.

La description qu'il en donne ne permet pas de préciser avec certitude l'espèce qu'il trouva; mais la station de provenance et la position oblique du renflement inférieur de la tige, très-fréquente chez le *Pilobolus oedipus*, me font croire que ce fut cette dernière espèce.

Scopoli signala le premier le renflement radical, les gouttelettes cristallines et la durée éphémère de cette gentille plante.

[1] *Essai sur l'hist. nat. du polype-insecte*, par M. Henry Baker, de la Société royale de Londres. Traduit de l'anglais par M. P. Demours, médecin à Paris; Paris, 1744. Chap. XI, pp. 322-327; pl. XXII, fig. 9 et 10. C'est à l'extrême obligeance de M. Tulasne, de l'Institut, que nous devons la communication du chapitre et des dessins de Baker qui ont rapport aux *Pilobolus*.

[2] *Berlinische Sammlung zur Beförderung der Arzneiwissenschaft, 1778. — Gazette littéraire de Francheville, 1767.* — F.-O. Müller, *Kleine Schriften aus der Naturhistorie*, publié par Göze. Dessau, 1782.

[3] *Flora Carniolica*, pars II, p. 494.

4. WEBER (1780), en faisant la flore du Holstein, trouva le *Pilobolus crystallinus*, et en fit un genre nouveau sous le nom d'*Hydrogera*[1]. Ce genre n'a guère été adopté que dans la *Flora danica* et dans la *Flora germanica* de Roth[2].

5. JULES TODE (1784) fit le premier du *Pilobolus crystallinus* une étude approfondie[3], et ses observations portent un cachet de justesse qu'on cherche vainement chez la plupart des mycologues qui le suivirent.

Le singulier phénomène de la projection du globule lui suggéra le nom générique de *Pilobolus* (πιλος, chapeau, et βαλλω, je jette) que la plante a conservé depuis. On trouve dans sa description les premières données de l'histoire du développement de ce champignon et d'excellentes idées sur la projection du globule. Tode est le seul des anciens botanistes qui ait figuré le *Pilobolus crystallinus* avec son renflement inférieur.

Quelques années plus tard (1790) il indiqua, dans ses *Fungi Mecklenburgenses*[4], une variété du *Pilobolus crystallinus*, qu'il différencie par cette courte phrase : *Capsulâ solum hydrophorâ, aliquantum strictiori*. Il y a ici évidemment erreur, et l'auteur aura observé ses plantes après la projection, alors qu'une grosse goutte limpide vient remplacer le globule coloré.

6. JACOB DICKSON (1785) décrivit en deux lignes, comme on faisait à cette époque, un *Pilobolus* qu'il nomme *Mucor urceolatus*[5] à cause de la forme de sa cupule. L'habitat de sa plante, sur excréments d'herbivores et la figure assez médiocre qu'il en donne, me font croire qu'elle est le *Pilobolus crystallinus*.

7. JACOB BOLTON (1789) mentionne parmi les champignons remarquables des environs d'Halifax[6] le *Pilobolus crystallinus*, sous le même nom que Dickson. Mais il se méprend singulièrement sur la nature du globule, qu'il décrit comme couvert d'abord d'une fine membrane qui crève ensuite pour montrer une masse laineuse où les spores sont attachées à des filaments

[1] *Primitiae Flora Holsaticae*, p. 110.

[2] *Flora germanica*, I, p. 557.

[3] *Beschreibung des Hutwerfer*, in *Schriften der Naturfor. Berlin. Gesell.*, pars V, p. 46, tab. 1.

[4] *Fungi Mecklenburgenses selecti*, p. 41.

[5] *Fasciculus plant. crypt. Britanniae*, I, p. 25.

[6] *Hystory of Funguses.* Traduction de Willdenow (1795), vol. III, p. 68, tab. 133.

comme chez les lycoperdonacées. Nous croyons que Bolton aura examiné des sporanges séjournant à terre depuis quelques jours, où ils sont souvent envahis par des parasites divers.

A côté de cette première espèce, Bolton place encore le *Mucor roridus* [1] (*Pilobolus roridus,* Pers.), espèce très-problématique et qui demande de nouvelles recherches. La description et les figures de Bolton ont été reproduites par Relham [2], ainsi que dans l'Encyclopédie de Loudon [3].

8. Un des continuateurs du bel ouvrage d'Oeder, MARTIN VAHL (1792), fit peindre, pour la *Flora danica,* le *Pilobolus crystallinus* (*Hydrogera crystallina* [4]); mais cette figure ne répond pas à la réputation d'exactitude et de ressemblance dont jouit cette flore.

9. Le *Pilobolus crystallinus* n'était pas encore connu en France; BULLIARD (1790-1809) le peignit dans ses *Champignons de France* [5]. Sa planche représente bien le port de la plante, sauf les figures *B* et *C;* mais il se trompe entièrement sur l'origine des gouttelettes cristallines, sur la nature du globule, qui n'est pas un sporange pour lui, ainsi que sur le phénomène de la projection, qu'il ne soupçonne même point.

10. PERSOON (1796), excellent observateur, étudia la même plante dans ses *Observationes mycologicae* [6]. Il expose et décrit très-bien les formes variées et les différentes couleurs que cette gentille mucorinée prend en se développant; mais son explication du mécanisme de la projection n'est pas heureuse [7]. Il remarqua le premier que les gouttelettes cristallines qui ornent ce petit champignon, proviennent du liquide intérieur; ce fut lui aussi qui plaça le *Mucor roridus* de Bolton parmi les *Pilobolus* [8]. Les figures de Persoon, assez médiocres, au reste, ont été reproduites par Nees von Esenbeck, Henry et Chevalier.

11. SCHUMACHER (1801), dans son Énumération des plantes de l'île de

[1] Bolton, *l. c.,* n° 168, tab. 132.
[2] *Flora Cantabrig.,* p. 122, fig. 4.
[3] *Loudon's Encyclopedie of plants,* p. 1024, gen. 2418.
[4] *Flora danica,* tom. VI, fig. 1080.
[5] Tom. I, p. 111, tab. 480, fig. 1.
[6] *Observationes mycologicae,* pars I, p. 76, tab. IV, fig. 9-11.
[7] *Loc. cit.* et *Traité sur les Champignons comestibles.* Paris. 1818, p. 115.
[8] *Synopsis methodica Fungorum;* pars I, pp. 117-118.

Seeland[1], ne fournit de nouveau pour l'histoire des *Pilobolus* que son explication de la projection du globule. Selon lui, le phénomène est produit par une vésicule diaphane, cachée dans la cupule et faisant l'effet d'un ressort qui, sortant brusquement, chasse devant lui le globule noirâtre. Bisschoff[2] et M. Léveillé[3] ont partagé plus tard cette manière de voir; nous y reviendrons, quand nous aurons à discuter les différentes opinions émises sur cette décapitation singulière.

12. Link (1809), qui s'occupa beaucoup des champignons inférieurs, devait expliquer à son tour ce mode de dissémination qui avait tant intrigué ses devanciers. Il admet[4], pour expliquer le phénomène, une véritable explosion, occasionnée par une contraction subite de la cupule. Nous verrons que cette théorie se rapproche assez de la vérité.

13. Nees von Esenbeck *(senior)* (1816), publiant une classification générale des champignons[5], plaça les *Pilobolus* parmi les mucorinées et donna du *P. crystallinus* une série de figures qui laissent beaucoup à désirer. F.-L. von Esenbeck et Henry reprirent ces mêmes figures dans leur *System der Pilze* (1837)[6].

14. Elias Fries (1822), le père de la mycologie moderne, devait nécessairement s'occuper des *Pilobolus*. Il les plaça d'abord[7], à l'exemple de Persoon et de Schumacher, parmi ses *gastéromyces, angiogastres, carpoboles;* l'analogie le portait à les réunir aux *Sphaerobolus* et aux *Thelobolus*, et il avait cru leur reconnaître au jeune âge une double enveloppe (*in statu juniori evidenter contexti*). Mais plus tard, il reconnut son erreur et les classa parmi les mucorinées (1829)[8], place qu'il leur conserva dans sa *Summa vegetabilium Scandinaviae* (1849)[9].

[1] *Enumeratio plantarum in Saelandia*, II, pp. 188-189.
[2] *Handbuch der Bot. Termin*, vol. II, p. 1012.
[3] *Mém. de la Société Linnéenne de Paris*, t. IV, p. 622.
[4] *Observationes in ordin. Plant. natur.*, in *Abhand. der Berlin. Naturfor. Gesell.*, ann. III, pars IV.
[5] *System. der Pilze und Schwämme*, p. 83, fig. 81.
[6] *System. der Pilze.* Bonn, I Abtheil, p. 32, tab. V.
[7] *Syst. myc.*, vol. II, p. 308.
[8] *Ib.*, vol. III, p. 312.
[9] *Sum. veg. Scand.*, pars II, p. 478.

15. En 1826, le *Pilobolus crystallinus* fixa l'attention de plusieurs botanistes français.

M. Durieu de Maisonneuve, dans une courte notice, s'occupa spécialement de son développement [1]. En parlant du globule, M. Durieu avait dit que le *Sclerotium stercorarium*, que l'on trouve dans la bouse de vache, pourrait bien n'être que le sporange du *Pilobolus*, observé après la projection. M. Desmazières releva vivement cette erreur, et prouva l'autonomie de cette sclérote [2].

La même année, M. le docteur Léveillé, qui a rendu tant de services à la mycologie, publia un mémoire sur le genre entier [3]. Mais l'illustre mycologue ne fut point heureux dans ce travail. Il y considère, entre autres, le sporange comme un simple opercule, se méprend sur la cause de la projection, et prend pour le *Pilobolus roridus* [4] une simple forme grêle du *Pilobolus crystallinus*.

Bisschoff [5], en copiant les planches de M. Léveillé, a reproduit cette erreur.

16. Les *Pilobolus crystallinus* et *roridus* étaient jusqu'alors les seules espèces reçues, Camille Montagne (1828) en créa une troisième, dans les *Bulletins de la Société Linnéenne de Lyon* [6], et lui imposa le nom d'*Oedipus*, à cause du renflement inférieur de la tige qu'il croyait exclusivement propre à cette espèce.

Quoique ce caractère soit commun à toutes celles du genre, le *Pilobolus oedipus* représente cependant une véritable espèce, s'éloignant du *P. crystallinus* par la nature de ses spores et un port massif et trapu.

Cette espèce semble ne pas avoir été reçue ou connue par les mycologues modernes; mais Camille Montagne, qui avait foi en son espèce, la conserva néanmoins dans son *Sylloge* (1856) [7], et son autonomie est incontestable aujourd'hui.

[1] *Notice sur le* Pilobolus crystallinus, *Ann. Scienc. nat.*, t. IX, p. 221.

[2] *Sur le* Pilobolus crystallinus *et le* Sclerotium stercorarium, par M. Desmazières, *Ann. Scienc. nat.*, 1827, p. 145.

[3] *Mém. de la Soc. Linn. de Paris.*, tom. IV, p. 622, tab. XX.

[4] *Loc. cit.*, p. 632, tab. XX, fig. 1-6.

[5] *Handb. der Bot. Termin.*, vol. II, fig. 3725.

[6] *Mémoire sur le genre Pilobole et sur une nouvelle espèce*, Mém. de la Soc. Linn. de Lyon, pp. 1-7, *cum icone.*

[7] C. Montagne, *Sylloge gen. et spec. cryptogamarum*, p. 299.

La même année (1828), M. H. Gachet publia une courte notice sur le *P. crystallinus* [1]. Il y signale à l'attention des botanistes la présence d'un anneau jaunâtre placé sous la cupule, et l'apparition irrégulière de vésicules secondaires dans le voisinage du globule. Ces prétendues vésicules ne sont que des gouttes de liquide cristallin, qui viennent remplacer le sporange ou lui adhèrent de différentes manières.

17. Corda (1837-1854), dans son grand ouvrage iconographique sur les champignons [2], créa pour notre genre une famille nouvelle, celle des pilobolées, en lui associant les genres *Chordostylum*, Tode, et *Cologaster,* Corda. Rapprochement malheureux et fondé certainement sur une connaissance imparfaite des plantes qu'il réunissait ainsi.

Dans son Introduction à l'étude de la mycologie [3] (1842), Corda ne fit que reproduire, sans y apporter de changement, les descriptions de ses *Icones*.

Quelques années après la mort malheureuse du mycologue de Prague, le docteur Zobel, publia (1854) le tome VI de ses *Icones*. Nous y trouvons une longue description et de nombreuses figures du *Pilobolus crystallinus* [4].

Au milieu d'excellentes remarques et de bonnes observations, on est étonné de trouver bien des erreurs. Ainsi on conçoit difficilement comment Corda a pu voir la tige de ses plantes se terminant en un pinceau de filaments radicellaires [5] et le globule se rompant, à la façon des gastéromyces, à la partie supérieure; comment il a trouvé le sporange formé tout d'une pièce et couvert de verrues. Le prétendu réseau jaunâtre [6], qui revêt, selon lui, l'intérieur de la plante, n'est encore qu'un effet de la pression excessive à laquelle Corda soumettait d'ordinaire ses préparations microscopiques.

Corda n'a pas recherché la cause de la projection du globule; mais ce qui nous intéresse davantage, c'est une nouvelle espèce qu'il décrivit d'abord sous le nom de *Pilobolus lentigerus* [7], puis sous celui de *Pycnopodium lentige-*

[1] *Note sur le* Pilobolus crystallinus, *Bull. de la Soc. Linn. de Bordeaux,* tom. II, pp. 159-160.
[2] *Icones Fungorum.,* tom. I, p. 22, tab. VI, fig. 286, et tom. V, p. 18.
[3] *Anleitung zum studium der Mycologie*, pp. 71-72, tab. C, fig. 25.
[4] *Icones Fungorum*, tom. VI, 1854, *edidit Zobel,* tab. II, fig. 32.
[5] *Anleitung,* tab. C, *icon.* 25, fig. 1.
[6] *Icon. Fung.,* tom. VI, tab. II, *icon.* 32, fig. 12.
[7] *Ib.,* tom. I, p. 22.

*rum*[1]. Je ne crois pas à l'autonomie de cette espèce, qui n'est qu'une forme maladive du *Pilobolus oedipus*, comme je l'expliquerai plus au long dans la quatrième partie de ce travail.

La famille des pilobolées, créée par Corda, a été assez généralement admise jusqu'à ce jour, et MM. Léveillé[2] et Bonorden[3] l'ont adoptée dans leurs classifications des champignons.

18. En 1850, le baron DE CESATI découvrit, sur de la fiente de porc, aux environs de Verceil, une mucorinée qu'il prit pour un *Pilobolus*, et qu'il publia dans l'Herbier mycologique de Klotzsch, sous le nom de *Pilobolus anomalus* [4]. La description détaillée qui accompagne l'échantillon, les dessins de M. Cesati même et l'analyse d'échantillons authentiques m'ont convaincu que sa plante appartient plutôt au genre *Ascophora*.

19. BONORDEN (1851) considère, comme nous l'avons déjà dit, les *Pilobolus* comme le type d'une petite famille qu'il place à la suite de ses mucorées. Son *Pilobolus crystallinus* me semble, à voir la forme des spores et la figure qu'il en donne[5], devoir être rapporté au *Pilobolus oedipus*, Montg.

20. FERDINAND COHN (1851), aujourd'hui professeur à l'université de Breslau, donna dans les Actes des curieux de la nature de Bonn, une histoire complète du *Pilobolus oedipus*, qu'il prend pour le *crystallinus*[6]. C'est de loin le plus beau travail qui ait paru sur la matière. Une érudition étendue, de belles applications d'anatomie comparée et de physiologie philosophique caractérisent cette monographie. Nos vues diffèrent cependant, comme on le verra dans notre partie physiologique, en plusieurs points de celles du savant professeur.

21. M. le docteur TH. GUIGNEAU, secrétaire de la Société Linnéenne de Bordeaux, consacra également une note au *Pilobolus crystallinus* (1852-

[1] *Icon. Fung.*, tom. V, p. 18.

[2] *Considérations mycologiques, suivies d'une nouvelle classification des champignons.* Paris. 1846, p. 127. (Extrait du *Dict. d'Hist. nat. de d'Orbigny.*)

[3] *Handbuch der allgemeine Mycologie* (1851), p. 128.

[4] Klotzsch, *Herbarium vivum Mycologicum*, 1851, n° 1542, *cum descriptione.* — Hermann Hoffman, *Index Mycologicus* (1860), p. 64.

[5] *Haadbuch d. allg. Mykol.*, p. 128, *die sporen sind rund.* Tab. X. fig. 203, *b.*

[6] *Entwickelungsgeschichte des* PILOBOLUS CRYSTALLINUS, *Nov. Act. Acad. C. L. C. naturae curiosorum.* Bon., vol. XIII, pp. 493-535, tab. 51 et 52.

1853)[1]. Il y constate de nouveau la réalité du phénomène de la projection, et recherche avec soin les différents habitat et les époques de provenance de ce petit champignon. Cette jolie notice ne renferme qu'une erreur, celle de ne voir dans le chapeau qu'un simple opercule, tandis qu'il est le sporange du champignon même. Vu la station de provenance sur des conferves semi-putrescentes, je crois que M. Guigneau aura rencontré le *P. oedipus*.

22. Théodore Bail (1855) publia aussi, dans la *Botanische Zeitung*, une note intéressante sur le genre *Pilobolus*[2]. La différence entre le *Pilobolus crystallinus* et le *Pilobolus roridus* l'occupe d'abord, et ses observations le conduisent à douter sérieusement de l'existence de cette dernière espèce.

Il parle ensuite des fameuses anguillules qu'on a voulu associer classiquement aux *Pilobolus*, et prouve que leur présence sur ces petits champignons n'est qu'accidentelle, ce que M. Léveillé avait déjà reconnu.

23. Frédéric Currey (1857) décrivit en dernier lieu, dans le Journal de la Société Linnéenne de Londres, une espèce du genre *Pilobolus* trouvée sur des bouses de vache[3]. C'est un joli travail plein d'observations exactes; mais l'auteur prenant pour type du *Pilobolus crystallinus* l'espèce étudiée par M. Cohn, s'est mépris en rapportant son espèce au *Pilobolus roridus*, tandis qu'elle n'est que le *Pilobolus crystallinus* de Tode.

24. Enfin j'écrivis, en 1859, une notice sur le *Pilobolus crystallinus*, à laquelle l'Académie voulut bien accorder les honneurs de l'impression[4]. Ce travail incomplet se bornait à étudier l'anatomie et à esquisser les principaux phénomènes de la vie de cette gentille mucorinée. Nous osons espérer que la Monographie qui nous a occupé l'automne dernier, répondra mieux à l'attente des mycologues.

[1] *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux*, t. XVIII, 5me livr.

[2] *Botanische Zeitung von Mohl u. Schlechtendal*; 1855. — *Mykologische Berichte von Dr Th. Bail.*, pp. 629-635.

[3] *Journal of the proceedings of the Linnean Society*. London, vol. I, n° 4, p. 162, tab. II.

[4] Eugène Coemans, *Notice sur le* Pilobolus crystallinus, *Bull. de l'Acad. royale de Belgique*, 1859, t. VIII, p. 770, fig. 1-16.

# II.

## PARTIE ANATOMIQUE.

Puisque nous nous proposons d'étudier la vie des **Pilobolus** dans un chapitre spécial, bornons-nous ici, pour faire connaître leur structure anatomique, à examiner la plante adulte et parvenue à son entier développement.

La plante présente alors trois parties distinctes, savoir :

A. *Le rhizome radicellaire,*

B. *La tige ou cellule fructifère* et

C. *Le globule ou sporange.*

*A*. Examinons d'abord le RHIZOME BADICELLAIRE (pl. I, fig. 9 et 10).

Cet organe, plongé dans la bouse de vache chez le *Pilobolus crystallinus*, ou caché dans la vase chez le *Pilobolus oedipus,* n'est pas une racine proprement dite, telle qu'on l'entend strictement en phytologie; la racine, ici comme chez toutes les mucorinées que j'ai eu l'occasion d'étudier, joue simultanément un double rôle : celui de tige souterraine et celui de racine nourricière; car, en effet, si, d'une part, elle fixe le végétal et lui apporte ses éléments nourriciers, de l'autre aussi, elle abonde en renflements divers, véritables bourgeons ayant la même valeur physiologique que ceux de l'axe ascendant des végétaux supérieurs.

Cette partie souterraine, ayant souvent plusieurs pouces d'étendue, forme un vaste réseau de filaments mycéliens de formes variables et d'une irrégularité caractéristique.

La dissémination des spores exigeant, chez les *Pilobolus,* une dépense de liquide toute particulière, un système absorbant puissant et étendu devenait nécessaire.

Comme chez la plupart des mucédinées, les gros stolons, qui produisent

les cellules fructifères, se ramifient, généralement d'une manière dichotomique, en canaux plus grêles, qui se terminent à leur tour en radicelles à extrémités obtuses. Ces dernières sont les véritables racines, les organes absorbants; plus tard cependant, elles s'allongent et deviennent de simples canaux vecteurs.

La position des stolons est ordinairement horizontale et leur direction rayonnante. Pour la forme, on rencontre deux types : le plus souvent, de longs stolons rameux et bizarrement contournés (pl. I, fig. 9 *a*), d'autres fois, surtout chez les vieilles plantes, des bouquets de tubes courts en forme de ressacs arrondis (pl. I, fig. 10) rappelant assez bien la structure des *Caulerpa*.

Tous ces stolons sont creux et communiquent librement entre eux; les cloisons, assez rares, ne se trouvent généralement que dans des radicelles de faibles dimensions. (Pl. I, fig. 9 *b*.) Un protoplasma jaunâtre et d'autant plus coloré qu'il se trouve plus rapproché des cellules fructifères, remplit et vivifie tout ce système; les radicelles extrêmes charrient un liquide plus clair et non élaboré.

On se tromperait en croyant qu'un même rhizome ne produit en même temps qu'une seule cellule fructifère; une seule plante peut en émettre un grand nombre à la fois (pl. I, fig. 6), quelquefois une cinquantaine, comme on peut s'en assurer en débarrassant, par des lavages successifs, la plante de son sol nourricier.

L'endroit où un stolon se change en cellule fructifère est caractérisé par un évasement ou dilatation en forme d'entonnoir, que j'ai nommé primitivement [1] *cellule conique*, quoiqu'il ne constitue pas une véritable cellule distincte. (Pl. I, fig. 6 *a*.)

*B*. La tige ou cellule fructifère (pl. I, fig. 7 et 8; pl. II, fig. 7) est toujours simple, sauf quelques cas de ramification anormale (pl. II, fig. 5 et 20), et se compose :

1° *Du renflement inférieur* placé verticalement (pl. I, fig. 7 et 8 *a*) ou obliquement (pl. II, fig. 7 *a*) sur la cellule conique du rhizome,

2° *De la tigelle* (pl. I et II, fig. 7 *b*), tube creux, grêle, court ou très-allongé, droit ou flexueux et

[1] *Notice sur le* Pilobolus crystallinus, p. 9.

3° *De la cupule* ou renflement supérieur (pl. I et II; fig. 7 *c*).

Cette tige est pleine d'un liquide cristallin, légèrement visqueux, qui la ballonne fortement, comme on peut s'en convaincre en la pressant doucement avec des pinces légères.

Ce liquide est acide, au moins avant la projection du globule, et rougit le papier de tournesol; mais je n'ai pu déterminer la nature de l'acide, vu la difficulté, pour ne pas dire l'impossibilité de s'en procurer des quantités suffisantes. Il me paraît trop énergique pour être l'acide carbonique; peut-être est-ce l'acide malique, qu'on trouve dans les gouttelettes que laisse suinter le *Cicer arietinum;* ou bien l'acide formique, dont je n'ai cependant pas reconnu la saveur caractéristique.

Cette tige est incolore, claire, transparente, cristalline, quoique souvent un peu lavée de jaune pâle, dû à des restants de matières plasmatiques qui la revêtent à l'intérieur. Jamais cependant je n'ai observé ces bandes ou dessins rétiformes que mentionne et figure Corda[1]: on peut les obtenir artificiellement en écrasant la plante sous le compresseur.

L'étude de la membrane cellulaire qui forme cette tige est extrêmement intéressante, et j'ai cru devoir lui donner une attention spéciale. Elle est double dans toute l'étendue de la plante, c'est-à-dire qu'on peut facilement la dédoubler par voie de macération ou par l'emploi de divers réactifs chimiques. L'acide nitrique à froid ou le chlorure de zinc iodé sont ici du meilleur emploi. Sous leur action, on voit la paroi cellulaire se séparer en deux membranes bien distinctes.

*α. La membrane extérieure* (pl. II, fig. 8 *β*), incolore, tenace, élastique, parfaitement transparente, sans texture appréciable, se compose d'une variété de cellulose très-analogue à celle de la gaîne cellulaire de plusieurs algues (*Chordaria scorpioïdes, Fucus vesiculosus, serratus,* etc., etc.) et se teint en rose ou en pourpre pâle par le chlorure de zinc iodé. (Pl. I, fig. 11 *a*.) La constitution chimique de cette membrane n'est pas la même à tous les moments de sa vie, comme le prouve la diversité des teintes que lui donnent le chlorure de zinc iodé ou le sucre et l'acide sulfurique. Ses deux faces sont aussi inégalement sensibles aux réactifs chimiques, surtout à l'iode; c'est ainsi que, plongeant

[1] *Icon. Fung.*, tom. VI, tab. II, *icon.* 32, fig. 12.

dans cette teinture une cellule fructifère, on a peu ou point de coloration, quand la surface externe seule est baignée, et, au contraire, une coloration rose plus ou moins intense, quand le liquide peut pénétrer à l'intérieur et venir mouiller la paroi interne.

Un séjour prolongé du protoplasma dans le renflement inférieur de la tige [1] a pour effet d'y produire des couches d'épaississement remarquables, comme j'ai eu l'occasion de l'observer plusieurs fois. Cette partie paraît alors formée de trois membranes concentriques (pl. I, fig. 14), dont les deux premières, *a* et *b*, sont de même nature et généralement intimement soudées l'une à l'autre. On peut cependant les isoler artificiellement sous le microscope de préparation, après quelque temps de macération dans l'acide sulfurique dilué ou dans le chlorure de zinc iodé, comme je l'ai fait pour la figure 14 de la première planche.

Ces deux premières membranes, formées de cellulose, varient en épaisseur, et laissent distinguer chacune souvent deux ou trois feuillets d'épaississement qui rappellent parfaitement l'organisation de l'épispore chez le genre *Pertusaria*.

*β. La membrane interne* (pl. II, fig. 8 γ.) est opaque, colorée, fragile et peu résistante, finement granuleuse et de nature protéinique, comme l'accuse la belle couleur rose que lui donnent le sucre et l'acide sulfurique. (Pl. I, fig. 12.) Elle se contracte sensiblement sous l'influence des acides et perd en vieillissant ses principes azotés. Cette membrane n'est pas strictement simple, elle se compose d'une membranelle externe et d'une couche d'incrustation granuleuse qu'elle doit évidemment au protoplasma qu'elle a longtemps contenu. Cette constitution se révèle à toute évidence quand on traite cette membrane par l'acide sulfurique concentré; les granules protoplasmatiques qui revêtent sa face interne se gonflent alors excessivement et se laissent facilement reconnaître. Je regarde cette membrane interne comme le *Primordialschlauch* de H. von Mohl, la *ptychode externe* de Hartig.

Les genres *Ascophora*, *Hydrophora*, *Mucor*, *Periconia*, *Aspergillus*, *Polyactis* et certainement d'autres encore, se dédoublent de même sous l'ac-

[1] Nous indiquerons dans notre partie physiologique les cas dans lesquels ces couches d'épaississement se forment.

tion des acides, et le chlorure de zinc iodé colore leur membrane externe en rose. Ces genres se prêteraient merveilleusement à des études spéciales sur la nature encore incertaine de l'utricule primordial.

*Le protoplasma* qui remplit les jeunes cellules, et plus tard le globule, se distingue par la multiplicité des éléments qui le constituent. Ainsi on y trouve : 1° un liquide aqueux; 2° de nombreuses granules de nature azotée, mais à base de cellulose; 3° une huile abondante jaune ou jaune rougeâtre; 4° de la choléstérine ou une substance assez analogue, qui se colore en rouge acajou par l'acide sulfurique [1]; 5° enfin, une matière colorante destinée à teindre plus tard l'hémisphère supérieur du globule. Cette connaissance de la constitution des membranes tégumentaires et des éléments du protoplasma est nécessaire pour expliquer les réactions chimiques assez remarquables que l'on observe en soumettant la tige des *Pilobolus* aux agents chimiques généralement usités en botanique. Ainsi :

*L'acide sulfurique concentré* dissout les tissus avec boursouflement et teint la membrane interne et le protoplasma en bleu. (Pl. I, fig. 13.) Cette réaction singulière me semble inexplicable pour le moment, car je ne connais aucune substance qui se colore en bleu par l'acide sulfurique. La partie bleue est ordinairement entourée d'un halo rougeâtre qui accuse, si je ne me trompe, la présence de la choléstérine.

*L'acide nitrique* isole parfaitement bien les deux membranes, sans les colorer, et fait passer le pourpre sale du globule au jaune rougeâtre.

*L'iode* teint la plante tantôt en jaune pâle, tantôt en rose, surtout quand il pénètre entre les membranes.

*L'iode et l'acide sulfurique dilué* donnent une couleur pourprée à la membrane externe et d'un brun rouge à la membrane interne.

*La potasse caustique*, à froid, est sans action sensible; elle dédouble cependant la membrane cellulaire.

*L'oxyde de cuivre ammoniacal* corrode lentement les deux membranes.

*Le chlorure de zinc iodé* colore en rose ou en pourpre pâle la membrane

[1] Les excréments d'herbivores, qui servent de sol au *Pilobolus crystallinus*, renfermant en abondance des matières biliaires, et la vase, où croissait le *Pilobolus oedipus* que j'ai observé, recélant des intestins de poisson, peuvent expliquer la présence de la choléstérine chez les *Pilobolus*.

externe, et communique une teinte verdâtre à la membrane interne, au protoplasma, ainsi qu'à l'endochrome des spores, en laissant subsister le jaune primitif au centre des masses. (Pl. I, fig, 11.) Ce sont ici, si je ne m'abuse, des matières cellulosiques qui verdissent en passant au bleu, à cause du mélange inévitable de l'huile jaune qui les imprègne.

Enfin *le sucre avec l'acide sulfurique* (pl. I, fig. 12) fait prendre à la membrane interne une belle couleur rose, plus ou moins intense selon l'âge de la plante. Ce rose passe souvent au violet et finit par disparaître ensuite, comme la plupart des colorations chimiques précédentes.

La tige, considérée morphologiquement, forme un tube grêle et allongé, et régulièrement gonflé aux deux bouts. Trois cloisons la partagent:

Une *première cloison* termine le renflement inférieur et sépare la tige du rhizome radicellaire : c'est la *cloison radicale;* elle est formée d'un prolongement de la membrane externe, que revêt sur les deux faces le primordialschlauch. (Pl. I, fig. 11 et 12 *c;* pl. II, fig. 7 et 8 *a'*.)

*La deuxième cloison* ferme le renflement supérieur ou cupule et le sépare du globule; je l'ai nommée *cloison sous-globulaire.* (Pl. II, fig. 7 et 8 *a''*.) Comme la première cloison, elle se compose d'une membrane cellulosique, doublée inférieurement par le primordialschlauch, et supporte à sa partie supérieure le bourrelet sporifère. Sa forme est *toujours* conique et son adhérence à la membrane externe moins forte que celle de la première cloison.

*La troisième cloison,* que je nommerai *sous-cupulaire,* sépare la cupule de la tigelle proprement dite (pl. II, fig. 7 et 8 *a'''*); elle appartient tout entière au primordialschlauch, qui, retenant en cet endroit les restants plasmatiques accumulés au fond de la cupule, en forme une membrane molle et fragile.

Frédéric Currey [1] est le seul botaniste qui ait soupçonné l'existence de cette membrane; une bande jaune, très-visible à l'œil nu, indique cependant toujours sa place au fond de la cupule.

[1] M. Currey doute de l'existence d'une véritable membrane; il serait plus porté à croire que cette zone jaunâtre n'est que l'effet d'une différence de nature entre deux liquides superposés. Cette différence existe en effet, et prouve, à mon avis, la nécessité d'une membrane interposée.

Cette cloison manque quelquefois chez les plantes faibles, aussi dans celles dont la cupule, à défaut de liquide cristallin, ne s'est que peu développée. Il arrive, par contre, dans quelques cas rares, que cette cloison se double d'une membrane de cellulose et s'attache à la membrane externe; elle ne diffère alors en rien des cloisons précédentes.

*C.* Je vais maintenant faire connaître la structure assez compliquée du GLOBULE OU SPORANGE, dont l'anatomie avait jusqu'ici été négligée par tous les observateurs; mais avant de décrire les différentes membranes qui le forment, je crois devoir expliquer en deux mots pourquoi je considère la membrane sous-globulaire comme appartenant au globule; manière de voir qui peut paraître d'autant plus étrange que je viens de classer cette membrane parmi les cloisons qui partagent la tige. Les raisons qui me portent à la rapporter au globule sont : 1° que cette cloison sous-globulaire ne se détache pas du globule au moment de la projection, mais suit le globule, et lui reste adhérent jusqu'à sa destruction par la germination des spores; 2° que cette cloison, quoique insérée effectivement sur la tige, forme cependant morphologiquement la partie inférieure du globule, où elle fait l'effet d'une fausse columelle autour de laquelle se trouve disposé le bourrelet sporifère.

Le sporange des *Pilobolus* est double; deux enveloppes concentriques protégent les spores.

a. *La membrane interne,* ou *sporochlamyde* (pl. II. fig. 8 *d*), est une pellicule fine et transparente qui enveloppe étroitement la masse des spores.

C'est le primordialschlauch qui a conservé sa ténuité primitive; il est beaucoup plus mince que celui que l'on retrouve dans la tige, parce qu'il n'est revêtu d'aucune couche d'encroûtement plasmatique. La sporochlamyde n'est libre que dans sa moitié inférieure; sa partie supérieure adhère toujours, si je ne m'abuse, à la calotte colorée du globule.

La présence de cette membrane interne est très-difficile à constater; je ne suis parvenu à m'assurer de son existence qu'en employant les acides les plus énergiques, et en contournant le globule sous le microscope dans les sens les plus divers.

b. *Le sporange externe,* ou sporange proprement dit, est formé de trois membranes, unies au jeune âge, mais bien distinctes à la maturité du spo-

range, savoir : 1° d'une membrane supérieure, colorée, formant une calotte hémisphérique et se détachant facilement; 2° d'une membrane inférieure, incolore, de forme conique et relevée dans l'intérieur du sporange; 3° d'une membrane médiane, également incolore, particulièrement fine et transparente, et réunissant les deux membranes précédentes.

1. *La membrane supérieure* (pl. II, fig. 8 *e*) forme un véritable hémisphère creux; elle est d'abord incolore et non distincte de l'enveloppe générale du globule; mais, lors de la formation des spores, elle s'épaissit d'une forte couche pigmentaire qui vient s'interposer, pour autant que j'ai pu l'observer, entre cette membrane et la sporochlamyde et n'adhère plus que faiblement à la membrane médiane; on peut l'enlever facilement avec la pointe d'une fine aiguille, et sous le microscope la pression du verre couvreur suffit souvent pour la détacher. M. Currey est le seul botaniste qui ait observé cette disjonction des membranes du sporange, et Corda se trompe certainement en disant, dans le tome VI de ses *Icones : Das peridium ist einfach*.

Cette membrane supérieure est de couleur violette sale, souvent si foncée qu'elle paraît noire, comme les auteurs nous la décrivent communément.

Chez le *Pilobolus oedipus*, la teinte de coloration est uniforme, mais chez le *Pilobolus crystallinus*, elle présente parfois de beaux dessins hexagonaux qui ont la plus grande analogie avec les cellules hexagonales de la choroïde des animaux supérieurs. Ces dessins sont d'une grande régularité; une alvéole principale occupe le centre au sommet du globule et six autres cellules parfaitement semblables se trouvent adossées aux côtés du polyèdre principal. (Pl. II, fig. 12.) Ces alvéoles ont des nuances de coloration, leur centre est ordinairement pâle, et un filet non coloré ou plus pâle les sépare entre elles. J'ai remarqué des dessins semblables, mais de forme ovoïde, sur le sporange de l'*Ascophora Cesatii*. (Pl. II, fig. *E*.)

Il est remarquable que ces dessins ne se produisent pas régulièrement chaque année. En 1859, par un été chaud, ils ornaient tous les globules des *Pilobolus crystallinus* que j'observai; en 1860, l'été étant froid et humide, je ne les trouvai que très-rarement et toujours faiblement indiqués. La cause de ces variations se lie probablement à des influences de lumière et

de chaleur. Remarquons aussi que l'irrégularité d'apparition de ces dessins étant constatée, ils ne peuvent avoir de valeur diagnostique.

Le genre *Ascophora,* qui vient se placer naturellement après les *Pilobolus* dans la série des mucorinées, offre, comme ces derniers, un sporange partagé et discolore.

2. *La membrane inférieure* (pl. II, fig. 8 *a''*) appartient autant, comme nous l'avons déjà dit, à la tige qu'au globule; son point d'insertion n'est pas toujours le même: elle est attachée tantôt un peu à l'intérieur du col court de la cupule, tantôt précisément sur la ligne de jonction de la cupule et de la membrane médiane. Cette dernière position facilite beaucoup la projection.

Cette membrane n'est jamais plane; elle forme dès son apparition un cône creux, une espèce de pivot sur lequel repose le bourrelet sporifère, et celui-ci est doué à cet effet, comme Persoon l'avait déjà remarqué, d'une cavité correspondant exactement aux dimensions du support.

L'anneau et les filaments sporifères dont j'ai parlé dans ma première notice [1] n'existent pas; le premier n'était qu'un pli circulaire, qui se forme assez facilement sous la pression du verre couvreur, et j'avais pris pour des filaments de simples lanières de membrane, provenant de la rupture du sporange. Les spores n'ont aucune adhérence à cette membrane, elles en sont même séparées par la sporochlamyde; une mucosité verdâtre semble cependant relier quelquefois la masse des spores à leur support.

3. *La membrane médiane* (pl. II, fig. 8 *f.*) sert à unir en même temps la membrane supérieure à l'inférieure et le globule à la cellule fructifère: c'est ordinairement au point où ces trois membranes se touchent et se joignent que s'effectue la rupture lors de la projection du globule.

Cette partie médiane du sporange est formée par la membrane extérieure seule, aussi sa transparence permet-elle de distinguer parfaitement les spores à son intérieur; le primordialschlauch, qui devait lui adhérer avant l'organisation du globule, est devenu la sporochlamyde.

Pour achever la description anatomique des *Pilobolus,* je dirai encore un mot de l'organisation générale des *spores,* réservant les différences spécifiques pour notre partie descriptive.

[1] *Notice sur le* PILOBOLUS CRYSTALLINUS, 1859, p. 11 fig. 11.

Le sporange des *Pilobolus* contient un grand nombre de spores (pl. I, fig. 1; pl. II, fig. 14) rondes ou ovalaires selon l'espèce, mais toujours simples, c'est-à-dire sans cloisons; car il arrive de rencontrer des spores didymes, comme cela se voit encore chez d'autres mucorinées et même chez les algues. La spore se compose d'un épispore de cellulose renfermant un protoplasma jaune ou jaune rougeâtre, grumeleux et azoté; ce dernier est contenu, je crois, par un endospore qui représente le primordialschlauch; mais je n'ai jamais pu l'isoler bien clairement du plasma qu'il protége. On distingue encore dans le protoplasma, surtout par l'emploi des acides, des granules solides et quelques vacuoles de dimensions variables; elles sont généralement au nombre de cinq à sept chez le *Pilobolus oedipus*, et au nombre de deux, placées à chaque extrémité de la spore, chez le *Pilobolus crystallinus*. (Pl. II, fig. 14 *b*.) Quant au nombre de spores renfermées dans un sporange, M. Cohn l'évalue de quinze à trente mille, et ce chiffre ne me paraît pas trop fort, surtout pour le *Pilobolus crystallinus*, dont les spores sont relativement beaucoup plus petites que celles du *Pilobolus oedipus*.

# III.

## PARTIE PHYSIOLOGIQUE.

En étudiant les plantes inférieures, on ne s'est occupé depuis trop longtemps que de leur classification, ou tout au plus de la recherche et de la description de leurs caractères anatomiques. L'étude de leur développement, de leur vie, de leurs transformations, de leurs mœurs, si je puis parler ainsi, forme cependant une partie instructive et bien attrayante de leur histoire, peut-être la plus importante et la plus philosophique de toutes. C'est faute d'observations consciencieuses dirigées dans ce sens, que nous voyons encore aujourd'hui la mycologie encombrée de tant de genres incertains et apocryphes.

Je veux donc consacrer ici un chapitre spécial à l'exposé de la vie de ces petits champignons, espérant qu'on ne suivra pas sans quelque intérêt la succession rapide et variée des phénomènes vitaux d'une existence tout exceptionnelle parmi les mucédinées.

1. *Germination.* — Commençons l'histoire de la vie des *Pilobolus* par celle de leur germination. Je décrirai plus particulièrement celle du *Pilobolus oedipus*, que j'ai la mieux suivie; celle du *Pilobolus crystallinus*, au reste, n'en diffère en rien.

Les spores, au moment de leur sortie du sporange, sont parfaitement rondes; un épispore très-visible se distingue de la masse protoplasmatique opaque, qui renferme, outre des granules solides de dimensions variables, quelques vacuoles, quand on les observe dans l'eau. (Pl. I, fig. 1.)

Ces spores sont de grandeur inégale ($\frac{1-3}{300}$ mm.), comme cela se remarque souvent chez les plantes où elles se forment par voie de génération libre (*freie Zellenbildung*).

Les granules solides qu'on y trouve varient en nombre de un à dix; elles ont, pour autant que j'ai pu m'en assurer, la structure ordinaire des cytoblastes et ne possèdent point de membrane propre.

Au moment de la germination, les granules solides et les vacuoles commencent par disparaître, le protoplasma plus clair et finement granuleux devient homogène et plus limpide. En même temps, le contour de séparation, autrefois fortement accusé entre le protoplasma et l'épispore, s'atténue, et la spore, sans changer de forme ou devenant seulement un peu plus ovale, acquiert les dimensions doubles. (Pl. I, fig. 2 *a.*) C'est le protoplasma, dans lequel réside le principe vital, qui s'élabore et se met en contact avec la membrane cellulaire qu'il doit nourrir, au moment où celle-ci va émettre les premiers filaments du mycélium.

Quelque temps après ce premier agrandissement, on remarque, sur un ou plusieurs points de la circonférence des spores, des endroits plus clairs, où le protoplasma paraît plus aqueux et la membrane tégumentaire plus transparente. Ces endroits plus clairs forment d'abord un léger sinus, grandissent ensuite et deviennent enfin de grosses hernies ordinairement sacciformes (pl. I, fig. 2) : c'est le premier pas vers la formation du mycélium. Les spores des *Pilobolus* commencent souvent déjà à germer quand elles sont encore contenues dans leurs sporanges. Cette germination n'est pas parfaitement naturelle; celle que je décris ici a été observée sur des spores se trouvant libres dans la vase nourricière des *Pilobolus.*

Les germinations artificielles, que j'ai produites en plaçant les spores dans de petites capsules remplies d'eau vaseuse, ont toujours marché lentement et ne m'ont fourni que des spores de moindre grandeur, munies de filaments plus grêles ou presque filiformes. (Pl. I, fig. 3.)

On a souvent dit, et d'une manière assez générale, que les mucorinées rejettent leur épispore dans l'acte de la germination; je ne sais si cette remarque est fondée en vérité, toujours est-il sûr que rien de semblable ne se remarque chez les *Pilobolus,* ni chez les *Mucor vulgaris,* Pers., *M. stolonifer, M. tenuis,* Bon., *Ascophora mucedo,* Tode, et *A. elegans,* que j'ai fait germer cette année.

Chez beaucoup de champignons, chez plusieurs algues, par exemple,

pour les oospores des *Vaucheria*, c'est l'endospore qui perce l'épispore pour former les filaments germinatifs; ici c'est plutôt la membrane externe même qui semble s'étendre et se ramifier, comme cela s'observe dans la germination des zoospores des saprolégniées et de beaucoup d'autres algues.

Mais revenons à nos *Pilobolus*. Une fois que les spores commencent à émettre leurs filaments germinatifs, elles se déforment rapidement. C'est tantôt d'un côté, tantôt des deux bouts opposés de la spore, tantôt de plusieurs points à la fois que naissent les prolongements: ce qui donne souvent aux spores germantes les formes les plus bizarres. (Pl. I, fig. 4.)

Ces premiers prolongements ne tardent pas à se ramifier à leur tour, se bifurquant ou se trifurquant sous les angles les plus divers, et les jeunes mycéliums présentent alors un amas confus de gros stolons, plus ou moins rayonnants, et faisant, en petit, l'effet d'une racine de tubéreuse ou d'*Asphodelus*. Cette germination se rapproche d'une manière remarquable de celle de beaucoup d'algues filamenteuses, par exemple, des *Vaucheria*, *Spirogyra*, *Oedogonium*, etc., etc., et surtout de celle des saprolégniées.

A côté de ce premier mode de germination, qui rappelle bien celui des mucorinées, s'en présente un autre, qui me semble plus exceptionnel. (Pl. I, fig. 5.) La spore, après s'être gonflée et étendue, comme dans les cas ordinaires, émet un tube simple qui se renfle de suite en manière de vésicule et devient semblable à la spore qui l'a produit (pl. I, fig. 5 *a*); une troisième et même une quatrième vésicule viennent souvent se placer, selon le même mode de formation, à la suite des premières. (Pl. I, fig. 5 *b*.) Dans certains cas, les utricules germinatifs ne se touchent pas, mais des bouts de tubes les relient entre eux de manière à former un chapelet. (Pl. I, fig. 5 *c*.) Quant au sort ultérieur de ces spores anormales, elles finissent, je crois, par former des mycéliums semblables à ceux que produit la germination ordinaire.

Je ne connais aucun champignon, en dehors des mucorinées, qui offre une germination semblable; elle se rapproche néanmoins de la multiplication des zoosporanges de la *Peronospora devastatrix*, que M. de Bary nous a fait naguère connaître [1]. C'est le cas de faire observer encore ici combien je me

[1] *Sur la formation de zoospores chez quelques champignons*, ANN. DES SC. NAT., tom. XII (1860), p. 243.

suis trompé, dans ma notice sur le *Pilobolus crystallinus*, en croyant que les spores de cette plante émettaient des cellules fructifères sans se transformer préalablement en mycélium.

2. *Mycélium et formation des cellules fructifères.* — La spore en perdant sa forme primitive devient un mycélium, dont les filaments massifs et nombreux rampent, rayonnent, se multiplient et s'avancent de toutes parts. Leur direction est généralement horizontale ou descendante et leur couleur gris jaunâtre, sauf les extrémités filamentaires, qui sont colorées en blanc. La jeune plante s'étend ainsi, pendant quelques jours, dans la vase ou à l'intérieur des bouses de vache avant de se montrer à l'extérieur, et quand elle parait, le mycélium devenu fort, occupe déjà un espace assez considérable.

Le temps nécessaire aux spores pour former un mycélium fructifiant dépend, d'après mes observations, de la température de l'atmosphère et varie de quatre à huit jours. Les jours de pluie contrarient singulièrement leur avancement. Les stolons possèdent une force de pénétration assez remarquable : on les trouve à une profondeur de quatre à cinq centimètres dans le sol qu'ils occupent, et je les ai vus percer un carton humide d'au moins un centimètre d'épaisseur.

Nous venons de voir la formation du système végétatif; la plante, maintenant, doit songer à sa reproduction. A cet effet, un certain nombre de stolons, ou de ramifications des stolons principaux, prennent une direction ascendante et se dirigent vers la lumière : ils vont changer de nature et devenir des cellules fructifères.

Les premiers indices de fructification se trouvent dans l'agglomération d'un protoplasma jaunâtre ou un peu rougeâtre, à l'extrémité des stolons ascendants. C'est toujours à une petite profondeur dans le sol ou à sa surface que se prépare la cellule fructifère; les filaments enfouis plus profondément contiennent un protoplasma plus pâle et moins dense.

Le stolon destiné à devenir cellule fructifère commence par se gonfler légèrement, il s'accroît ensuite rapidement et offre bientôt à son extrémité un renflement sphérique ou ovalaire assez considérable. (Pl. I, fig. 6 *b;* pl. II, fig. 1.) Le filament qui le porte se montre toujours rempli d'un épais

protoplasma. C'est ce tout jeune âge de la cellule fructifère qui a été pris par M. Léveillé pour un *Sclerotium* donnant naissance au *Pilobolus* [1].

La cellule fructifère communiquait jusqu'alors librement avec le mycélium mère; une fois bien remplie de protoplasma, elle s'en sépare par une cloison, toute mince d'abord et à peine perceptible, mais qui ne tarde pas à devenir épaisse et solide. (Pl. II, fig. 2.) On croirait à la formation d'un oogonium de vauchériacée ou de saprolégniée; cependant la cellule fructifère doit encore passer par bien des modifications avant de produire son sporange.

Les deux premiers jours que le mycélium fructifie, les cellules qu'il produit sont peu nombreuses et comparativement plus petites que celles des jours suivants; quand il commence à s'épuiser, les cellules redeviennent également plus petites et plus rares.

Je ferai remarquer, ici, que la cellule fructifère avait été prise par tous les observateurs pour la plante elle-même, tandis qu'elle n'en est qu'une partie, une simple cellule porte-sporange.

3. *Développement de la cellule fructifère.* — Ce développement est assez remarquable pour mériter d'être exposé avec soin. Je vais suivre celui du *Pilobolus crystallinus*, parce qu'il correspond à ma planche II.

La cellule fructifère forme primitivement, comme nous l'avons déjà vu, une vésicule ronde ou ovalaire d'environ un demi-millimètre de diamètre et remplie d'un protoplasma épais et opaque. Une cloison solide occupe sa partie inférieure et la sépare du mycélium. Cette vésicule primitive représente le renflement inférieur de la tige et préexiste à sa formation. M. Ferdinand Cohn se trompe donc en pensant qu'elle n'apparaît que pendant l'allongement de la tige [2].

Le mycélium, durant son développement, n'avait semblé obéir à aucune influence étrangère, maintenant l'heure du jour et l'intensité de la lumière solaire vont régler les destinées de la cellule fructifère avec une régularité presque invariable.

Vers le milieu du jour, entre midi et trois heures de relevée, la cellule fructifère, dont je viens de décrire l'état rudimentaire, commence par mon-

[1] *Mémoire sur le genre* SCLEROTIUM, *Ann. des sc. nat.*, t. XX, 1843.
[2] Cohn, *l. c.*, p. 508.

trer, à l'extrémité opposée à la cellule conique, un allongement de forme également conique, et sensiblement plus clair que la vésicule elle-même (pl. II, fig. 3) : c'est la tigelle qui commence à apparaître.

En même temps un changement s'est opéré à l'intérieur de la vésicule; un liquide clair et limpide, fourni par le mycélium et que je nommerai *liquide cristallin,* pénètre par endosmose à travers la cloison radicale, à l'intérieur de la vésicule et vient occuper le centre inférieur de la masse protoplasmatique sans s'y mêler sensiblement. Je me suis assuré plusieurs fois de la vérité de ce fait en coagulant par un acide fort le contenu des jeunes cellules et en les ouvrant ensuite sous le microscope de préparation.

L'affluence du liquide cristallin, vers l'époque de l'allongement des cellules fructifères, explique très-bien la diminution du protoplasma dans la cellule conique et donne la raison de sa teinte plus pâle et plus transparente. (Pl. II, fig. 2 et 3 *a.*) La couleur blanche du cône d'allongement (pl. I, fig. 18 *b,* et pl. II, fig. 3 *b*) des jeunes cellules est due, si je ne m'abuse, à une autre cause, à la présence de cellulose amorphe, destinée à l'entretien de la membrane cellulaire, qui va considérablement s'allonger en cet endroit. En effet, quand on traite de jeunes cellules par le chlorure de zinc iodé, on voit leur cône d'allongement verdir sensiblement. J'explique cette coloration verte par le mélange du bleu, provenant de la réaction du chlorure de zinc iodé, avec le jaune de l'huile du protoplasma.

Durant l'après-midi, les tigelles, que nous avons vues naître sous forme d'allongements coniques, se développent assez rapidement et deviennent des tubes cylindriques qui atteignent deux tiers à un millimètre de longueur. Leur couleur est d'un beau jaune vitellin et on les prendrait facilement pour de jeunes clavaires perçant la bouse de vache. (Pl. I, fig. 6 *c,* et pl. II, fig. 4 et 5.)

Le protoplasma aussi vient d'éprouver une modification importante. Le liquide cristallin qui a pénétré dans le renflement inférieur de la tige, commence à pousser devant lui, en agissant comme la colonne ascendante d'une pompe foulante, la masse épaisse du protoplasma. Son action, cependant, n'est pas celle d'une surface plane, mais plutôt celle d'une colonne conique qui perce le protoplasma et le force à monter en le pressant obliquement

contre les parois de la tige. Refoulé de cette manière, le protoplasma forme, à l'intérieur de la tigelle, un étui gélatineux dont le centre est occupé par la colonne de liquide cristallin. J'ai remarqué la même disposition du protoplasma chez beaucoup de mucorinées et chez les saprolégniées.

C'est ainsi qu'on voit diminuer insensiblement, puis disparaître tout le protoplasma jaunâtre, d'abord dans le renflement inférieur, ensuite dans la tige même, et que s'explique tout naturellement le changement de couleur de la tige, qui, jaune dans les premières heures de l'après-midi, se trouve incolore et transparente vers le soir. Une partie de protoplasma jaune reste cependant toujours dans le renflement inférieur de la tige, à cause de sa forme évasée, et le rend plus opaque que la jeune tigelle. (Pl. II, fig. 5 et 6.) Vers le soir, on voit les sommets des jeunes tigelles se gonfler sensiblement; le courant cristallin y refoule et y condense tout le protoplasma, et ces renflements égalent bientôt ou dépassent même souvent le volume des renflements inférieurs.

La coloration jaune du globule supérieur n'est que passagère; à la suite d'une décomposition chimique qui se fait dans le protoplasma, l'hémisphère supérieur du globule passe au bistre, et prenant des teintes de plus en plus foncées, passe enfin à un beau noir-violet. Ce n'est pas cependant le protoplasma qui change de couleur, mais un dépôt pigmentaire qui vient revêtir très-régulièrement et exclusivement l'hémisphère supérieur du globule. C'est ordinairement entre huit heures du soir et minuit que s'accomplissent ces variations de couleurs.

Le globule va maintenant s'isoler à son tour et devenir un véritable sporange. Pendant la nuit, une cloison se forme à sa base et vient le séparer pour toujours de la tige. Ce moment n'est pas le même pour toutes les plantes et varie de neuf heures du soir à deux heures du matin. Cette cloison se formant sous la pression du courant cristallin, ne sous-tend pas le globule comme une surface plane, mais prend la forme conique qu'elle conservera jusqu'au moment de la projection. (Pl. II, fig. 8 $a''$.)

La cloison sous-globulaire vient donc de séparer le sporange de la cellule fructifère; le courant cristallin continue néanmoins à faire monter dans la tige de nouvelles eaux, qui, retenues par cette cloison, doivent nécessairement exercer une pression latérale en cet endroit; il en résulte une

dilatation assez régulière de la partie supérieure de la tige, qui se gonfle et se ballonne sous le globule coloré. Je donne à ce renflement le nom de *cupule,* parce qu'il fait l'effet d'une petite coupe de cristal qui supporterait une boule d'ébène. C'est pendant la dernière moitié de la nuit qu'on remarque ordinairement cet évasement et que les cupules se perfectionnent.

Plusieurs causes peuvent arrêter ou retarder le développement des cellules fructifères; par exemple le manque d'humidité nécessaire et la trop grande sécheresse du sol nourricier; les pluies de longue durée, et enfin un abaissement considérable de température. J'ai remarqué ainsi que lorsque le thermomètre descendait sous zéro ou n'indiquait que deux ou trois degrés au-dessus, toute végétation semblait suspendue pendant plusieurs jours. J'ai même vu, cet hiver, de jeunes cellules fructifères, surprises par les neiges, passer près de trois mois sous cette bienfaisante couverture et se développer, au mois de mars, lors de la fonte de celles-ci. J'ai examiné dans la partie anatomique de ce mémoire, pag. 19, l'influence qu'exerce, dans ces cas, sur la membrane cellulaire, un séjour prolongé du protoplasma à l'intérieur des jeunes cellules.

Ces divers phénomènes de développement se répètent tous les jours, pour le *Pilobolus crystallinus*, avec une régularité et une précision qu'on ne peut se défendre d'admirer; seulement ils se produisent à une heure un peu plus avancée et marchent plus lentement pendant les jours froids et sombres.

Quand on les cultive longtemps en captivité, et qu'on les soustrait par là même, du moins en partie, aux influences atmosphériques, leur régularité n'en est guère troublée, mais quand on les retient plusieurs jours dans l'obscurité, ils finissent par s'écarter de leurs habitudes régulières et se développent à toutes les heures du jour ou de la nuit, jusqu'à ce que, rendus à la lumière, il se hâtent d'obéir à ses douces lois.

Le *Pilobolus oedipus* est plus irrégulier et montre souvent en même temps ses cellules fructifères à divers états de perfectionnement. Il est vrai que je ne l'ai jamais trouvé en rase campagne, mais vivant à l'ombre des broussailles. En captivité, il dérange facilement ses habitudes et s'éloigne sensiblement, sous ce rapport, du *Pilobolus crystallinus*.

Nous en sommes venus au moment où les cellules fructifères, au lever

du jour, se montrent comme autant d'urnes gracieuses toutes chargées de perles cristallines et vont achever la maturation de leurs spores pour les lancer au loin avec leurs sporanges bicolores. Mais avant de décrire ce phénomène, le plus important de tous, je dois toucher quelques points non moins intéressants de la vie de ces petits champignons.

4. *Courants et vacuoles.* — Existe-t-il dans la cellule fructifère des *Pilobolus*, en dehors du mouvement lent et presque imperceptible de la colonne cristalline ascendante, d'autres courants charriant ou déplaçant le protoplasma à l'intérieur de cette cellule?

M. Cohn[1] a cru observer des courants de cette nature, souvent assez nombreux, s'anastomosant entre eux et transportant le plasma des parois de la cellule vers sa partie supérieure. Pour moi, malgré des essais multipliés, jamais je n'ai pu observer rien de semblable. Quand on examine une jeune cellule fructifère (pl. I, fig. 18), on voit bien un espace plus clair occuper le centre de la cellule, et deux bandes opaques et obscures en suivre les parois pour se réunir à son sommet (même fig. *a, a*); mais ces bandes ne sont pas des courants et je n'en ai jamais vu à l'intérieur de cet espace. S'il s'en trouvait, on pourrait cependant les apercevoir très-facilement, car, quand on blesse une cellule semblable sous le microscope, soit fortuitement, soit à dessein, des déplacements de liquide en résultant nécessairement, on voit se former des filets de protoplasma qu'on peut suivre aussi facilement que ceux qu'on observe dans les cellules de *Vallisneria* ou de *Tradescantia*. Corda dit également n'avoir jamais trouvé de courants dans les *Pilobolus crystallinus*.

Les bandes opaques dont je viens de parler correspondent aux parois de l'étui protoplasmatique, et l'espace clair du milieu représente la colonne cristalline. Tout ceci, au reste, n'est qu'un effet de lumière, et l'on déplace ces bandes à volonté en changeant le foyer du microscope.

Je crois donc devoir n'admettre à l'intérieur des cellules fructifères qu'un courant unique, lent et uniforme, mais dont les effets sont multiples, puisqu'il produit : 1° le renflement du globule; 2° l'évasement de la cupule et 3° l'éjaculation des spores.

Quiconque a observé quelque temps dans l'eau de jeunes cellules de

[1] F. Cohn, *l. c.*, p. 509, 510, pl. 51, fig. 7 *a* et 8.

*Pilobolus* a dû voir s'y former de nombreuses cellules vésiculaires (pl. I, fig. 17) se multipliant à vue d'œil et remplissant quelquefois presque tout l'intérieur des cellules fructifères. Leur contour est assez précis et finement granuleux et leur aspect celui des vacuoles ordinaires. Sont-ce de véritables cellules munies d'une membrane tégumentaire? On serait tenté de le croire, d'autant plus qu'elles se maintiennent dans l'eau quand on fait crever la cellule fructifère; mais M. Hugo von Mohl [1] a déjà reconnu, dans des formations semblables, que ce ne sont que des globules aqueux enveloppés d'une couche de protoplasma et, en effet, ils disparaissent, quand on les presse entre deux verres, sans laisser de traces de pellicule tégumentaire. La même chose s'observe chez les *Mucor, Ascophora, Polyactis*, etc., etc. Corda avait aussi rencontré ces formations en étudiant ses *Ascophora*[2]; mais il les avait crues, à tort certainement, propres à une espèce particulière. Elles ne sont dues qu'à l'action de l'eau pénétrant, par endosmose, au milieu du protoplasma au moment de son activité génératrice.

5. *Formation des cloisons.* — Il n'est aucun point de la vie des *Pilobolus* qui m'a coûté autant de peine à éclaircir que celui de la formation des diverses cloisons qui, durant le développement de la tige, viennent diviser cette immense cellule en trois parties inégales.

Ces cloisons se forment malheureusement toujours dans des renflements opaques et remplis d'un protoplasma épais, qui permettent rarement une observation heureuse.

Sur un grand nombre d'essais, quelques-uns m'ont cependant pleinement satisfait, et j'ai le mieux réussi en traitant les jeunes cellules que je voulais examiner par le chlorure de zinc iodé et en les reprenant ensuite par l'acide nitrique ou sulfurique concentré. J'obtenais ainsi de fortes contractions de protoplasma, des colorations et des décolorations successives qui facilitaient beaucoup l'observation.

Je me bornerai à donner ici le résumé de mes recherches dont l'exposé pourrait être long et fastidieux.

*a.* La cloison radicale (pl. I, fig. 15 *d*) et la cloison sous-globulaire (pl. I,

[1] *Ueber die Saftbewegung im inneren der Zellen*, Bot. Zeit., 1846, p. 77-78.

[2] *Icones Fungorum*, tom. II, p. 20, tab. XI, fig. 80, (4 et 6.)

fig. 16 *d*) se forment de la même manière. La cloison sous-cupulaire a une autre origine.

*b*. La cloison radicale apparait la première, la cloison sous-globulaire se forme la seconde, et la cloison sous-cupulaire est la dernière à se montrer.

*c*. Cette cloison sous-cupulaire se forme lentement de matières protoplasmatiques qui descendent au fond de la cupule après la formation de la cloison sous-globulaire et s'y organisent en membrane. Elle est de nature protéinique et peu résistante.

*d*. Les deux autres cloisons se forment de la manière suivante :

Au moment marqué par la nature, le primordialschlauch commence par faire un pli rentrant, dont l'intérieur est occupé par une mince saillie circulaire de la membrane cellulosique. Je ne sais si c'est le primordialschlauch qui s'étrangle, comme chez les saprolégniées au moment de la formation des zoospores, ou bien si c'est la jeune cloison naissante qui le force à reculer. Cette dernière opinion me semble la plus probable. La cloison cellulosique s'accroît, le protoplasma et le primordialschlauch qui l'entoure s'étranglent en même proportion, et la tige semble coupée par un diaphragme membraneux, percé d'un trou rond par lequel le protoplasma passe encore. (Pl. I, fig. 16.) Enfin, le diaphragme se ferme et le primordialschlauch, qui s'est étranglé et accru graduellement, le revêt sur les deux faces. (Pl. I, fig. 15.)

*e*. Ces deux cloisons sont extrêmement minces au jeune âge; le primordialschlauch est également d'une ténuité remarquable à cette époque; mais plus fard ils s'épaississent tous et se laissent facilement dédoubler dans les cellules plus âgées.

*f*. La formation de ces cloisons rappelle assez exactement celle que Hartig a observée chez les *Vaucheria* et Pringsheim chez les *Spirogyra*.

6. *Gouttelettes cristallines.* — Scopoli et tous les auteurs qui ont parlé du genre *Pilobolus* se sont plu à décrire ces nombreuses gouttelettes limpides, semblables à des gouttes de rosée, qui ornent la tige et la cupule de ces gentils champignons et leur donnent cette parure de perles si gracieuse; mais là se sont bornées leurs observations.

Persoon [1], cependant, émit l'opinion que c'était le liquide intérieur de la

[1] *Observ. myc.*, pars I, p. 76.

plante qui transsudait; M. Léveillé[1], au contraire, tâcha de prouver que ces gouttelettes n'étaient que des vapeurs acqueuses qui s'élevaient d'alentour et venaient se condenser sur le *Pilobolus*. M. Cohn[2] semble préférer la première de ces opinions.

Un exámen attentif décide, il me semble, facilement cette question. D'abord ces gouttelettes ne sont pas de simples gouttes de rosée, puisqu'elles rougissent le papier de tournesol, comme le fait l'eau fortement chargée d'acide carbonique, et qu'elles laissent un résidu organique gluant quand on les fait évaporer sur une lame de verre au-dessus de la lampe d'alcool. Deux observations viennent encore contrarier singulièrement la théorie de la condensation des vapeurs ambiantes, c'est: 1°, que ces gouttelettes ne se remarquent point sur le globule[3], mais seulement sur les parties remplies de liquide cristallin et, 2°, qu'elles n'apparaissent que quand le protoplasma a été remplacé par ce liquide.

J'ai observé ceci parfaitement, pendant une nuit, sur une grande peuplade de *Pilobolus oedipus*, qui offrait des individus à tous les degrés de développement. Les tout jeunes, encore remplis de protoplasma, ne montraient pas de gouttelettes; on les voyait naître sur les cellules plus âgées, mais encore jaunes; enfin elles étaient déjà assez grosses sur les cellules parfaites dont le globule commençait à se colorer. Les conditions atmosphériques étant les mêmes pour toutes ces cellules, il faut nécessairement chercher ailleurs la cause de la formation de ces gouttelettes.

Je crois donc que les gouttelettes cristallines qui caractérisent toutes les espèces du genre *Pilobolus*, se forment aux dépens de la séve de ces plantes, en vertu de la pression intérieure de la colonne cristalline qui est incontestable; formation, au reste, singulièrement favorisée par l'absence de lumière et l'humidité de l'air qui accompagnent le développement nocturne de ce champignon.

Une nouvelle preuve de cette assertion est que, quand on fait dessécher

[1] *Mém. de la Soc. Linn. de Paris*, tom. IV, p. 630-31.

[2] *L. c.*, p. 520.

[3] Les gouttelettes qu'on trouve parfois sur le globule sont rares, très-petites et s'y sont formées avant l'apparition de la cloison sous-globulaire.

le sol des *Pilobolus*, le liquide cristallin devenant nécessairement plus rare, les gouttelettes diminuent également et finissent même par disparaître. J'ai répété ces expériences plusieurs fois, tant sur le *Pilobolus crystallinus* que sur le *P. oedipus*.

Une transsudation analogue, sous forme de gouttelettes cristallines, est bien connue chez un certain nombre de phanérogames. La mycologie nous en offre des exemples à son tour. L'*Agaricus lacrymabundus*, Bull., semble émettre du tranchant de ses lamelles de grosses larmes, quand le temps est humide; les *Polyporus squamosus*, Fr., et *suaveolens*, Fr., excrètent souvent au jeune âge des gouttelettes légèrement jaunâtres. J'ai observé la même chose pour la *Telephora purpurea* et le *Merulius destruens*, Pers.; les mycéliums de la *Peziza sclerotiorum*, Lib., du *Penicellium glaucum* et du *Sepedonium mycophilum* (*Hypomyces chrysospermus*, Tul.) produisent également de grosses gouttes claires, quand leurs filaments se serrent pour former des masses sclérotiennes; enfin le *Mucor vulgaris*, l'*Ascophora elegans*, Cd.[1], et différents *Polyactis* m'ont offert plus d'une fois de semblables gouttelettes, quand ils croissaient dans des endroits humides.

Les champignons, au reste, doivent transpirer comme la généralité des plantes, et cette transpiration doit plus ou moins être en rapport avec la rapidité de leur développement; je m'en suis assuré souvent en plaçant des champignons des familles les plus diverses, parfaitement isolés de tout support humide, sous des lames de verre ou d'acier.

7. *Projection du globule*. — Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, la formation et le développement des cellules fructifères. Vers le matin, le globule se trouve être complet et parfait. Vous voyez alors des milliers et des milliers de cellules brillantes couvrir les bouses de vache ou les ondulations de la vase nourricière; les rayons du soleil naissant leur communiquent une blancheur éclatante, et, venant se décomposer dans les innombrables sphères de cristal qu'ils rencontrent, vous prodiguent toutes les couleurs du spectre solaire. Rien de plus beau que ces légions de légères cellules, habillées de perles cristallines et portant chacune un sporange coloré dont le violet

[1] Cette plante n'appartient pas véritablement aux *Ascophora*, puisqu'elle ouvre son sporange comme les *Mucor*.

foncé tranche admirablement sur la blancheur des cupules. Toutefois ces grâces et cette beauté doivent disparaître avec le jour : ordinairement entre huit et dix heures du matin, quand le soleil s'est élevé et que la lumière a acquis une certaine intensité, on voit crever, les unes après les autres, toutes ces élégantes cupules projetant perpendiculairement et avec force leurs petits globules sporifères. Dans le silence de l'observation vous entendez distinctement le bruit des cupules qui crèvent et dont les détonations se succèdent quelquefois comme un long feu de peloton. Mais bientôt tout rentre dans le calme, tout a disparu, et on ne trouve plus que les pellicules arides de ces champignons éphémères et quelques sporanges délaissés.

Il était curieux de constater à quelle hauteur le globule pouvait être lancé. Les auteurs parlent de quelques pouces de distance, M. le docteur Guigneau, plus heureux, observa la projection à une hauteur de cinquante centimètres [1]. J'ai trouvé plus encore. Plaçant au-dessus des colonies de *Pilobolus,* des écrans de papier blanc que j'élevais tous les jours, j'ai pu constater de la manière la plus positive que les globules peuvent être lancés à des hauteurs de soixante-trois centimètres, quatre-vingt-onze centimètres et même d'un mètre cinq centimètres, c'est-à-dire à une hauteur surpassant plus de trois cents fois celle du champignon lui-même.

Ces données disent assez que les hauteurs obtenues varient d'un jour à l'autre; j'ajouterai que c'est le *Pilobolus oedipus* qui me semble posséder la plus grande force de propulsion.

Le globule lancé décrit une parabole plus ou moins étendue, selon la position plus ou moins inclinée de la cupule au moment de la projection, et vient retomber sur les corps environnants. Il est remarquable que, soit que le globule retombe naturellement, soit qu'on le reçoive, au milieu de sa course, sur une surface verticale ou fortement oblique, quelle que soit la distance qu'on observe, on le retrouve toujours offrant supérieurement son hémisphère coloré et se collant par l'autre, plus faible, au corps qui le reçoit. Sur quatre cent treize globules que je comptais un jour, après les avoir reçus sur un feuillet de papier blanc, trois seulement me montraient leur côté concave.

[1] *Addition à la note sur le* PILOBOLUS CRYSTALLINUS (14 janv. 1853), *Actes Soc. Linn. de Bordeaux,* t. XVIII, 3[me] liv.

Il est très-difficile d'observer la projection du globule, parce que les cellules fructifères disparaissent comme par enchantement : vous admirez une de ces cellules, belle et fraiche, et voilà qu'en un clin d'œil elle s'évanouit, et cela avec une rapidité telle que l'observateur le plus attentif ne peut saisir le moindre mouvement.

Aucun phénomène précurseur ne vient annoncer cette disparition. Les gouttelettes cristallines découlent, il est vrai, quelque temps avant la projection, mais c'est leur propre poids et leur augmentation de volume, qui s'est incessamment accru pendant toute la nuit et une partie de la matinée, qui les forcent à se réunir et les fait couler le long des tigelles, entraînant avec elles toutes les gouttelettes qu'elles rencontrent. Entre ce fait et celui de la propulsion du globule il n'y a, ce me semble, aucune relation. Vers l'époque de la maturité, on voit cependant le globule monter lentement, comme un bouchon poussé par un gaz élastique, et la cellule entière souffrir une forte distension; au moment de l'éjaculation même, on remarque un petit ébranlement, une espèce d'élancement : voilà tout ce qu'on peut saisir du phénomène.

Après la projection, la cellule fructifère se retrouve flasque, presque aride et couchée contre le sol; d'autre fois, quand l'éjaculation a été probablement moins violente, elle reste quelque temps debout, et une grosse goutte limpide sortant de la cupule vient remplacer le sporange. (Pl. II, fig. 10.) Cette goutte grandit visiblement et force la tigelle à s'incliner d'abord, puis l'entraîne à terre, où elle ne tarde pas à s'affaisser et à se vider entièrement. C'est dans cette goutte qui couronne la cupule béante que se remarque, avec le simple grossissement de la loupe, ce singulier mouvement gyratoire dont Ehrenberg, Fries, Currey et M. le docteur Guigneau nous ont parlé; je l'expliquerai dans le paragraphe prochain.

Quelle est maintenant la cause de la projection du globule? Quel est le puissant et mystérieux ressort, qui, pour servir les vues de la Providence, lance ainsi dans les airs, à plus d'un mètre de hauteur, le sporange d'un pauvre et petit champignon?

Avant d'exposer et d'établir ma manière de voir à ce sujet, il ne sera pas sans intérêt de rechercher et de comparer les opinions, les hypothèses

souvent bien ingénieuses, des différents auteurs qui ont voulu expliquer ce mystère.

Les premiers observateurs n'avaient fait que constater la durée éphémère des *Pilobolus, Tode*[1], le premier, rechercha la cause de la projection.

Le renflement de la tige, dit-il, se remplissant sans cesse de nouvelles eaux que lui apporte la tigelle, ou recevant peut-être de celle-ci une impulsion irritante, crève subitement et lance au loin, souvent même au visage de l'observateur, le chapeau qu'il porte. Cette explication se rapproche de bien près de la vérité; c'est la meilleure de toutes celles qu'on a tentées depuis.

*Bulliard*[2] comprend le phénomène d'une autre façon. Pour lui, il n'y a pas de projection, les cupules crèvent latéralement, s'arrosant mutuellement de gouttelettes nombreuses, et s'affaissent ensuite sans perdre leurs globules. Belle invention, qui expliquerait en même temps l'origine des gouttelettes cristallines, mais qui tombe devant la simple observation. Il arrive que les cellules fructifères se dessèchent sans lancer leurs sporanges, toutefois il n'y a jamais de rupture latérale.

*Persoon*[3], après de longues recherches, crut pouvoir expliquer ainsi la disparition du globule. La cupule, dit-il, se termine en pointe sur laquelle est posé le sporange, qui a reçu à cet effet une cavité particulière. Le soleil ou la chaleur du jour venant ensuite à échauffer le liquide qu'elle renferme, la cupule se dilate, élargit sa pointe, et fait sauter ainsi le globule qu'elle porte. Persoon avait senti lui-même la faiblesse de cette explication qu'il donne sous la réserve : *forte talis est*.

L'hypothèse de *Schumacher*[4] n'est pas moins ingénieuse et semblait indiquée par la nature elle-même. J'ai déjà dit que le globule, après la projection, est souvent remplacé par une grosse goutte transparente qui se maintient parfois assez longtemps; Schumacher en fait une cellule vésiculaire qui, sortant brusquement de la cupule, chasse le sporange avec l'élasticité d'un

[1] *Schrift. d. Nat. Berlin. Ges.*, B. V, p. 46.
[2] *Champ. de France*, t. I, p. 111, fig. 480.
[3] *Observ. Mycol.*, pars I, p. 76.
[4] *Énum. Plant. Sael.*, pars II, p. 188.

ressort. C'est une double erreur, car cette vésicule n'est qu'une simple goutte de liquide cristallin, et elle n'apparaît qu'après la propulsion du globule séminifère.

L'idée de *Linck* [1] est meilleure; il croit à une contraction générale de la cellule fructifère, qui détermine une explosion et fait partir le sporange. L'action du courant ascendant, quoique incontestable, est méconnue dans cette manière de voir, qui n'est, du reste, qu'une hypothèse probable.

M. *Ferdinand Cohn*, dans son beau mémoire sur le *Pilobolus oedipus* [2], n'admet aucune des explications précédentes, et assigne pour cause du phénomène la tension et l'élasticité de la cloison sous-globulaire. Selon lui, l'implétion toujours croissante de la cupule surtend et presse cette membrane contre le globule, qui finit par céder; cette cloison se relève alors avec élasticité, projette le sporange, et reste adhérer à la cupule sous forme d'opercule conique, comme le représentent les figures 12 et 13 de sa seconde planche.

Malheureusement deux faits d'observation viennent contredire cette théorie.

1° La cloison sous-globulaire affecte la forme conique dès sa naissance, comme je m'en suis assuré maintes fois; longtemps avant la projection, avant même que la formation des spores soit achevée, son sommet a pénétré jusque tout près de la membrane supérieure du globule, et les spores l'entourent comme un bourrelet jaunâtre : ce n'est donc pas en se relevant brusquement que cette cloison peut chasser le globule.

2° La cloison sous-globulaire ne se retrouve pas d'ordinaire sur la cupule après la projection. Dans l'immense majorité des cas, il y a éjaculation violente du liquide contenu dans la cupule, et ce n'est pas seulement le sporange strictement dit, mais encore la cloison sous-globulaire, et même quelquefois une partie de la membrane interne de la cupule, qui sont lancés dans les airs. Puisque cette cloison est lancée elle-même, ce n'est pas elle qui peut projeter le globule dont elle fait partie. Les preuves de cette assertion sont faciles à fournir : ainsi on trouve les cupules ouvertes et béantes après la projection (pl. II, fig. 11); examinez les sporanges après l'éjacula-

[1] *Abhand. der Berl. Nat. Gesel.*, ann. III, pars IV.

[2] F. Cohn, *l. c.*, pp. 516 et 517, tab. LII, fig. 12 et 13.

tion, vous y retrouverez toujours la cloison sous-globulaire; enfin si vous recevez les globules, au moment de leur projection, sur une lame de verre ou sur un carton noir, vous y verrez facilement les gouttelettes du liquide cristallin qui ont formé le jet d'éjaculation.

Je ne puis donc admettre l'explication de M. Cohn, qui ne serait, tout au plus, applicable qu'à un seul des divers cas que la nature nous présente.

D'après mes observations, la cellule fructifère peut périr de cinq manières différentes :

1° Quelquefois elle s'affaisse sans projection aucune et se dessèche avec son sporange, comme chez le *Mucor caninus* et l'*Ascophora Cesatii*[1]. Ce cas est assez rare.

2° D'autres fois, la partie supérieure du globule se détache circulairement, et la cloison sous-globulaire seule reste adhérer à la cupule en guise d'opercule conique. (Pl. II, fig. 9.) Ce cas se présente quand le mouvement de propulsion n'a pas été assez vif pour lancer le globule entier, mais cependant suffisant pour rompre la membrane médiane du globule, la plus délicate de toutes. Il peut être produit aussi par une adhérence extraordinaire de la cloison sous-globulaire à la cupule, et j'ai, en effet, observé des cas de solidité de soudure extraordinaire. Il se rencontre encore souvent sous le microscope, quand on enlève aux cellules fructifères leurs sporanges au moyen d'une aiguille, ou par la pression ou le déplacement du verre couvreur. C'est probablement ce qui aura fait croire à M. Cohn que tel était le procédé ordinaire de la nature. La cellule, ainsi privée de son sporange, ne tarde pas à disparaître.

3° Dans la généralité des cas, le globule entier et une partie du liquide cristallin sont lancés avec une vivacité remarquable, et la cellule s'affaisse peu après : c'est le mode normal que je vais expliquer tout à l'heure.

4° Il arrive que la cupule crève par son milieu, suivant une ligne circulaire, mais irrégulière. J'ai produit ce cas artificiellement en arrosant le *Pilobolus oedipus* après une longue sécheresse.

5° Enfin, dans des conditions également exceptionnelles, quand les *Pilo-*

[1] Voyez la quatrième partie de ce Mémoire.

*bolus* manquent de liquide nécessaire pour la projection, les cellules fructifères se conservent plusieurs jours, et les spores, entrant en germination, soulèvent elles-mêmes l'hémisphère coloré du globule et se répandent à l'extérieur.

Je ferai remarquer ici que, sur des milliers de globules que j'ai examinés, jamais je n'ai observé la rupture de leur sommet telle que Corda la décrit et la figure [1].

La véritable cause de la projection se trouve, si je ne m'abuse, dans le courant ascendant dont j'ai déjà parlé plus d'une fois.

Quand diverses cloisons sont venues diviser la cellule fructifère, le liquide cristallin continue néanmoins d'y pénétrer par endosmose. L'exsudation des gouttelettes cristallines la décharge, il est vrai, d'une partie de ses eaux surabondantes; mais cette transpiration n'est pas en rapport avec l'activité et la durée du phénomène d'endosmose, qui se continue pendant douze à quinze heures. En supposant, à bon droit, que les gouttelettes forment la partie la plus claire du liquide intérieur, cette exsudation devrait même activer le phénomène en augmentant la densité du liquide de la cupule. Il en résulte enfin une implétion extrême qui provoque une réaction de la part de cette cellule élastique, et détermine ainsi l'explosion de la cupule. Une partie du liquide interne doit se projeter nécessairement en ce moment, comme l'observation le confirme, et la cupule cède à l'endroit le plus faible, qui est évidemment celui où le globule n'est retenu sur la tige que par deux minces membranes. La nature a d'ailleurs probablement préparé d'avance la désunion des membranes, car la cloison sous-globulaire, qui au jeune âge n'était qu'un prolongement latéral et continu de la membrane de la cupule, ne s'y rattache plus vers la maturité que par une suture. L'action du courant ascendant est si nécessaire à la projection, que quand celui-ci fait défaut ou n'est que très-faible, parce que le sol des *Pilobolus* est entièrement desséché, la projection peut être retardée de plusieurs jours, ou même n'avoir pas lieu. Un arrosement opportun détermine l'explosion dans des cas semblables, comme j'en ai fait plusieurs fois l'expérience.

Le volume d'eau assez considérable qui, en partie, est projeté avec le globule

[1] *Icon. Fung.*, I, p. 22, tab. VI, fig. 206. — *Anleitung zur Mycologie*, p. LXIX.

et qui, d'autre part, sort de la cupule quelque temps après l'explosion, et la diminution de volume de la cellule fructifère après le phénomène, constatent encore la forte distension que celle-ci a dû éprouver avant de lancer le sporange.

A cette première cause, insuffisante peut-être pour produire elle seule, dans les cas ordinaires, une pareille projection, viendrait s'en ajouter une seconde : un mouvement de contraction générale de la membrane cellulaire des cellules fructifères, déterminé par l'action de la lumière. La lumière est le grand agent de l'excitabilité végétale; c'est elle qui provoque ces mouvements quasi spontanés que nous remarquerons chez le *Mimosa pudica*, le *Robinia speudo-acacia*, chez les *Oxalis*, les *Phaseolus*, chez le *Drosera rotundifolia*, etc., etc. Or l'influence de la lumière sur les *Pilobolus* et sur le phénomène de la propulsion est ici incontestable : de nombreuses observations le prouvent; ainsi :

1° Contrairement à ce qui s'observe chez les autres mucorinées, les cellules fructifères des *Pilobolus* recherchent la lumière avec une avidité sans exemple. J'ai cultivé le *P. oedipus* et le *P. crystallinus* pendant plusieurs mois dans ma chambre de travail; non-seulement leurs tiges se dirigeaient toujours vers les fenêtres, mais elles se courbaient en arc et se couchaient tout plat par terre pour trouver la lumière. Si je les enfermais dans une petite maisonnette de carton, percée d'une seule fenêtre, toutes les jeunes tiges se dirigeaient vers cette ouverture. Si le soir, au moment où les jeunes tiges commençaient à s'incliner vers la lumière, je donnais aux colonies une position inverse, les cellules fructifères prenaient une nouvelle direction, celle de la lumière. Le redressement n'avait cependant plus lieu quand les cellules fructifères n'étaient plus très-jeunes.

2° Pendant les jours sombres et pluvieux, les globules sont lancés beaucoup plus tard que pendant les jours clairs et sereins : aux mois de juillet et d'août, la différence était parfois de trois heures. De même, à mesure que les jours se raccourcissent et que la lumière solaire diminue par nos brumes d'hiver, l'heure de la projection se trouve retardée et finit par coïncider avec les premières heures de l'après-midi.

3° On peut reculer à volonté le moment de la propulsion en plaçant les *Pilobolus* dans l'obscurité. Le manque de lumière n'empêche cependant pas

entièrement le phénomène, mais peut facilement le retarder de douze à quinze heures.

J'ai parfois disposé dans ma chambre des séries de petites colonies de *Pilobolus*, leur ménageant une lumière graduée au moyen d'écrans de carton; les premières recevaient une lumière vive, tandis que les dernières se trouvaient presque dans l'obscurité; la durée des cellules fructifères coïncidait alors parfaitement avec la quantité de lumière perçue. En automne, à l'époque de la chute des feuilles, combien de fois n'ai-je pas trouvé, même après midi, des *Pilobolus* qui avaient conservé leur cellules fructifères à l'ombre de quelques feuilles tombées par hasard sur les bouses de vache, tandis que les cellules exposées à la lumière avaient crevé depuis longtemps.

4. Enfin on peut faire la contre-expérience en soumettant à l'action de la lumière des *Pilobolus* conservés dans l'obscurité. Les explosions commencent après quelques minutes et se succèdent rapidement quand les cellules fructifères sont parvenues au degré de maturité voulue.

Tout ceci prouve à l'évidence l'influence de la lumière, et son action étant suivie de ce mouvement d'élancement qui accompagne la projection, il est possible, je dirai même très-probable, que la lumière est un des agents qui déterminent le phénomène. Le mouvement de contraction de la membrane cellulaire n'est cependant qu'une supposition, car il est impossible de l'observer; mais cette hypothèse me semble légitime et parfaitement naturelle.

Ces deux causes, la réaction due à l'implétion d'endosmose et la contraction cellulaire déterminée par l'influence de la lumière, agissant en même temps et dans le même sens, c'est-à-dire faisant contracter la cellule fructifère, doivent nécessairement faire monter vivement la colonne de liquide cristallin, et c'est son éjaculation qui détache et chasse le globule. La première de ces causes me semble principale et déterminante, la seconde ne me paraît que secondaire et auxiliaire.

On trouve également en phanérogamie quelques exemples de projection du liquide contenu dans les cellules.

Quand on arrache rapidement un fragment d'épiderme de la face inférieure d'une feuille de *Lycium barbarum*, de *Primula auricula*, d'*Iris* et de plusieurs monocotylédonées, on voit le liquide intracellulaire se projeter

comme un petit nuage roriforme [1]. La cause de cette éjaculation n'est certainement pas la même que chez les *Pilobolus*, mais le fait a néanmoins quelque analogie avec le phénomène qui nous occupe, et doit probablement s'expliquer aussi, du moins en partie, par l'irritabilité et la contractibilité des cellules blessées.

La chaleur, loin de favoriser la projection du globule la contrarie, et quand on expose des cellules fructifères à une chaleur artificielle ou bien aux rayons du soleil traversant un verre coloré, elles perdent bientôt leur turgescence et ne tardent pas à se flétrir. L'influence du courant électrique n'accélère non plus en rien le phénomène, soit qu'on fasse passer le courant induit par le rhizome radicellaire, ou plus directement par la cupule elle-même.

Puisque j'ai parlé dans ce paragraphe de l'influence de la lumière, je dirai ici que son absence agit sur ces petits champignons comme sur la généralité des plantes, et a pour résultat de produire des tiges démesurément grêles et longues; j'en ai rencontré qui mesuraient un centimètre de longueur et davantage.

8. *Formation des spores.* — Il n'est guère possible d'observer directement dans le sporange la transformation du plasma en spores, vu l'opacité de la membrane supérieure. J'ai donc dû me contenter d'ouvrir sous le microscope un grand nombre de sporanges à divers états de maturité pour suivre les changements que subit son contenu.

Les spores se forment chez les *Pilobolus*, comme chez les mucorinées, par voie de génération libre.

La cloison sous-globulaire une fois formée, le protoplasma commence par se condenser et s'épaissir, et le primordialschlauch, qui va devenir la sporochlamyde, semble se détacher de la membrane cellulosique, mais seulement dans l'hémisphère inférieur du globule, pour envelopper étroitement les spores. Une semblable désunion de membrane s'observe chez les saprolégniées au moment de la formation des zoospores.

Le protoplasma se modifie en même temps, les granules qui y préexistaient grossissent considérablement et une gélatine incolore commence à s'y

[1] Welker, *Notiz über das Ausspritzen des Saftes beim Zerrissen saftiger Pflanzentheile*, Jahrbuch f. wissen. Botanik von Dr Pringsheim, II Band, III Heft, pp. 468-469.

remarquer; alors, à un moment donné, il se fait une division générale du protoplasma en autant de pelotes gélatineuses qu'il y aura de spores dans le globule; leur réunion constitue cependant encore une masse unique et cohérente. Je n'ai pas remarqué de nucléus central ou générateur dans ces formations, mais chaque spore rudimentaire contenait un nombre variable de granules (2-7) disposés irrégulièrement [1].

Les spores possèdent déjà probablement à cette époque une enveloppe rudimentaire ou endospore, quoiqu'on ne l'aperçoive pas, à cause de l'adhérence des jeunes spores entre elles; car bientôt après elles s'isolent et apparaissent munies d'une membrane cellulosique (l'épispore) qui se colore en rose pâle par le chlorure de zinc iodé.

C'est ordinairement pendant la seconde moitié de la nuit que le protoplasma s'organise ainsi en spores. A mesure que celles-ci se forment, et même avant le commencement du phénomène, une substance colorante est lentement et successivement mise en liberté dans le globule et vient se fixer sur la membrane de l'hémisphère supérieur du sporange. Elle est probablement d'abord incolore comme l'indigo et combinée, comme lui, à l'un ou l'autre des éléments du protoplasma. Les combinaisons chimiques, qui doivent nécessairement accompagner la formation des spores, la mettraient en liberté, et ce serait alors qu'elle passerait au violet foncé, en venant en contact avec l'air. Les additions successives de violet noirâtre sur un fond jaune, qui est la couleur primitive du globule, expliquent très-bien les teintes jaune verdâtre, vertes, olivâtres et les nuances de violet par lesquelles le globule passe en se formant.

9. *Habitants des Pilobolus.* — Je veux parler ici de quelques animalcules et de certains corpuscules étrangers que les auteurs ont rencontrés en étudiant les *Pilobolus*.

F.-O. Müller [2] avait trouvé un être merveilleux qui, plante à sa partie inférieure, portait un globule de cristal, dans lequel nageait « comme dans un petit océan » un ver microscopique blanc et tendre. Il nous en laissa heu-

[1] Cette observation n'a porté que sur des sporanges de *Pilobolus oedipus*.

[2] F.-O. Müller, *Kleine Schriften aus der Naturhist.*, herausgegeben von Göze. Dessau, 1782, p. 122. — *Berl. Samm. z. Beförd. der Arzneiwis.*, Stuck I, p. 41 (1778).

reusement la description et la figure, qui nous montrent que ce n'était que le *Pilobolus crystallinus* observé après la projection, alors que, par hasard, une anguillule s'était engagée dans la grosse goutte qui couronne la cupule.

L'éveil donné, les fameux vers furent retrouvés par plusieurs observateurs. Tode les remarqua sur les globules du *Pilobolus crystallinus* [1]; MM. Durieu de Maisonneuve [2] et Léveillé [3] les virent dans les bulles sphériques qui sortent des cupules; tous deux crurent qu'ils se trouvaient aussi dans les cupules elles-mêmes; M. Léveillé supposa même qu'ils y pénétraient par quelque ouverture pratiquée à la base du champignon.

Persoon [4] et M. Currey [5] les examinèrent avec plus de sagacité et reconnurent que ces anguillules ne se trouvent qu'à l'extérieur de la cellule fructifère et montent en se tortillant le long des pédicelles.

Ce ver, qui n'est que le *Rhabditis terricola*, Dujardin [6], se rencontre tant sur le *P. oedipus* que sur le *P. crystallinus*.

Il naît en abondance dans la bouse de vache ou dans le limon qui porte les *Pilobobus*, et on l'y trouve à tous les degrés de développement. Une cellule fructifère porte quelquefois cinq ou six de ces vers, et on les voit, non-seulement dans la goutte terminale après la projection, mais encore dans les gouttelettes latérales et même sur le globule. Ils se meuvent en tout sens, tantôt lentement, tantôt rapidement, sans doute sous l'influence peu agréable du bain acide dans lequel ils se trouvent plongés. Le *Rhabditis terricola* (pl. II, fig. *C*) se rencontre, comme on le sait, sur un grand nombre de substances en putréfaction; je l'ai trouvé aussi sur plusieurs *Ascobolus* et *Peziza* et sur diverses mucorinées croissant sur des matières putrides.

Le *Rhabditis* n'est pas le seul animalcule qui hante les *Pilobolus*. Souvent un petit infusoire blanc (pl. II, fig. *D*.), qui vit en colonies comme les grégarines et se rapproche beaucoup au jeune âge des amibes, choisit les

[1] *Schrift. d. Berl. Naturf. Ges.*, Stück. V.
[2] *Ann. sc. nat.*, t. IX, p. 223. (1826.)
[3] *Mém. Soc. Linn. de Paris*, tom. IV, p. 628.
[4] *Observ. Mycol.*, pars I, p. 77.
[5] *Journal of the Proced. Linn. Soc. Lond.*, vol. I, n° 4, p. 166.
[6] Je dois cette détermination à la bonté de M. Van Beneden, professeur de zoologie à l'université de Louvain.

cellules fructifères ou le globule du *Pilobolus crystallinus* pour y établir sa demeure. Il ne connait pas, sans doute, le sol volcanique sur lequel il se fixe, mais il est dans les mœurs de ce petit infusoire de grimper sur les corps saillants qu'il rencontre, et c'est ainsi qu'il monte, en longues processions, le long des tigelles pour se peloter d'ordinaire sous les cupules des *Pilobolus* (pl. II, fig. *D.*, *a* et *b*); on le trouve aussi sur les brins d'herbe qui font saillie sur la bouse de vache. Au jeune âge, ces infusoires vivent libres et marchent comme les amibes, mais plus tard ils se pelotent, perdent leur mobilité, et ressemblent alors plutôt à des bursaires.

Outre les *Rhabditis* et ces infusoires, j'ai encore quelquefois observé, dans la goutte cristalline qui couronne quelque temps la cupule après la projection, un corps allongé jaunâtre, souvent courbé en demi-cercle ou replié sur lui-même, imitant assez grossièrement un ver et se mouvant lentement au fond de la goutte limpide qui le renferme. Ce sont certainement les filaments oscillants dont nous parle Ehrenberg [1] et que Frédéric Currey rencontra dans les mêmes conditions, sans réussir à les observer [2].

Portés sous le microscope, j'ai vu que ce n'étaient que des filets de granules protoplasmiques agglutinés entre eux et associés parfois à de petites vacuoles. (Pl. II, fig. 19.) Des granules de dimensions variables, mais de même origine, nageaient souvent alentour.

Pour expliquer leur mouvement oscillatoire, il ne faut pas, je crois, recourir, comme Ehrenberg, à des « forces physiques inconnues; » la chose est plus simple : le courant ascendant, qui pénètre dans la goutte cristalline par une ouverture ponctiforme et vient continuellement augmenter son volume, y détermine un courant circulaire; poussé par ce courant, le filament monte un instant; mais, trop lourd pour faire le tour de la goutte, il retombe tout de suite et revient en arrière; il en résulte un mouvement ascendant et descendant continuel qui imite très-bien une lente oscillation.

On voit de temps en temps ce corps allongé accuser un mouvement plus vif ou plus irrégulier, c'est probablement quand le courant ascendant le touche plus en plein, ou qu'il est momentanément plus fort que de coutume.

[1] *Mykolog. Hefte von Kunze und Schmidt*, Heft II, p. 67.
[2] *Journal of the Proced. of the Linn. Soc. London*, vol. I, n° 4, p. 166.

En observant un grand nombre de cupules immédiatement après l'éjaculation, j'ai pu me rendre compte de l'origine de ces filaments : on les voit monter du fond de la cupule, essayer plusieurs fois d'en sortir avec le liquide, et enfin passer par son ouverture pour entrer dans la goutte cristalline. Ceci s'observe facilement au moyen d'une bonne loupe.

Ehrenberg a trouvé plus d'une fois ces filaments dans des gouttelettes posées sur les globules mêmes : ce sont alors des gouttelettes provenant de l'éjaculation des cupules voisines et renfermant par hasard l'un ou l'autre filet protoplasmatique; ces fragments se trouvent fréquemment dans le liquide éjaculé.

M. Léveillé[1] et quelques mycologues ont vu une foule de petits corps irréguliers tournoyer dans la goutte terminale. J'ai souvent transporté de pareilles gouttes sous le microscope; les corps qui s'y rencontrent sont tantôt des granules protoplasmatiques, tantôt les petits infusoires dont j'ai parlé plus haut.

M. Currey indique encore sur le globule de petits points blancs et luisants qu'il n'a pas examinés. Ils ne sont pas communs, mais on en rencontre toujours quelques-uns quand, l'œil armé d'une loupe, on passe en revue une grande peuplade des *Pilobolus crystallinus*. Ces points varient de nature : l'une fois ils ne sont que des gouttelettes cristallines de fort petite dimension, d'autres fois j'y ai reconnu de petites pelotes d'infusoires qui avaient gagné le sommet du champignon.

Enfin, le même auteur trouva, dans une cupule qu'il avait fait probablement crever, des corpuscules cylindriques ou en forme de sablier des anciens, et à peu près de même couleur et de même grandeur que les spores[2]. M. Currey les regarde comme des spores imparfaites qui auraient passé du globule dans la cupule par quelques fissures. J'ai observé les mêmes corpuscules, non dans les cupules, mais autour de certaines préparations de *Pilobolus* faites au chlorure de calcium. J'en ai dessiné quelques-uns à la figure 19 de ma première planche, et je leur attribue la même origine que le savant cryptogamiste de Londres.

[1] *Mém. Soc. Linn. de Paris*, tom. IV, p. 627.

[2] Currey, *l. c.*, p. 167, tab. II, fig. 10.

Je crois ainsi avoir heureusement retrouvé tous les corps étrangers ou énigmatiques signalés jusqu'à ce jour sur les *Pilobolus* et dont l'existence semblait entourée de phénomènes mystérieux, qui s'évanouissent maintenant devant une observation patiente et attentive.

10. *Vie et type des Pilobolus.* — La vie des *Pilobolus* est celle des mucédinées putrédinifages, et leur rôle dans la nature celui de hâter et de faciliter la résolution des matières en décomposition. Comme chez tous les parasites de ce genre, le système absorbant ou destructeur est extrêmement puissant et étendu, la période de vie courte et limitée à l'existence des substances qu'ils habitent, le mode de reproduction assuré et le nombre de leurs spores presque innombrable. J'ai calculé qu'une plante de *Pilobolus oedipus*, que j'ai vue naître et s'étendre en colonie, depuis le 17 septembre jusqu'au 15 décembre, c'est-à-dire pendant quatre-vingt-neuf jours, avait produit, dans cet intervalle, le nombre énorme de trente et un milliards trois cent vingt millions de spores fertiles.

Quand un *Pilobolus* (prenons le *Pilobolus crystallinus* que nous pouvons considérer comme type du genre) a envahi une bouse de vache, ses nombreuses radicelles s'étendent et s'approprient bientôt les substances liquides qu'elles rencontrent. Une partie de ces liquides est convertie en suc nourricier, en protoplasma, l'autre, plus considérable, est réservée à la dissémination des spores. Ce mode de dissémination est des plus intéressants.

L'*Ascobolus* lance ses thèques [1], maintes *Peziza* émettent, comme on le sait, de petits nuages colorés, uniquement formés de milliers et de milliers de spores invisibles, les *Vibrissa,* munies d'un arc invisible, décochent leurs spores acérées, comme des flèches rapides; ici la cellule fructifère devient une véritable arquebuse hydraulique, dont le sporange est l'innocent projectile.

Les cellules fructifères sont nombreuses pour une même plante; tous les jours, avec une admirable régularité, vous la voyez forger, dans les pre-

[1] Ce fait, généralement admis, n'est pas prouvé. Les thèques, d'après mes observations, deviennent saillantes, rejettent ensuite leur opercule et lancent leurs spores. Les thèques vides disparaissent; mais je ne sais si elles sont lancées ou bien si elles se renversent simplement après la projection.

mières heures de l'après-midi, ses instruments de projection, la nuit les perfectionne et prépare la charge; le matin venu, la lumière solaire détermine l'explosion et la plante envoie au loin des générations futures. Ce mode de reproduction est singulièrement dispendieux : chaque jour exige la confection de nouvelles cellules, chaque jour amène une nouvelle dépense de liquide, aussi voit-on bientôt cette petite artillerie végétale ralentir son feu, puis l'éteindre faute de munitions, et la plante mourir d'épuisement au bout de dix à quinze jours.

Mais ne croyez pas que le globule lancé soit livré au hasard, sa chute est calculée et tout est prévu : la nature l'a pourvu d'un enduit collant qui lui permet de s'attacher aux corps sur lesquels il tombe. Comme le *Pilobolus* vit à l'état de nature dans les prés ou au milieu des herbages que fréquentent les herbivores, son sporange s'attachera naturellement aux graminées d'alentour; vient une vache ou un herbivore quelconque qui mange l'herbe et le sporange en même temps, et la reproduction de la plante est assurée. Le sporange s'ouvre dans l'estomac, les spores se mêlent aux aliments, la chaleur animale favorise leur germination [1], et les spores en sortant avec le résidu de la digestion se trouvent ainsi plantées en naissant dans le sol indispensable à leur développement.

Pendant tout l'été de 1860, j'ai vu ainsi deux vaches que j'avais à ma disposition, semer et propager à leur insu le *Pilobolus crystallinus*, et le répandre dans tous les prés où je les faisais conduire : il est beau de voir ici les deux règnes organiques s'entendre et s'entr'aider pour assurer la reproduction et la conservation d'un frêle petit champignon.

J'ai dit que les *Pilobolus* forment chaque jour de nouvelles cellules fructifères, elles ne sont cependant pas toujours entièrement neuves; les anciennes se renouvellent parfois plusieurs jours de suite.

Dans ces cas, la cellule conique de la tige se remplit, comme la première fois, de protoplasma et se distingue de l'ancienne tige par sa turgescence, son opacité et sa couleur foncée. (Pl. II, fig. 15, 16, 17.)

Il se forme ensuite à sa partie supérieure, ou plus souvent sur le côté, un renflement qui s'allonge et qui devient une nouvelle cellule fructifère en tout

[1] J'ai souvent rencontré des spores germant déjà au moment où elles sortaient de l'animal.

semblable à la première. Le renouvellement de la cellule fructifère par stolons latéraux n'avait pas échappé aux yeux clairvoyants de M. Cohn [1].

Les *Pilobolus* sont en général des plantes très-régulières et offrent peu d'anomalies; j'ai cependant observé quelques cas de tératologie que je vais enregistrer ici :

1° Le renflement inférieur de la tige produit quelquefois deux tigelles. (Pl. II, fig. 5.) L'une d'elles avorte alors ordinairement.

2° Outre la cloison radicale et la cloison sous-globulaire, qui sont des membranes cellulosiques, il se forme parfois dans la tigelle une ou deux cloisons de même nature : ce cas s'est présenté dans quelques cellules petites et atrophiées.

3° La cellule fructifère peut devenir rameuse et présenter deux globules, dont l'un est hydrocéphale. Cette anomalie s'expliquera par l'exposé des circonstances qui l'ont produite. Le 25 septembre 1860, un violent ouragan s'éleva vers le soir et dura pendant une bonne partie de la nuit. Surprises par la tempête, les jeunes cellules fructifères suspendirent leur développement jusqu'au lendemain vers midi. Le courant cristallin avait néanmoins faiblement continué, et, s'élevant au-dessus du protoplasma, ses eaux avaient produit un allongement de tige plus ou moins régulier et terminé en vésicule. (Pl. II, fig. 20.) Le protoplasma, revenu à la vie et commençant son ascension normale l'après-dînée du second jour, avait nécessairement dû se sentir retenu par la colonne aqueuse superposée; il s'était alors détourné pour former un rameau latéral qui produisit un sporange considérablement moindre que de coutume. Les *Pilobolus crystallinus* qui me fournirent cette observation croissaient dans un verger ouvert et peu abrité.

4° Le renflement inférieur de la tige ne forme quelquefois pas de tigelle; à sa place apparaît un faisceau de radicelles rameuses qui se désarticulent en conidies ovalaires ou ovalo-fusiformes et mesurant $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{280}$ mm. de longueur. (Pl. I, fig. 20.)

Le *Pilobolus oedipus* seul m'a offert cet exemple de génération conidienne, quand à l'épuisement du sol nourricier venait s'ajouter un commencement de fermentation des substances azotées contenues dans le limon.

[1] F. Cohn, *l. c.*, p. 518-519, tab. 52, fig. 17.

J'ai déjà souvent remarqué que les mucorinées et les mucédinées en général ont une grande tendance à se désarticuler en conidies sous l'influence ou en présence d'un corps en fermentation.

Puisque j'ai tâché de faire ici l'histoire complète des *Pilobolus,* je puis me demander encore : Comment passent-ils l'hiver?

Le plus souvent, les spores se conservent abritées dans leurs sporanges et collées aux brins d'herbe des prairies jusqu'à la belle saison. Il faut que le hasard les fassent alors manger par l'un des herbivores que la nature a chargé de leurs semailles. D'autres fois, quand les bouses de vache n'ont pas été détruites avant l'hiver, le mycélium persiste et sommeille pendant tout l'hiver pour reproduire aux premiers beaux jours ses cellules fructifères. J'ai vu ainsi pendant l'hiver de 1860, malgré un froid de — 22 degrés centigrades, le *Pilobolus crystallinus* renaître et fructifier au mois de mars. Je n'ai pas observé l'hibernation du *Pilobolus oedipus.*

J'avais cru placer ici quelques recherches sur l'anatomie et la physiologie comparées des *Pilobolus* et des différents types de la famille des mucorinées, mais l'étendue de ce mémoire m'engage à les réserver pour un travail plus spécial. Je me bornerai donc à dire en résumé que l'ensemble des détails anatomiques et toutes les données de physiologie s'accordent à assigner aux *Pilobolus,* comme place naturelle dans la famille des mucorinées, la place la plus voisine du genre *Ascophora.*

C'est dans la famille des champignons, et plus encore dans celle des algues, que se rencontrent ces organismes simples et gradués qui nous permettent de suivre ces séries, ces degrés de perfectionnement naturel qui commencent par une plante unicellulaire pour aboutir aux organismes les plus compliqués et nous révèlent si bien l'unité et la variété des types de création.

C'est en se laissant aller à des considérations philosophiques de ce genre, et qui certes me sourient, que M. Cohn [1] présente le *Pilobolus* comme type d'une plante tricellulaire. Pour moi, le *Pilobolus* des auteurs n'est qu'un organe, la cellule fructifère d'une mucorinée, dont le mycélium, il est vrai, est normalement unicellulaire, mais dont les cellules fructifères, toujours nombreuses, ne nous permettent pas d'y voir une plante tricellulaire.

[1] Cohn, *l. c.*, p. 529-530.

# IV.

## PARTIE DESCRIPTIVE.

L'étude comparative des *Pilobolus* et des mucorinées ne laisse, comme nous venons de le voir, aucun doute sur la place qu'ils doivent occuper dans une classification naturelle des champignons : ce sont de véritables mucorinées par leur port, leurs caractères et tout l'ensemble de leur vie. C'est aussi la place que leur avaient sagement assignée les premiers observateurs, et celle qu'ils occupent dans les classifications les plus récentes [1]. Persoon, Schumacher, Fries, Wahlenberg, Rabenhorst et Berkely, en les réunissant autrefois aux gastéromyces, méconnurent l'ensemble de leurs caractères, autant que Corda, MM. Léveillé et Benorden, en en faisant, sans raison suffisante, le type d'une famille nouvelle.

### GEN. PILOBOLUS, TODE, *emendatum*.

MUCOR, Scop. Bolt.
HYDROGERA, Web.
PILOBOLUS, Tod., Pers., Fries.
PYCNOPODIUM, Corda.

Char. gen. — *Germinatio, evolutio ac hyphasma stoloniferum ut in mucorineis; cellulae fructiferae septo distinctae, hydrophorae,* RORIDAE, *supernè* VENTRICOSO-BULLATAE, *fugacissimae, sporangio discolore, non innovato, coronatae. Sporangium compositum,* EXPLOSE EJACULATUM. *Sporae simplices, coloratae.*

Ce genre mérite, à cause de l'élégance de son port et de la supériorité de son organisation, d'être placé à la tête des mucorinées, et se distingue particulièrement des genres voisins par le renflement sous-globulaire de sa tige,

[1] J. Payer, *Bot. Crypt.*, p. 82. Paris, 1850. — G.-W. Körber, *Grundriss der Krypt. Kunde*, p. 53, 1848, etc.

les gouttes cristallines qui la couvrent habituellement, son sporange composé et bicolore, foncé au-dessus et pâle en-dessous, et enfin par le mode de dissémination de ses spores.

Cinq espèces de *Pilobolus* sont connues aujourd'hui dans la science : les *P. crystallinus,* Tode, *oedipus,* Montagne, *roridus,* Pers., *anomalus,* Cesati, et *lentigerus,* Corda, dont cet auteur a fait plus tard, mal à propos, le genre *Pycnopodium.*

D'après mes recherches, le nombre de ces espèces devra être notablement réduit. Le *P. lentigerus,* Corda, n'est qu'une forme maladive du *P. oedipus,* Mont.; le *P. anomalus,* Ces., est bien certainement une *Ascophora;* l'existence du *P. roridus* est très-incertaine; il ne reste donc plus que les *P. crystallinus* et *oedipus* pour constituer ce petit genre. Je décrirai d'abord les espèces certaines pour examiner ensuite les espèces critiques.

### 1. Pilobolus crystallinus, *Tode.*

*Cellulis fructiferis elongatis,* GRACILIBUS; *sporangio hemisphaerico, depresso, superne nigro-violaceo; sporis* ELLIPTICIS, *pallide luteis, episporio* NON DISCRETO, *circa* $\frac{2}{280}$ *mm. longis,* $\frac{1}{280}$ *mm. crassis.*

*Syn.* — Hydrogera crystallina, Web., *Prim. Flor. Hols.*, p. 110. — *Flor. Dan.*, tom. VI, fig. 1080. — Roth, *Flor. Germ.*, p. 557.

Mucor urceolatus, Dickson, *Plant. crypt. Brit.,* Iª pars, p. 25, tab. III, fig. 6. — Bolton, *Hist. of the Fung.* (versio Willd.), vol. III, p. 68, tab. CXXXIII. — Sowerby, *English Fungi*, tab. CCC.

Mucor obliquus, Bulliard, *Champ. de France,* tom. I, p. 111, tab. CCCCLXXX, fig. 1.

Pilobolus crystallinus, Tode, in *Schrift. Berl. Nat. Gesel.*, fragm. III, p. 46, tab. I; *Fung. Meckl.,* I, p. 41. — Persoon, *Observ. Myc.*, I, p. 76-78, tab. IV, fig. 9-11; *Syn. Fung.*, p. 117-118. — Schumacher, *Enum. plant. Saeland.*, p. 188, gen. 416. — Linck, *Dissert.*, I, p. 32, fig. 50; *Spec. plant. C. Linnaei*, tom. VI, p. 95. — Nees ab Esenbeck (senior), *Syst. der Pilze u. Schw.*, p. 83, fig. 81. — Nees ab Esenbeck (junior) und Henry, *Syst. der Pilze,* Ite Abth., p. 32, tab. V. — Albert. et Schw., *Consp. Fung.*, p. 72. — Fries, *Syst. Myc.*, vol. II, p. 308; vol. III, p. 312; *Sum. veg. Scand.*, p. 487. — Wahl., *Flor. Suec.*, vol. II, p. 999. — D. C., *Flor. Franc.,* t. II, p. 271. — Léveillé, *Gen. Pil.* in *Mém. Soc. Lin. Paris,* tom. IV, p. 622, tab. XX et tab. XX, fig. 1-6 (sub *P. rorido*). — Bischoff, *Handb. der bot. Termin.*, tom. II, fig. 3724 et fig. 3725 (sub *P. rorido*), figurae Dris Léveillé. — Mérat, *Flor. Par.*, tom. I, p. 40. — Chevallier, *Flor. Par.*, 2de édit., tom. I, p. 73, tab. IV, fig. 27. — Berkely, apud Hooker, *Engl. Flor.*, vol. V, pars II, p. 231. — Greville, *Flor. Edim.*, p. 448 (fide Berk). — Corda, *Anleit.*, p. 71-72, tab. C, fig. 25, 1-2; *Icon. Fung.*, tom. VI, fig. 52. — Rabenhorst,

*Deut. cryp. Flor.*, vol. II, p. 135-136; *Herb. Myc.* (Kl. edt. nov.), cent. I, n. 78; *Fung. Europ.*, cent. III, n. 270. — Wallroth, *Comp. Flor. Germ.*, pars II, p. 318. — Loudon, *Encyclop.*, p. 1024, fig. 16349. — Currey, *Journ. of the proced. Lin. Soc. Lond.*, vol. I, n. 4, p. 162, tab. II (sub *P. rorido*).

Pilobolus urceolatus, Purton, vol. III, p. 323, tab. XXXI (fide Berk).

*Icon. nostra*, tab. II, fig. 1-20.

Le *Pilobolus crystallinus* a normalement le renflement inférieur de la tige caché dans le fumier qui lui sert de sol; ce renflement est cependant découvert quand la plante se trouve sur des excréments humains. La tige varie beaucoup en hauteur, selon l'âge de la plante et le degré de lumière auquel elle est exposée; ainsi elle n'a souvent qu'un demi-millimètre ou un millimètre d'élévation les premiers jours de végétation; elle peut atteindre, par contre, la longueur de deux centimètres quand elle s'étiole dans l'obscurité; la cupule prend alors une position penchée, et le globule devient ponctiforme. La hauteur ordinaire de la plante, y compris le globule, est de trois à quatre millimètres; les plantes robustes atteignent cependant six à sept millimètres. L'endroit où la tige s'élargit pour former la cupule est d'ordinaire marqué, excepté chez des individus faibles ou maladifs, d'une bande ou zone jaune roussâtre qui varie en largeur. La couleur de la plante n'est pas toujours la même : elle est ordinairement d'une belle transparence cristalline; plus rarement la plante entière conserve une teinte jaune ou roussâtre due à l'abondance de l'huile colorante qui l'imprègne.

Le *Pilobolus crystallinus* est toujours monocéphale; exceptionnellement il peut produire sur la même tige deux globules fertiles, qui sont alors sensiblement plus petits. Le globule sporifère offre des dimensions très-variables : les plus gros mesurent un demi-millimètre de diamètre, les plus petits n'ont souvent qu'un quart ou même un neuvième de millimètre de largeur.

Cette espèce vit habituellement sur les excréments d'animaux herbivores paissant en liberté. Les auteurs l'indiquent sur la fiente de cheval, de vache, de cerf, de daim, d'élan, de chevreuil, de mouton, de porc et de lapin. Elle croît aussi, mais rarement, sur les excréments de l'homme. M. Gachet l'a trouvée sur les déjections de chat. Elle est généralement indiquée comme plante automnale; je l'ai cependant observée depuis le mois de mars jusqu'au milieu de décembre.

### 2. Pilobolus oedipus, *Montagne.*

*Cellulis fructiferis* BREVIORIBUS ET ROBUSTIORIBUS; *sporangio ampliore, hemisphaerico, minus depresso, nigro-violaceo, sporis* MAJORIBUS, SPHAERICIS, *subincarnato-luteis,* EPISPORIO DISCRETO, $\frac{2\cdot3}{280}$ *mm. crassis.*

*Syn.* — Mucor obliquus, Scopoli, *Flor. Carniol.*, pars II, p. 494-495?
Pilobolus oedipus, Montagne, *Mém. Soc. Lin. de Lyon*, 1826, p. 1-7, fig. *a-i; Sylloge*, p. 299. — Rabenhorst, *Fungi Europaei*, cent. IV, n° 382.
Pilobolus lentigerus, Corda, *Icon Fung.*, tom. I, p. 22, tab. VI, fig. 286.
Pycnopodium lentigerum, Corda, *Icon. Fung.*, tom. V, p. 18. *Anleitung*, p. 72, tab. *C. Icon.*, 25, fig. 3-5.
Pilobolus crystallinus, Cohn, *Entwick. des Pil. cryst.*, Nov. act. nat. Cur. Bonnae, vol. XXIII, p. 493-535, tab. LI et LII. — Bonorden, *Handbuch d. allgem. Mykologie*, tab. X, fig. 203. Sub *P. crystallino.*
*Icon. nostra*, tab. I, fig. 1-20.

Le *Pilobolus oedipus* est toujours moins grêle et moins svelte que le *Pilobolus crystallinus.* Sa tige, ordinairement courte et peu développée, donne à la plante un port trapu et massif qui lui est caractéristique. La tige même fait parfois entièrement défaut, de manière que la cupule, naissant alors directement du renflement inférieur, donne à la cellule fructifère la forme du chiffre 8 que surmonte le globule coloré.

La hauteur ordinaire de la plante est de deux à quatre millimètres. Le renflement inférieur de la tige se développe normalement à la surface du sol. Ces renflements étant nombreux et souvent très-rapprochés, les jeunes colonies de *Pilobolus* forment de larges taches jaunes qu'on remarque d'assez loin. Ceci ne s'observe qu'accidentellement pour le *Pilobolus crystallinus.* La position oblique du renflement inférieur de la tige est très-fréquente chez le *P. oedipus;* il m'a paru aussi généralement moins riche en gouttelettes cristallines, et conserve plus souvent une légère teinte jaunâtre que la première espèce. La cupule est le plus souvent de forme obovée, comme chez le *Pilobolus crystallinus;* il n'est cependant pas rare de trouver des colonies entières dont les cupules, singulièrement arrondies, figurent de larges ciboires. Quand on cultive ce petit champignon dans l'obscurité, la tige s'allonge sensiblement, et la cupule, entraînée par le poids du globule, se penche gracieusement, comme chez l'espèce précédente. Toutes les différences néan-

moins entre ces deux espèces sont sujettes à varier et offrent de nombreuses nuances; le caractère tiré de la forme des spores est seul toujours constant et invariable. J'ai examiné, cet été, certainement plus de cinq cents sporanges de *Pilobolus*, sans jamais trouver d'exception à cette règle.

Le *Pilobolus oedipus*, souvent confondu avec le *crystallinus*, a été trouvé dans différentes stations. Corda et Camille Montagne l'ont rencontré sur les excréments de l'homme; Ferdinand Cohn sur des détritus d'algues, recélant de nombreuses carapaces d'animalcules microscopiques. M. Nising l'a observé sur la vase de l'Oder, et je l'ai récolté deux fois, aux environs de Gand, sur de la boue d'égout riche en matières graisseuses et en débris de substances animales. A ces indications certaines nous pouvons en ajouter quelques-unes plus douteuses. Mon honorable ami, M. Durieu de Maisonneuve, a trouvé, à Paris, un *Pilobolus* sur la vase desséchée d'eaux pluviales. Dans ses excursions aux environs de Bordeaux, il a vu la même plante occuper de larges espaces dans les marais des Landes. Ne serait-ce pas le *Pilobolus oedipus?* Le *Pilobolus crystallinus* qu'a dessiné M. Bonorden ne peut se rapporter, vu ses spores parfaitement rondes, qu'au *Pilobolus oedipus*. Enfin les *Pilobolus* que M. le docteur Guigneau vit naître sur des conferves semi-putrescentes, extraites d'un lavoir, à Bordeaux, me semblent devoir être très-probablement le *Pilobolus oedipus*.

J'ai voulu conserver à cette plante le nom spécifique d'*oedipus*, que lui imposa, le premier, M. le docteur Montagne, quoique cette dénomination repose sur un caractère évidemment commun à toutes les espèces du genre. J'ai cru inutile de charger la science d'une nouvelle synonymie, d'autant plus que la tige courte et massive de cette plante peut justifier, jusqu'à un certain point, l'épithète de l'illustre mycologue de Paris.

Afin que cette espèce, jusqu'ici presque inconnue, puisse être étudiée et contrôlée par tous les mycologues, je viens de la publier dans les *Fungi Europaei* (cent. IV, n° 382) de l'infatigable docteur L. Rabenhorst, de Dresde.

Je vais passer maintenant à l'examen des espèces douteuses ou apocryphes.

### 3. Pilobolus roridus, *Persoon.*

*Cellulis fructiferis aciculas punctorias simulantibus; cupulâ rotundatâ, saepissime nutante; sporangio punctiformi, nigro.*

*Syn.* — Fungus virginianus, etc., Pluck, *Phyt.*, tab. CXVI (fide Fries).

Mucor roridus, Bolt. (versio Willd.), vol. III, tom. 132, fig. 4. — Relham, *Flor. Cantabrig.*, p. 122, fig. 4.

Pilobolus roridus, Pers., *Syn. Fung.*, p. 118. — Schum., *Sael.*, pars II, p. 188-189 (in stercore humano). — Albert. et Schw., *Consp. Fung.*, p. 72. — Linck, *Spec. Plant.*, tom. I, p. 95. — Berkely (apud Hooker), *Engel. Flor.*, vol. V, p. 231. — Fries, *Syst. Myc.*, vol. II, p. 309; vol. III, p. 312; *Sum. Veg. Scand.*, p. 487. — Rabenh., *Deut. crypt. Flor.*, vol. II, p. 135.

Non Pilobolus roridus, Léveillé, l. c., tab. XX, fig. 1-6; nec Bischoff, l. c., fig. 3925; nec Sommerf., *Flor. Lapp.*, p. 236; nec Currey, l. c., tab. II, fig. 1-10.

*Icon. nostra*, tab. II, fig. *B*.

Le *Pilobolus roridus* est indiqué par tous les auteurs, excepté par Schumacher, dans les mêmes stations que les *Pilobolus crystallinus*, et notamment sur le fumier de cheval.

Sans être une espèce qu'on puisse positivement rejeter, le *Pilobolus roridus* est néanmoins une plante des plus incertaines. Persoon [1] doute de son existence; Albertini et Schweiniz, tout en l'admettant, font remarquer qu'ils n'ont pu bien l'observer [2]; Link est d'avis que le *Mucor roridus*, Bolt., n'est qu'une *Ascophora;* l'espèce décrite et figurée sous le nom de *Pilobolus roridus* par Léveillé, Bischoff et Currey, n'est qu'une forme du *Pilobolus crystallinus;* Th. Bail, Greville, Purton croient également que le *Pilobolus roridus* n'est qu'une variété de l'espèce généralement répandue; Fries [3] et d'autres auteurs l'indiquent en société du *Pilobolus crystallinus,* et Sommerfert [4] a pris pour cette espèce une forme grêle de l'espèce commune. Enfin, durant ces deux dernières années, j'ai observé, dans diverses localités des environs de Gand, peut-être un millier de peuplades de *Pilobolus crystallinus* sans jamais ren-

[1] *Syn. Fung.*, p. 118.
[2] *Conspect. Fung.*, p. 72.
[3] *Syst. Myc.*, tom. II, p. 309.
[4] *Flor. Lapp.*, p. 236.

contrer le vrai *roridus*, mais bien souvent des formes qui s'en rapprochaient sensiblement.

Ce ne sont pas seulement ces raisons, qui, certes, ont leur valeur réelle, qui me portent à douter de l'existence du *Pilobolus roridus*, mais plus encore l'examen critique des caractères distinctifs mêmes de l'espèce. Quatre caractères en effet sont généralement indiqués pour différencier les deux espèces.

D'après les descriptions des auteurs, le *Pilobolus roridus* se distingue du *crystallinus* :

1° Par une tige grêle et plus allongée; mais j'ai remarqué déjà que cet allongement se produit bien souvent aussi chez le *Pilobolus crystallinus* sous diverses influences;

2° Par la position penchée ou inclinée de la cupule; mais cette légère modification n'est pas rare chez ses congénères;

3° Par son globule très-petit, ponctiforme; la même chose s'observe chez les *Pilobolus crystallinus* et *oedipus;*

4° Enfin par la forme arrondie de la cupule.

Je dois avouer que je n'ai jamais trouvé de *Pilobolus crystallinus* à cupules si parfaitement arrondies que le représente la figure de Bolton; mais j'en ai rencontré souvent de forme subarrondie qui s'en rapprochaient assez sensiblement et offraient l'apparence d'une cupule sphérique quand on les regardait de face. Les figures de Bolton ne sont d'ailleurs pas généralement d'une exactitude si rigoureuse qu'on doive attacher à cette différence une importance majeure et décisive.

J'ai vainement cherché le *Pilobolus roridus* dans plusieurs herbiers, très-riches cependant, de France, de Belgique et d'Allemagne; et la figure que j'en donne à la planche II n'est qu'une reproduction fidèle de celle de Bolton.

### 4. Pilobolus lentigerus, *Corda*.

*Icon. Fung.*, tom. I, p. 22, tab. VI, fig. 286.

*Syn.* — Pycnopodium lentigerum, Corda, *Icon. Fung.*, tom. V, p. 18; *Anleitung*, p. 72, tab. C, *Icon.*, 25, fig. 3-5.

Pour cette espèce, je puis dire avec assurance qu'elle n'est qu'une forme maladive du *Pilobolus oedipus*, Montagne.

Voyons d'abord les caractères que lui assigne Corda : C'est une tige claviforme, pleine, jaunâtre et furfuracée; un globule olivâtre, déprimé sous un angle aigu et des spores rondes de couleur pâle. Ces caractères, et surtout celui de la tige pleine, seraient certes suffisants pour fonder une espèce, même un genre nouveau, si je ne les avais rencontrés plus d'une fois sur le *Pilobolus oedipus*. Quand on cultive, en effet, celui-ci sur de la vase trop sèche pour le nourrir convenablement, le liquide cristallin, qui joue un si grand rôle dans ces plantes, venant à manquer, la cupule se marque à peine, ce qui donne à la tige une forme clavée; les gouttelettes cristallines disparaissent; le protoplasma jaune n'étant plus refoulé dans le globule, remplit la tige presque entière, ce qui lui donne une apparence solide et une couleur jaune; il n'y a plus de projection, mais le globule mal rempli se colore faiblement et se déprime en se desséchant; enfin la membrane tégumentaire, toute chargée de protoplasma, apparaît sous le microscope comme légèrement furfuracée. Vous avez alors tout à fait le *Pycnopodium lentigerum* de Corda. Je remarquerai encore que cet auteur trouva sa plante dans des conditions presque identiques « in merdâ humanâ *exsiccatâ,* » et qu'il figure ses tiges ridées (*Icon. Fung.*, vol. I, tab. VI, fig. 286 ✝✝ et ✝✝✝), ce qui indique bien une plante flétrie et épuisée.

Ces expériences répétées jusqu'à trois fois ne laissent, à mon avis, aucun doute que le *Pycnopodium lentigerum* ne doive disparaître de la liste des véritables espèces.

J'ai obtenu des résultats semblables sur le *Pilobolus crystallinus;* mais le caractère des spores rondes, que Corda décrit et figure très-bien, me fait rapporter sa plante au *Pilobolus oedipus* Montagne.

### 5. Pilobolus anomalus, *Cesati.*

*Herb. Mycol. Klotzschii* (1851), édit. 1ᵉ, nº 1542.

Pour mieux faire connaître cette espèce et justifier les remarques que son étude m'a suggérées, je donnerai d'abord la description latine qui accompagnait la publication de cette plante, reçue jusqu'à présent parmi les *Pilobolus :*

« Vercellis, dec. 1850, in fimo suino, post brumas. — Primitus e matrice (num et basi sclerotioïdaee, qualem in *Pilobolo crystallino* molliusculam, flavam observavi, innascens?) hypha porrigitur brevis, filiformis, omnino aequalis, hyalina et minime rorida, quatenus observare licuit, cui sphaerula superimposita est minima, flava, sat pellucens. Mox in hac sphaerula divisio quaedam interna patet e colore magis opaco surbidiori segmenti superioris (quod majus quoque est), dum inferius e contra pallescit. Hypha cito post haec elongatur valde; quamobrem, et propter tenuitatem nutans evadit. Segmentum superius capituli nigrescit atque intumescit, donec aterrimo colore fucatur; ast minime solvitur ab utero, sed huic arcte adglutinatum, excipuli obversi modo pro parte ipsum uterum amplectitur, glandem simulans cum cupula sua, sed inverso modo. Haec omnia mira dixi! — Peridiolum ne disilit quidem; et laboriosissimo examine devinatus sum, in ejus cavitate (quia subtus excavatum est omnino fere uti *Ascophorae* capitula post explosionem sporidiorum) uterum reabsorberi; quam functionem alio phaenomeno adsociatam vidi; videlicet apparitioni linearum concentricarum obscuriarum in utero. Num reapse de mutatione coloris tantum agatur, numne potius, qualem semel perspexisse existimo, sed sat firme asserere non auserim, de contractione uteri exsiccandi per plicas horizontales, sat bene non intellexi.

Tunc hypha omnino deflectitur; an normaliter peridiolum amittat hactenus mihi litigiosum. Sed certior factus sum saepissime prolapsi e peridioli cavitate fila obrepere bina usque quaterna; et ubi plura peridiola agglomerata existunt compages byssina sive araneosa, candida, volitans passim componitur, peridiolis hemisphaericis, aterrimis, tarde disrupturis conspersa, quae a matrice fimentaria ad viciniores stipulos extenditur! Vera genesis hujus compagis mihi adhuc ignota, nisi mycelium sit ab uno alterove peridiolo generatum. — Peridiolum omnino typicum generis colore, forma, firmitate et oeconomia; sporidia subovalia, in muco quodam nidulantia? (Cesati.) »

Nous commettons tous des erreurs, qu'il faut savoir avouer avec grâce; les botanistes même les plus distingués n'en sont pas exempts. C'est ainsi que M. de Cesati s'est trompé en étudiant son *Pilobolus,* qui est une *Ascophora* parfaitement constituée. La description même de l'espèce m'avait fait supçon-

ner une méprise, et j'en ai acquis la certitude, lorsque j'ai pu analyser des échantillons authentiques que je dois à la gracieuse obligeance de M. Desmazières, de Lille.

L'*Ascophora mucedo*, Tode, que j'ai cultivée l'année dernière, offre le même développement et la même organisation que la plante dont nous nous occupons; celle-ci ne s'en éloigne que par son protoplasma jaune, une légère différence de spores (pl. II, fig. *E b*) et la belle marqueterie à dessins ovoïdes qui orne le campanile de son sporange. (Pl. II, fig. *E a*.) Chez le *P. anomalus*, il n'y a pas de gouttelettes cristallines, pas de projection; je n'ai trouvé ni cupule, ni cloison radicale, ni cloison sous-cupulaire dans les cellules fructifères que j'ai examinées; dès lors il ne peut appartenir au genre *Pilobolus* tel que je l'ai défini.

J'en fais donc une *Ascophora* nouvelle, qui ne doit plus conserver maintenant le nom spécifique d'*anomala*, puisque son organisation est tout à fait normale, et je la dédie, sous le nom d'*Ascophora Cesatii*[1], au savant cryptogamiste de Verceil, qui a tant de droit à nos sympathies.

Je n'ai pas retrouvé les filaments dont parle M. de Cesati et qui, d'après les dessins inédits de l'auteur, doivent servir à rattacher le sporange à la tige; mais je les crois identiques à ceux que j'ai vus dans les cellules fructifères de l'*Ascophora* commune et dont j'expliquerai l'origine et la nature dans un autre travail.

En résumé, le genre *Pilobolus* ne comprend que deux espèces certaines, les *P. crystallinus* et *oedipus* et une espèce très-problématique, le *P. roridus*, Pers.

[1] *Cellulis fructiferis elongatis, filiformibus, primitus flavidis, erectis, dein nutantibus et collabentibus; campanella nigra, areolis subovalibus ornata; sporis hyalinis, subovalibus,* $\frac{4 \cdot 5}{300}$ *mm. longis,* $\frac{3}{300}$ *mm. crassis.*

# EXPLICATION DES FIGURES.

## PLANCHE I.

### Pilobolus oedipus, Montagne.

*Fig.* 1. Spores non germées, prises dans le sporange.

2. Germination naturelle : *a*, premier développement.

3. Germination artificielle.

4. État avancé de germination naturelle.

5. Germination vésiculeuse : *a*, *b*, *c*, différents états de développement.

6. Fragment de mycélium fructifère, trouvé entre deux feuilles d'acacia : *a*, cellule conique de la cellule fructifère; *b*, état rudimentaire de la même cellule; *c*, jeune tigelle.

7. Cellule fructifère parfaite : *a*, renflement inférieur de la tige; *b*, tigelle; *c*, renflement supérieur ou cupule.

8. Même cellule et tigelle rudimentaire : *a*, renflement inférieur; *b*, place de la cloison sous-cupulaire; *c*, globule plus aplati que de coutume.

9. Fragment de rhizome radicellaire : *a*, stolon ordinaire; *b*, radicelle cloisonnée.

10. Fragment de vieux mycélium.

11. Jeune cellule fructifère traitée par le chlorure de zinc iodé : *a*, membrane cellulosique; *b*, primordialschlauch et protoplasma externe; *c*, cloison radicale; *d*, protoplasma interne, non modifié par le réactif.

12. Jeune cellule fructifère traitée par l'acide sulfurique et le sucre : *a*, membrane cellulosique; *b*, parties azotées; *c*, cloison radicale.

13. Cellule fructifère rudimentaire avant la formation de la cloison radicale, traitée par l'acide sulfurique : *a*, membrane cellulosique; *b*, masse protoplasmatique; *c*, place de la cloison future.

14. Jeune cellule fructifère offrant une double membrane cellulosique. Les membranes ont été isolées et déchirées sous le microscope, après quelques heures de macération dans l'acide sulfurique dilué : *a*, membrane cellulosique primitive; *b*, membrane cellulosique d'épaississement; *c*, masse protoplasmatique fortement contractée; *d*, cloison radicale qui a suivi la membrane d'épaississement.

15. Formation de la cloison radicale : *a*, membrane cellulosique; *b*, primordialschlauch; *c*, masse protoplasmatique; *d*, cloison radicale à peine formée; *e*, gouttelettes d'huile colorante; *f*, milieu de la cloison radicale qui fait ventre sous la pression du verre

couvreur qui comprime toute la cellule fructifère. On a traité cette cellule par le chlorure de zinc iodé, l'acide sulfurique et le sucre.

*Fig.* 16. Formation de la cloison sous-globulaire. La cellule fructifère a été traitée et comprimée comme la préparation précédente : *a*, membrane cellulosique; *b*, primordialschlauch; *c*, étui protoplasmatique; *d*, cloison sous-globulaire inachevée; *e*, gouttelettes d'huile colorante que l'action des acides isole.

17. Jeune cellule fructifère au moment de la formation des vacuoles (*in chaumung*); *b*, vacuoles libres.

18. Jeune cellule fructifère au moment où le courant cristallin commence à monter : *a*, étui protoplasmatique; *b*, cône d'allongement.

19. Corpuscules de Currey.

20. Cellules conidifères : *b*, conidies.

## PLANCHE II.

### Pilobolus crystallinus, Tode.

*Fig.* 1. Cellule fructifère avant la formation de la cloison radicale.

2. Même cellule après la formation de cette cloison : *a*, cellule conique plus claire.

3. Même cellule : *b*, la tigelle commence à apparaître.

4. Cellule fructifère dont la tigelle s'est courbée pour se diriger vers la lumière.

5. Cellule fructifère anormale : *a*, le protoplasma ne monte que par une tigelle, et le globule commence à s'indiquer faiblement.

6. Cellule fructifère vers minuit; la cloison sous-globulaire est formée et la cupule commence à apparaître.

7. Cellule fructifère vers huit heures du matin : *a*, renflement inférieur; *b*, tigelle; *c*, cupule; *a'*, cloison radicale; *a''*, cloison sous-globulaire; *a'''*, cloison sous-cupulaire.

8. Anatomie de la cellule fructifère : on l'a traitée par l'acide azotique fumant : *a*, renflement inférieur; *b*, tigelle; *c*, cupule; *β*, membrane externe ou cellulosique; *γ*, membrane interne ou primordialschlauch; *a'*, cloison radicale; *a''*, cloison sous-globulaire de forme conique; *a'''*, cloison sous-cupulaire appartenant à la membrane interne; *d*, masse des spores, de forme annulaire et entourée de la sporochlamyde; *e*, hémisphère supérieur du globule; *f*, membrane médiane.

9. Cellule fructifère dont on a ôté le globule, mais qui a conservé la cloison sous-globulaire.

10. Cellule fructifère après l'éjaculation : une grosse goutte cristalline commence à sortir de la cupule.

11. Même cellule vide; exceptionnellement, un rebord de la membrane médiane du globule a persisté sous forme de collerette.

12. Hémisphère supérieur du globule aplati et vu par-dessus.

13. Même membrane, sans dessins hexagonaux et vue de côté.

14. Spores naturelles : *b*, autres traitées par l'acide azotique; *c*, spores fortement grossies.

*Fig.* 15, 16, 17. Divers exemples de renouvellement de la cellule fructifère par stolons.

18. Partie supérieure d'une cellule fructifère traitée par l'acide azotique : *a*, étui protoplasmatique qu'enveloppe le primordialschlauch; *b*, membrane cellulosique retroussée.

19. Portion d'un filament oscillant d'Ehrenberg.

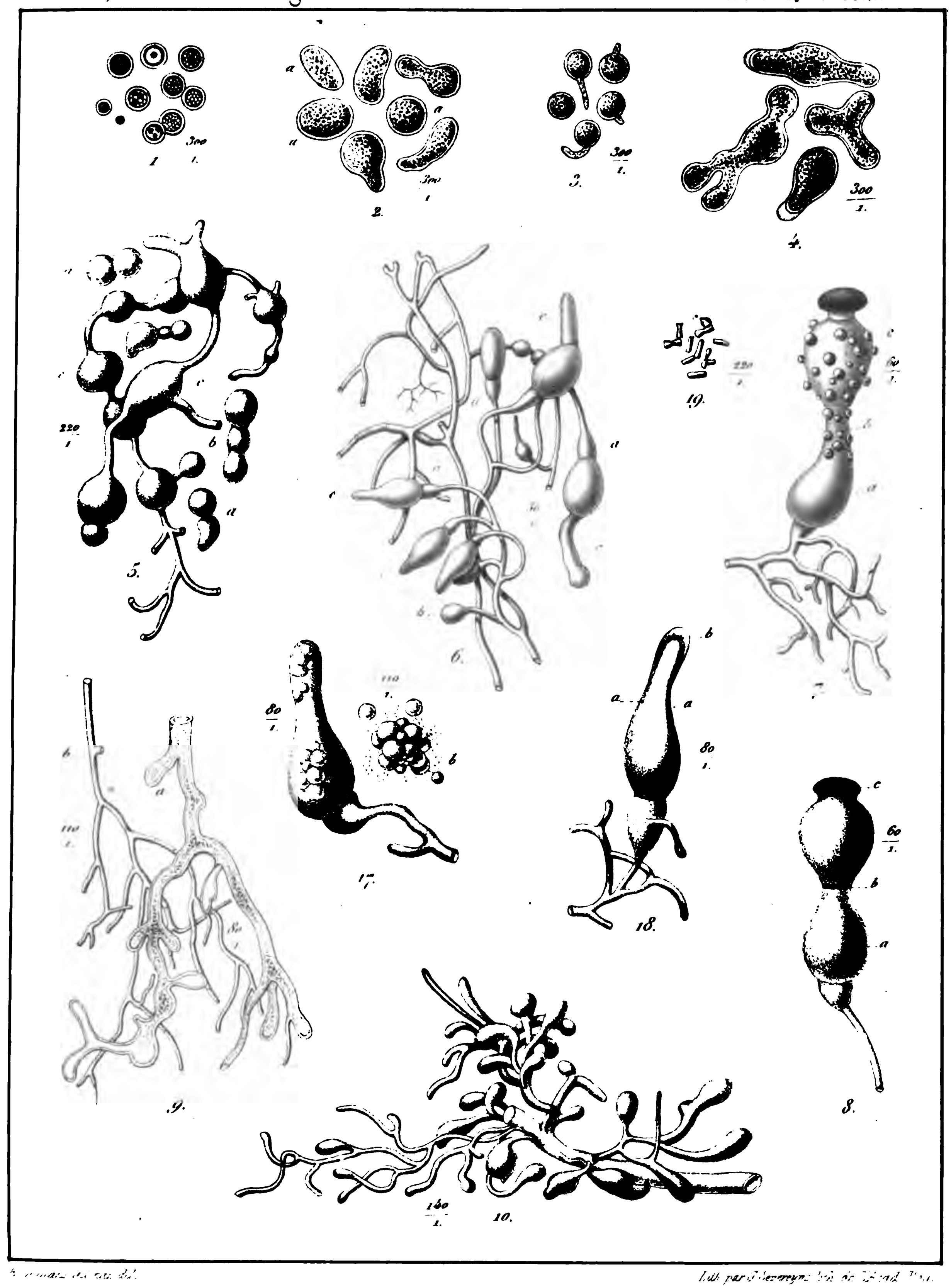
20. Cellule fructifère rameuse : *b*, globule hydrocéphale.

*Fig. B.* PILOBOLUS RORIDUS, Pers. : *a*, groupe de cellules faiblement grossies; *b*, deux cellules plus grossies.

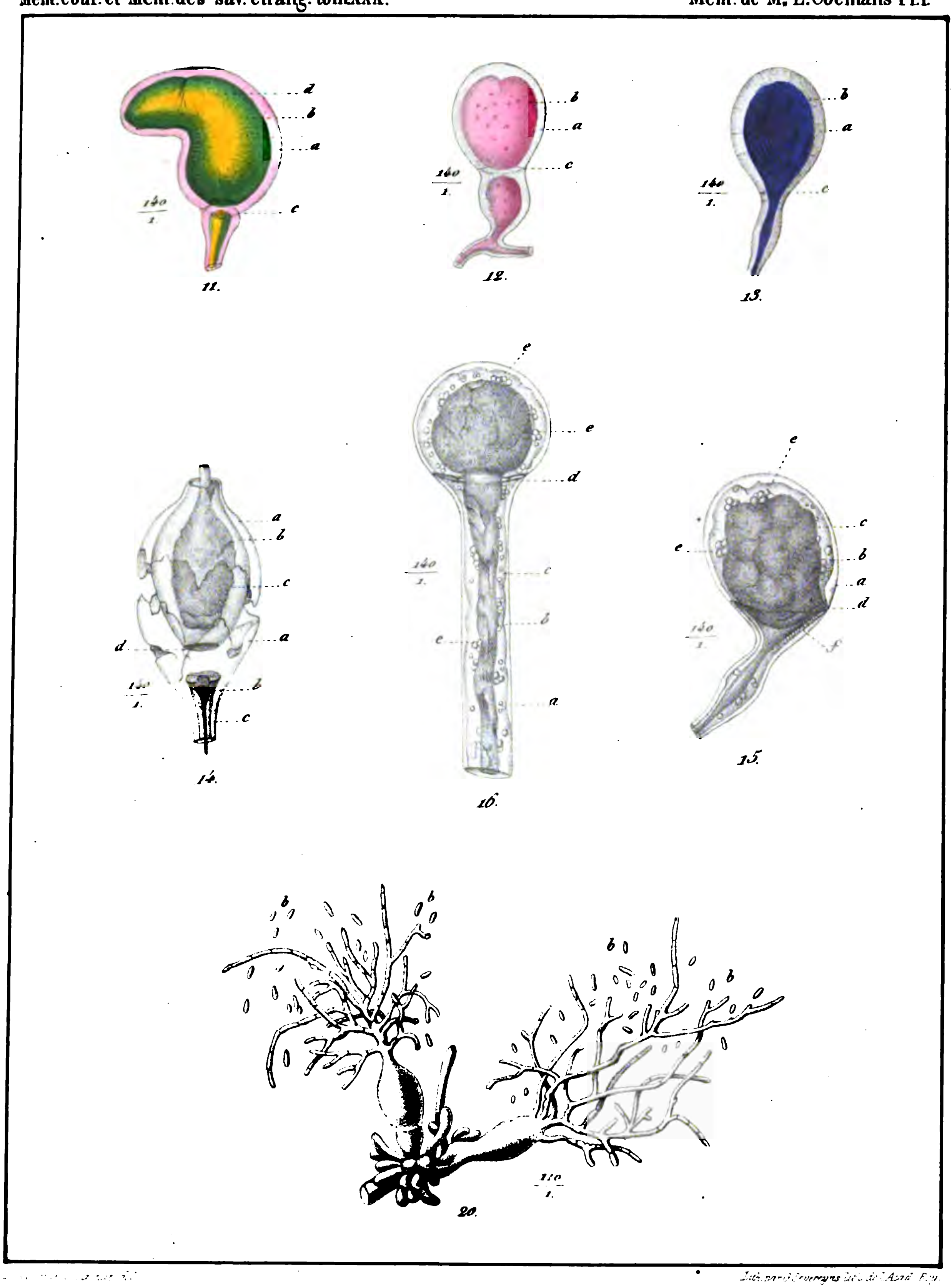
*C.* RHABDITIS TERRICOLA, Dujardin.

*D.* Petits infusoires pilobolicoles : *a*, *Pilobolus* vu à la loupe et portant une pelote d'infusoires ; *b*, fragment de tigelle, le long de laquelle montent les infusoires ; *c*, jeune âge de l'animalcule ; *d*, âge adulte.

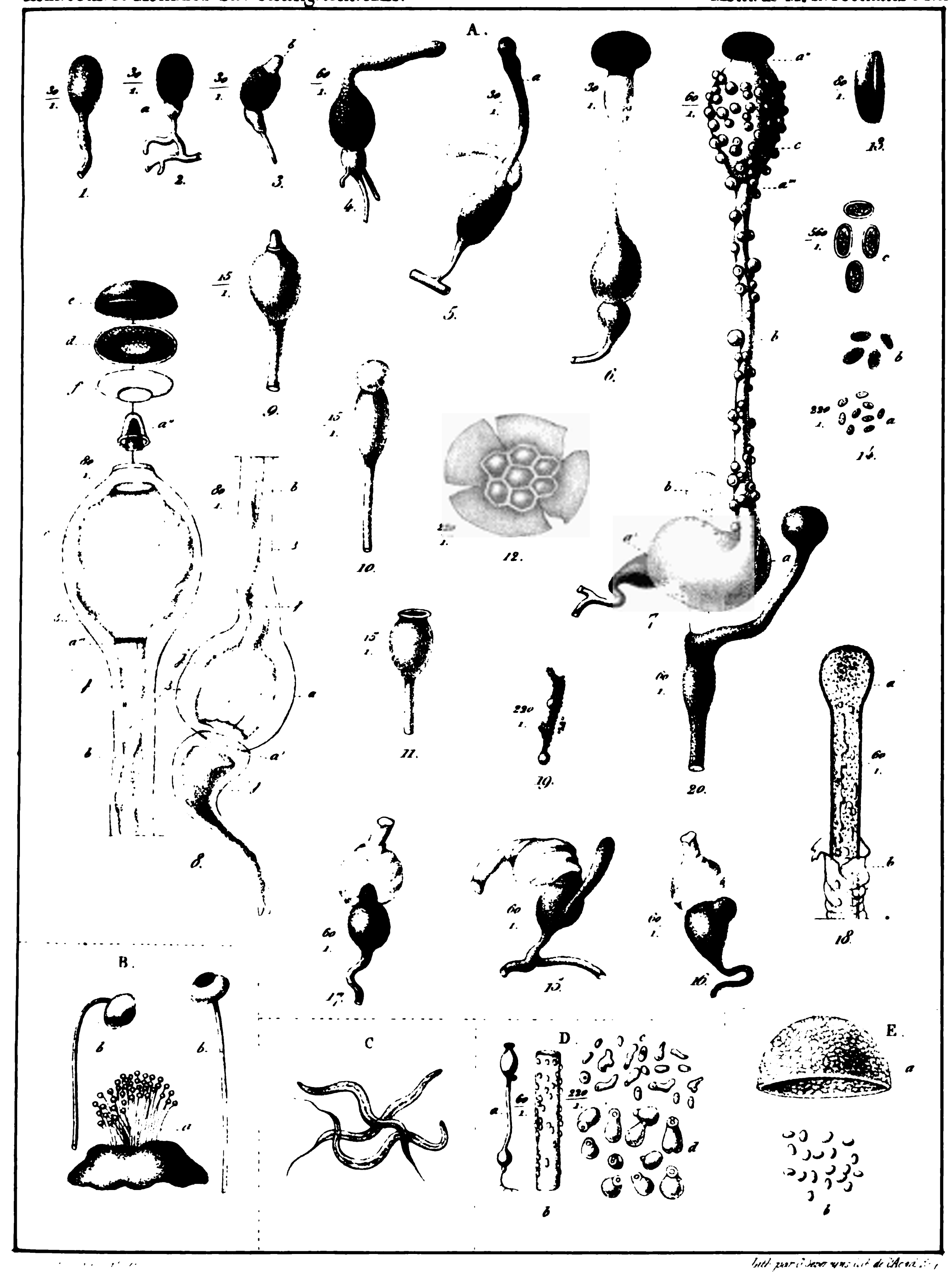
*E.* ASCOPHORA CESATII, Nob. : *a*, campanile; *b*, spores.



Pilobolus oedipus Montagne.




Pilobolus oedipus Montagne.



Pilobolus crystallinus Tode.

# MÉMOIRE

SUR LE

# CALENDRIER ARABE AVANT L'ISLAMISME,

ET SUR

## LA NAISSANCE ET L'AGE DU PROPHÈTE MOHAMMAD;

PAR

MAHMOUD EFFENDI,

ASTRONOME ÉGYPTIEN.

---

(Présenté à la séance de l'Académie le 3 avril 1858.)

# MÉMOIRE

SUR

# LE CALENDRIER ARABE AVANT L'ISLAMISME,

ET SUR

## LA NAISSANCE ET L'AGE DU PROPHÈTE MOHAMMAD.

## INTRODUCTION.

Le destin semble avoir pris plaisir à condamner à l'oubli ou à laisser dans une obscurité plus ou moins profonde l'histoire antique, même celle des peuples qui se sont élevés au plus haut degré de civilisation. Ce sont les monuments laissés par eux et qui ont été témoins de leur grandeur que la postérité doit interroger pour connaître les destinées de ses ancêtres. Mais, si ces monuments se trouvent mutilés par le temps ou s'ils font entièrement défaut, c'est aux traditions, transmises de bouche en bouche, que les premiers écrivains de la postérité doivent avoir recours pour les recueillir, les discuter et en former enfin un corps d'histoire. Une telle histoire se trouve indubitablement enveloppée d'épaisses ténèbres.

C'est dans ce dernier cas que se sont trouvés les premiers écrivains arabes. N'ayant sous les yeux aucun monument, il leur a fallu courir de ville en ville pour recueillir de la bouche des peuples les traditions anciennes échap-

pées à l'oubli et qui étaient généralement recueillies par les poëtes de l'antiquité, pour en faire le sujet de quelque épisode ou poëme.

Les écrivains arabes n'ayant commencé leurs récits historiques que deux ou trois siècles après l'hégire, on comprend facilement combien il leur a été difficile de connaitre d'une manière certaine la chronologie des Arabes avant l'islamisme. Le calendrier anti-islamique a toujours été un sujet de grandes discussions entre les auteurs.

Les historiens s'accordent à penser que les Arabes païens se sont servis de l'année luni-solaire, pendant un laps de temps plus ou moins long avant l'hégire. Les commentateurs du Coran des hadiths, et les lexicographes semblent croire que les Arabes ne se sont jamais servis que des années lunaires vagues. Les sentiments des savants européens sont également différents sur ce point : Pococke, Gagnier, Golius, Prideau, etc., et M. Caussin de Perceval embrassent la première opinion. Silvestre de Sacy se range du côté contraire; il dit formellément, mais sans pouvoir le démontrer, que les Arabes, surtout ceux de la Mekke, n'ont jamais fait usage que d'un calendrier purement lunaire. Idler semble pencher vers cette opinion. Les idées de ces illustres maitres se trouvent savamment discutées par MM. Silvestre de Sacy [1] et Caussin de Perceval [2].

Dans le mémoire que je présente aujourd'hui, je n'ai nullement la prétention de critiquer l'une ou l'autre opinion. La nécessité d'en adopter une, pour compléter un travail que j'ai entrepris, m'a obligé à chercher dans les divers manuscrits arabes et dans d'autres ouvrages étrangers, quelques-unes des traditions ou témoignages qui ont rapport à ce sujet. La pensée que ce travail pourrait jeter de nouvelles lumières sur ce point important de la chronologie arabe, m'a engagé à donner ces matériaux avec la conclusion que j'en ai dû tirer. Je touche donc à la question; je la traite d'une manière neuve, tout en respectant les opinions.

J'ai commencé par considérer comme non avenus tous les témoignages ou opinions qui établissent formellement l'existence soit d'un calendrier purement lunaire, soit d'un système luni-solaire, quel que soit le mode d'interca-

[1] *Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres*, t. XLVIII, pp. 606 et suiv.

[2] *Journal asiatique*, cahier d'avril 1843.

lation. Tout ce qui a rapport au mot *naci* [1] n'entre pas non plus dans mes matériaux fondamentaux.

J'ai fixé ensuite, d'après mes documents, la date julienne de la mort d'Ibrahim, fils du prophète, celle du jour de l'entrée de l'apôtre à Médine (l'hégire), et enfin celle de la naissance du prophète. Les mois arabes correspondant à ces événements [2] étant également connus, j'en ai conclu sans peine le genre de calendrier qui était en usage chez les Arabes, du moins chez ceux de la Mekke, plus de soixante ans avant le pèlerinage d'adieu.

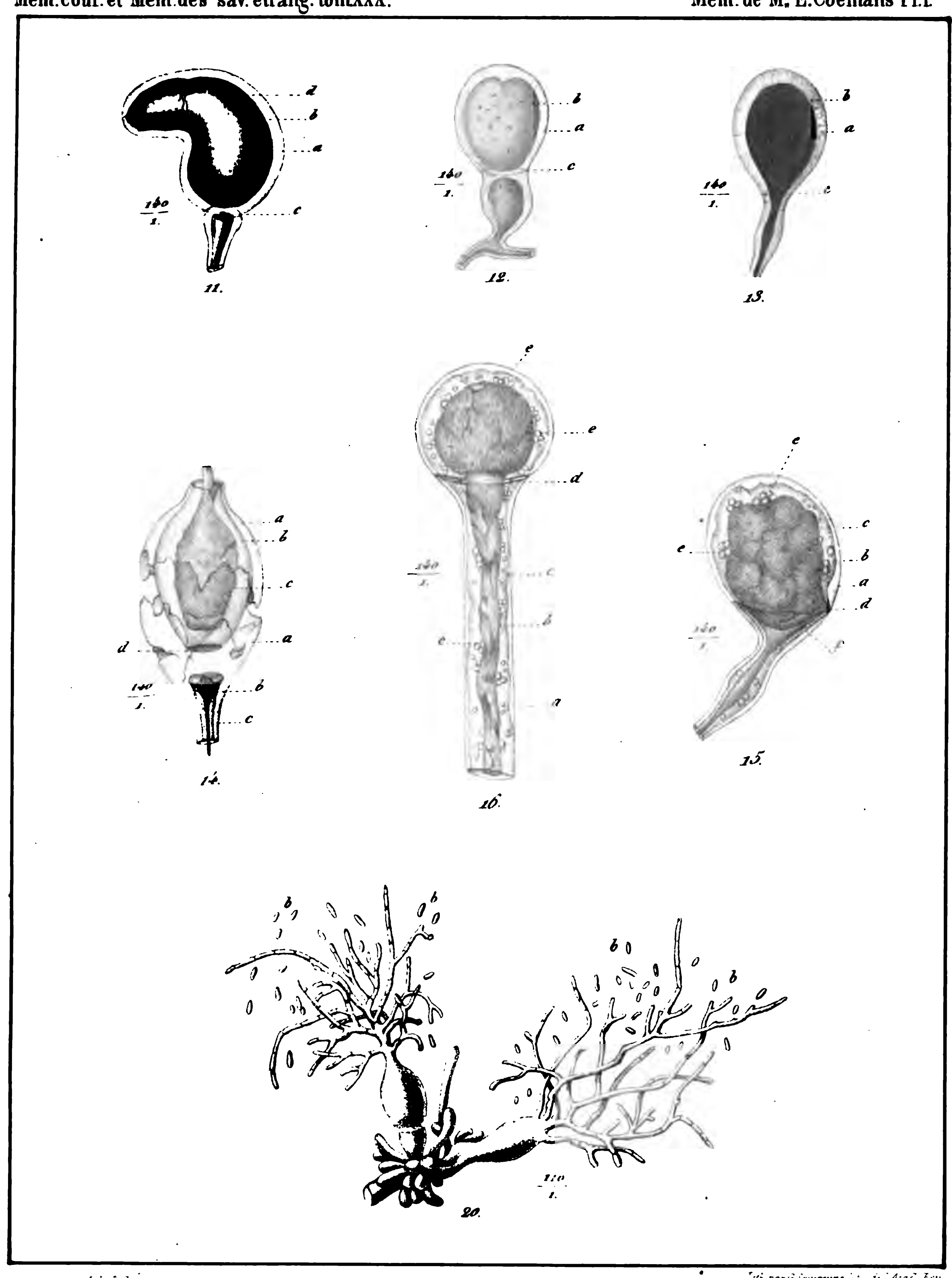
Je divise donc ce travail en deux parties. Je réunis dans la première les traditions ou documents qui servent de base à mes calculs; dans la seconde, je combine ces documents entre eux pour déterminer, et le genre de calendrier anté-islamique et l'âge du législateur, qui font l'objet du présent mémoire.

Deux autres époques se trouvent astronomiquement déterminées dans la seconde partie, de sorte que l'on a cinq époques qui peuvent concourir à notre conclusion.

J'ai fait suivre ce mémoire d'un appendice dans lequel j'ai discuté la question sous un autre point de vue, en examinant ce qu'ont donné sur ce sujet les écrivains les plus anciens.

[1] *Naci* veut dire *retard*. Suivant les lexicographes et les commentateurs du Coran, c'est retarder l'observance d'un mois sacré à un autre; c'est la remise de l'observance d'un mois sacré que l'on rejette sur un autre. Les historiens prétendent que le *naci* est tout à la fois l'intercalation d'un treizième mois que les Arabes faisaient pour rendre solaires leurs années, et le mois intercalé lui-même.

[2] J'ai déterminé, dans la deuxième partie, deux autres époques, celle d'une éclipse lunaire et celle du solstice d'été de l'année 541 de Jésus-Christ, ce qui porte à cinq au lieu de trois le nombre des époques sur lesquelles j'ai basé mes recherches.



Pilobolus oedipus Montagne.

Pilobolus crystallinus Tode.

» intitulé : *Al-mou-djam-al-Kabir,* par Al-Thabarani. Voici ce passage :
» Kharidja, fils de Zaïd, raconte que son père, le compagnon du prophète,
» dit : Le jour de *âchoura* n'est pas ce que le peuple veut dire; c'était un
» jour où l'on couvrait la *câba,* et où les Éthiopiens venaient jouer chez le
» prophète. Ce jour se transportait de mois en mois successivement dans
» l'année; la détermination de l'époque de ce jour était confiée à un certain
» Juif, et, après sa mort, elle fut confiée à Zaïd, fils de Thabit. »

Cela nous montre que le jour de *âchoura* dont il s'agit était, chez les Juifs et les Arabes de la Mekke, un jour fixé d'après l'année luni-solaire.

Mais dans quel mois et quel jour de ce mois? C'est ce que nous allons voir.

Albirouny nous donne sur ce sujet, dans son ouvrage intitulé : *Kitab-el-Athar* (manuscrit de l'Arsenal), le passage suivant :

« On a dit positivement que *âchoura* est un mot hébreu arabisé de *âchour,*
» qui est le dixième jour du mois juif *ticheri,* et dont le jeûne est le jeûne
» de Kippour; que les Arabes l'ont fixé, à l'imitation des Juifs, dans le
» dixième jour de leur premier mois. »

Je conclus donc de l'ensemble de ces témoignages que Mohammad entra à Médine le dixième jour du mois de *ticheri,* jour où le jeûne est prescrit par la Bible et dans lequel les Juifs, jusqu'à nos jours, observent rigoureusement cet acte de dévotion.

Cette conclusion me paraît d'autant plus conforme à la vérité, que ce jour est un lundi, de l'aveu de tous les écrivains. Pour connaître l'époque de cet événement dans le calendrier chrétien, il faut simplement chercher la date correspondante au dixième jour de l'an des Juifs [1] dans l'année 622 de Jésus-Christ, car l'hégire a eu lieu sans contestation dans le courant de cette année-là.

Le calcul [2] nous montre que ce jour était le 20 septembre, et c'est le huitième jour dans le mois lunaire, à partir de l'apparition de l'astre : car la conjonction eut lieu le samedi 11 septembre, à une heure environ après minuit, en comptant de Paris [3]; et on ne put voir le croissant à l'œil nu

[1] Cette année est la 4383$^{me}$ de la création, d'après le calcul des Juifs.

[2] *Voyez* mon *Mémoire sur le calendrier judaïque,* tome XXVI des *Mémoires des savants étrangers de l'Académie royale de Belgique.*

[3] Et à une heure et demie environ avant minuit, selon le temps de Médine.

que le dimanche soir du 12 au 13 septembre; de sorte que le lundi 13 septembre a dû être le premier du mois lunaire arabe.

Or, les traditions nous apprennent que ce fut, ou le 2, ou le 8, ou enfin le 12 du mois de *rabi I* que le prophète entra à Médine, et que ce jour était un lundi. Le 2 et le 12, n'étant pas des lundis, le 8 se trouve naturellement fixé pour l'événement, et l'on a pour conclusion finale que : l'hégire ou l'entrée de l'apôtre de Dieu à Médine, a eu lieu le lundi, 8 du mois de *rabi I*, correspondant au 20 septembre 622, et au 10 du mois de *ticheri* de l'an 4383 de la création.

Avant de quitter ce sujet, j'ai cru utile d'ajouter quelques observations touchant la tradition principale. Je ferai observer d'abord que la répétition de cette tradition, plusieurs fois par des voies diverses, dans les deux ouvrages les plus authentiques, Al-Boukhari et Mouslim, peut être considérée comme une preuve d'authenticité. Mais il y a un passage de la tradition qui ne s'accorde pas avec la Bible. Ce passage est celui-ci :

« Le prophète demanda aux Juifs ce qu'était ce jour-là, et on lui répondit » que c'était le jour où le Seigneur fit périr Pharaon dans les eaux et sauva » Moïse. »

Le jour dont on parle ici est le dixième du mois de *ticheri*, tandis que le jour où Moïse avait passé la mer Rouge était, suivant la Bible, le 21 du mois de *nissan* ou le septième jour après la fête de la Pâque des Juifs.

Ce manque de véracité pourrait-il être une preuve de non-authenticité de la tradition? Non certes : Ebn-Abbas n'a fait que rapporter ce qu'il avait vu, et ce qu'il avait entendu dire par quelques Juifs, sans doute peu instruits. Ce fait prouve uniquement leur ignorance de la cause de l'institution de ce jeûne.

Ce passage, du reste, se trouve complétement omis dans la même tradition rapportée dans un autre endroit de Boukhari par la voie d'Abou-Mousa, un des plus érudits des compagnons.

On y lit simplement (Boukhari, n° 301, folio 232, manusc. arab. supp.) :

« Abou-Mousa dit (d'après le rapport de Boukhari) que le prophète entra » à Médine lorsqu'un certain nombre de Juifs jeûnaient *âchoura* et le véné-

» raient. Le prophète dit alors : Il nous appartient plus qu'à eux de jeûner
» ce jour-là, et il prescrivit le jeûne ce jour-là. »

Quelques écrivains, n'ayant pas bien saisi le sens de cette tradition, prétendaient que l'hégire devait avoir eu lieu le dixième jour du mois de *moharram,* et que ce jour se trouvait en même temps correspondre au dixième jour du mois de *ticheri* chez les Juifs. L'auteur de *Kitab-al-Athar,* Albirouny, démontre avec raison l'impossibilité de la concordance sur laquelle se basait cette opinion. Mais il a poussé trop loin sa censure et sa critique; il a cru même prouver la non-authenticité de la tradition d'Ebn-Abbas. Voici ce qu'il dit sur ce sujet dans *Kitab-al-Athar* (manuscrit arabe de l'Arsenal de Paris) :

« La tradition nous rapporte que, quand le prophète entra à Médine, les
» Juifs jeûnaient *âchoura,* et que, sur sa demande, ils répondirent que c'était
» le jour où le Seigneur avait sauvé Moïse et ses compagnons, et fait périr
» Pharaon et les siens dans les eaux; que le prophète dit alors : Il nous
» convient mieux qu'aux Juifs de respecter la mémoire de Moïse, et il jeûna
» ce jour-là avec ses compagnons. Plus tard, quand le jeûne de *ramadan*
» fut prescrit, il n'a été question ni de jeûner, ni de ne pas jeûner *âchoura.*
» Cette tradition, ajoute Albirouny, n'est point authentique, parce que les
» preuves sont contre elle.

» En effet, continue notre auteur, le premier jour du mois de *moharram*
» de l'an 1 de l'hégire est le vendredi, 16 du mois de *thamouz* de l'année
» 933 d'Alexandre. En calculant le commencement de l'année juive dans
» cette année-là, nous trouvons que c'est le dimanche 12 du mois de *eloul,*
» et il correspond au 29 du mois de *shafar.* Le jeûne de *âchoura* était donc
» le mardi, 9 du mois de *rabi I.*

» Or, d'une part, l'hégire eut lieu dans la première moitié du mois de
» *rabi I;* de l'autre, le prophète dit, quand on lui demanda si l'on jeûnait le
» lundi, que c'était le jour où il était né, où il avait été envoyé, et où il
» avait reçu pour la première fois des versets du Coran : c'est aussi le jour
» où il a accompli sa fuite (hégire) pour Médine. Mais on n'est pas d'accord
» sur la date du lundi de l'hégire : les uns le placent au 2, les autres au 8,
» d'autres enfin, prétendent que c'était le 12 du mois de *rabi I;* le 8 est

» généralement adopté : ce jour ne peut être ni le 2, ni le 12 du mois,
» parce que ces deux jours ne sont pas des jours de lundi, attendu que ce
» mois de *rabi* commençait un lundi.

» On conclut de ce que nous venons d'exposer que l'entrée du prophète
» à Médine a eu lieu un jour avant *âchoura,* et cela ne peut avoir lieu
» dans le mois de *moharram,* que plusieurs années avant l'hégire et vingt
» et quelques années après. Comment pourrait-on donc dire que le prophète
» avait jeûné *âchoura,* parce qu'il s'accordait avec le dixième jour du mois
» de *moharram?*.... En outre, le *âchoura* était, dans la deuxième année de
» l'hégire, le samedi ..... du mois de *eloul,* et le neuvième du mois de *rabi I;*
» tout ce que l'on a dit de la concordance en question est donc absurde.

» Quant au dire que le Seigneur avait fait périr Pharaon dans les eaux
» ce jour-là, la Bible atteste formellement le contraire. Ce naufrage eut lieu
» le 21 *nisan,* qui est le septième jour de la fête de la Pâque des juifs. La
» Pâque juive, après l'entrée du prophète à Médine, arriva le mardi 22
» *adar* de l'année 933 [1] d'Alexandre : ce jour s'accordait avec le 17 de
» *ramadan.* Pharaon aurait péri le 23 du même mois : donc, il n'y a aucun
» moyen de justifier ce que l'on rapporte. »

Albirouny paraît avoir interprété la tradition de la même manière que ceux qu'il critiquait, savoir que le prophète serait entré à Médine le jour du *âchoura* juif, que ce jour était le même que celui des Musulmans, et qu'enfin le Seigneur avait sauvé Moïse à pareil jour.

Aussi, dit-il que « cette tradition n'est point authentique, parce que les
» preuves sont contre elle. »

Les preuves qu'il vient de donner sont :

1° La non-concordance des deux *âchoura;*

2° Que le *âchoura* juif aurait eu lieu le mardi, tandis que le jour de l'entrée du prophète à Médine serait le lundi précédent;

3° Que ce jour n'est point celui où Moïse avait été sauvé.

La non-concordance des deux *âchoura* ne saurait être une preuve contre l'authenticité de la tradition, parce que cette concordance n'y est nullement mentionnée; elle prouve seulement l'erreur de ceux qui ont cru voir dans la

[1] Le chiffre 933 est inexact : c'est 934.

tradition la conséquence de cet accord, tout en en affirmant l'authenticité. Albirouny lui-même ne la donne formellement que comme une preuve de l'absurdité de la concordance, quoique la manière dont elle est exposée laisse apercevoir une attaque contre la tradition, laquelle attaque est sans aucun fondement.

Pour la deuxième preuve, si l'on refait le calcul de notre auteur, on verra qu'elle est plutôt pour que contre l'authenticité de la tradition; en effet, en calculant bien, on trouve que le premier jour du mois de *ticheri* de l'année juive qui commence dans le courant de la première année de l'hégire, est le samedi 11 *eloul* (11 septembre, qui correspond à la fin du mois de *shafar*) et non pas le dimanche 12 *eloul,* comme le dit Albirouny; le *âchoura* ou le 10 *ticheri* était donc le lundi 8 *rabi I,* et non pas le mardi 9 du même mois arabe.

Quant au troisième point, nous l'avons déjà discuté dans ce document, et nous avons montré qu'il ne doit porter aucune atteinte à l'authenticité de la tradition.

Du reste, on peut prouver par d'autres moyens que l'entrée du prophète à Médine eut réellement lieu le 20 septembre 622, correspondant au dixième jour du mois de *ticheri,* qui est le *âchoura* juif :

1° Masoudi dit, dans *Mouroudj-El-dhahab*, supplément des manuscrits arabes, n° 715, fol. 152 :

« Entre l'ère de Jazdajird et celle de l'hégire, il y a 3624 [1] jours. »

Or, l'hégire même, ou l'entrée du prophète à Médine, a eu lieu, de l'aveu de tous les écrivains, 67 jours après le premier jour du mois de *mokarram,* qui commence l'ère de l'hégire: on doit donc avoir 3624 moins 67, ou 3557 jours entre le commencement de l'ère de Jazdajird et le jour de l'entrée du prophète à Médine; et comme l'ère de Jazdajird commence le mardi 16 juin, 632 de Jésus-Christ (8 ou 9 jours après la mort de Mohammad), il suffit de compter 3557 jours, en rétrogradant, à partir du 16 juin 632, pour avoir la date julienne qui correspont au jour de l'hégire. L'opération faite, on tombe sur le 20 septembre 622, qui est un lundi. L'entrée de l'apôtre à Médine eut donc réellement lieu le lundi 20 septembre 622, lequel jour correspond au 10 *ticheri* chez les Juifs;

[1] Ebn-Jounis et les autres savants de l'Orient sont d'accord pour adopter ce chiffre.

2° Le manuscrit arabe, n° 1131 du supplément, 3$^{me}$ fol. de la fin de l'ouvrage, contient ce qui suit :

« Nous disons qu'il y a entre le premier jour de l'année de l'hégire et le
» premier jour de l'année qui commence par l'équinoxe du printemps, et
» dans laquelle eut lieu la conjonction de Jupiter et de Saturne qui pré-
» cède la naissance de Mohammad, 51 années persanes, 4 mois, 8 jours [1] et
» 16 heures. »

L'équinoxe vernal dont il s'agit ici, est suivi par une conjonction de Jupiter et de Saturne; or, le calcul nous montre qu'il y eut, en effet, vers l'époque de la naissance de Mohammad, une conjonction de ces deux astres, vers le 29 ou le 30 mars de l'année 571 de Jésus-Christ, comme on le verra plus tard. L'équinoxe eut lieu, d'après mes calculs, le 19 mars, à 15 heures et 11 minutes après minuit, temps moyen de Médine. Le premier jour du mois de *moharram* de l'année de l'hégire tombe donc 51 années persanes, 4 mois, 8 jours et 16 heures après le 19 mars, 15 heures et 11 minutes de l'année 571 de Jésus-Christ.

En réduisant ce laps de temps en jours, et considérant que l'année persane est de 365 jours, on aura 18743 jours et 16 heures, ou 18744 jours, en ajoutant un jour pour la fraction. Or, l'hégire avait eu lieu 2 mois et 8 jours après le commencement du mois de *moharram :* on a donc 18744 plus 67 jours ou 18811 jours entre l'hégire même et l'époque de l'équinoxe vernal, savoir le 19 mars 571. Cela fait tomber l'hégire, ou l'entrée du prophète à Médine, le lundi 20 septembre 622, correspondant au 10 *ticheri*, jour de la fête de *kippour* chez les Juifs.

Passons maintenant au troisième et dernier document.

[1] Le texte arabe a été bien défiguré par les copistes. Le nombre 8 *jours* est, dans le texte, 3 *jours*. Ce nombre de 3 jours est à coup sûr une faute : ce doit être 8, car, en comptant 51 années persanes, 4 mois et 3 jours, etc..., à partir de l'équinoxe vernal indiqué dans le texte, on ne tombera pas sur une nouvelle lune, laquelle doit être celle du mois de *moharram* de l'année de l'hégire; mais, en restituant le nombre 8, on tombera sur une nouvelle lune, ce qui doit être. Si l'on examine, du reste, l'orthographe arabe du mot *trois* qui peut être écrit ainsi ثلث, et celle du mot 8 que l'on trace à la hâte ainsi ثمانية, on verra que le copiste a bien pu se tromper et prendre l'un pour l'autre.

## TROISIÈME DOCUMENT.

### SUR LA NAISSANCE DU PROPHÈTE MOHAMMAD.

Le manque de traditions formelles sur l'époque de la naissance du prophète m'oblige de donner, dans ce document, un grand nombre de traditions et de témoignages touchant ce sujet.

1° Nous trouvons ce qui suit dans le premier volume d'*Alsirah-al-Halabiah*, n° 596 du supplément des manuscrits de la Bibliothèque impériale de Paris, f^os^ 47 et suiv. :

« Kotadah rapporte que le prophète dit : Le lundi est le jour où je suis » né. Ebn-Backar et Ebn-Asakir disent que la naissance eut lieu à l'aube du » jour; on a à l'appui de cela les paroles d'Abdoul-Mouttaleb, aïeul du » prophète : Un enfant m'a été donné cette nuit au moment de l'aurore. » Saïd, fils de Mousaïb, rapporte que le prophète est né au milieu de la » journée. Ce jour était le 12 du mois de *rabi I*, et au printemps. Un poëte » faisant allusion à cette circonstance, dit :

» Le langage de la réalité pourrait mettre dans la bouche de Mohammad » cette vérité douce à entendre :

» Ma figure, la saison et le mois de ma naissance sont la prospérité, le » printemps et le mois de *rabi*.

» La veille du 12 *rabi I* est adoptée par le peuple pour célébrer la nais- » sance du prophète dans les grandes villes généralement, et à la Mekke en » particulier, surtout quand on veut visiter l'endroit de sa naissance. D'au- » tres disent que la naissance eut lieu le 10 du même mois; Hafiz-Damiathi » justifia cette opinion. On a dit aussi qu'il était né le 17. Les historiens assu- » rent que c'était le 8; Ebn-Dehiah soutient cette opinion, et il dit qu'il ne » peut pas en être autrement. »

Mohammad est donc né au printemps, le 8, le 10 ou le 12 du mois de *rabi I*, selon les opinions les plus accréditées.

2° L'exemplaire qui porte le n° 597 de l'ouvrage déjà mentionné du manuscrit arabe, nous donne ce qui suit, dans les feuilles 70 et suiv. :

« Halima (la nourrice de Mohammad) dit : Quand il (Mohammad) eut deux
» ans, nous l'amenâmes chez sa mère à la Mekke; mais tenant beaucoup à
» ce qu'il restât avec nous, à cause de la prospérité dont nous jouissions depuis
» le jour où il était entré chez nous, nous demandâmes à sa mère de nous
» le laisser encore cette année, en lui disant, je redoute pour lui l'air et la
» maladie de la Mekke. Nous ne cessâmes d'insister auprès d'elle jusqu'à ce
» qu'elle eût consenti à nous le rendre..... Halima continue : Nous retour-
» nâmes avec lui. Je jure (par Dieu) que quelques mois (deux ou trois mois,
» au rapport d'Ebn-el-Athir) après notre retour, il était avec son frère de lait
» auprès des moutons qui nous appartenaient, ou (selon le rapport de Tha-
» bari, qui ne contrarie pas ce qui précède) quand il grandit et eut deux ans
» (en supprimant la fraction de deux ou trois mois), tandis qu'il était avec
» son frère de lait auprès de nos moutons, derrière nos maisons, celui-ci
» arriva en courant nous dire à moi et à son père : Mon frère le korachite
» a été pris par deux hommes en habit blanc; ils l'ont fait coucher et ils lui
» ont ouvert le ventre..... J'accourus avec son père vers lui, continue Halima,
» nous le trouvâmes debout, mais pâle..... En retournant avec lui dans notre
» demeure, son père (nourricier) me dit : Écoute, Halima, je crains que cet
» enfant ne soit possédé du démon; reporte-le à ses parents avant que cette
» maladie ne se déclare..... Nous l'avons porté alors, continue-t-elle, à sa
» mère, à la Mekke. »

Or, nous trouvons dans le même ouvrage, f° 80, ce qui suit :

« On rapporte que Halima, après son retour de la Mekke avec lui, ne
» le laissait pas s'éloigner d'elle, et qu'un jour ne le voyant pas, elle se mit
» à sa recherche, et le trouva avec Chima, sa sœur de lait..., qui le faisait
» danser en lui chantant :

» Voilà un frère que ma mère n'a pas enfanté; il n'est pas non plus la
» progéniture de mon père ni de mon oncle; fais-le croître, ô mon Dieu,
» parmi les choses que tu fais croître. Halima s'écria alors : Dans cette cha-
» leur-là ! voulant dire qu'il était imprudent de le faire sortir par une pareille
» chaleur. »

Cet incident eut lieu, comme l'on voit, après le retour de Halima de la Mekke avec lui; or, la première tradition nous apprend qu'il avait alors deux

ans, et qu'il fut rendu à sa mère quant il avait deux ans et quelques mois (deux ou trois mois, selon le rapport d'Ebn-el-Athir). Donc, Mohammad était âgé de deux ans à deux ans et trois mois quand sa sœur de lait l'avait fait sortir au moment de la grande chaleur que sa nourrice redoutait pour lui.

Ceci a dû se passer en été ou à une époque très-voisine de l'été; d'où il résulte que la naissance de Mohammad a eu lieu au printemps.

Cette conclusion me paraît d'autant plus vraisemblable qu'elle est en parfait accord avec le premier témoignage et avec ceux que je vais donner.

3° Le cheik Imam Chams-el-Dine Mohammad, fils de Salim, connu sous le nom de *Khallal,* nous dit, dans son ouvrage *Al-Djifr-el-Kabir,* n° 1174, manuscrits arabes, ancien fonds, f° 4, ce qui suit :

« Il est certain que le prophète était né un lundi dans le mois de *rabi I,* le
» 20 du mois de *nisan* de l'année de l'éléphant, dans le temps de Kesra-
» nou-Cherwan (Kosroès le Grand); il reçut sa mission prophétique après
» quarante ans et un jour de sa naissance, et il accomplit son hégire à
» Médine à l'âge de cinquante-trois ans. »

Or, le mois de *nisan,* dans ce témoignage, est le mois d'avril. Mohammad est donc né au printemps.

4° Al-Masoudi fixe, dans son ouvrage intitulé *Mouroudj-el-Dhahab,* la naissance du prophète dans l'année 882 d'Alexandre. Voici ce qu'il dit d'après le manuscrit arabe n° 714, supplément, 1er volume, f° 279 :

« Ce qu'il y a de vrai dans tout ce que l'on a dit sur la naissance du pro-
» phète, c'est qu'elle eut lieu cinquante jours après l'arrivée des Éthiopiens
» avec leurs éléphants à la Mekke; ils avaient assiégé la Mekke le lundi,
» treize jours avant l'expiration du mois de *moharram* de l'année 882 de
» l'ère de Dhoul Karnaïn (de l'ère des Séleucides). Abraha (l'Éthiopien)
» arriva donc devant la Mekke le 17 du mois de *moharram,* correspondant
» à l'an 216 de l'ère arabe, qui commence par le pèlerinage de trahison,
» et à la quarantième année du règne de Kesra-nou-Cherwan. Le prophète
» naquit à la Mekke, le 8 du mois de *rabi I* de cette année-là. »

L'époque que Masoudi donne tombe en l'année 571 de Jésus-Christ.

5° A la page 283, vol. Ier de l'*Essai sur l'histoire des Arabes,* par M. Caussin de Perceval, on trouve la note suivante :

« Suivant Ebn-el-Athir, cité dans le *Tarikh-el-Khamicy,* f° 86 v°, Kesra régna quarante-sept ans et huit mois. (Les historiens grecs lui donnent, à un mois près, la même durée de règne.) Ebn-el-Athir ajoute : Kesra vécut sept ans et huit mois après la naissance de Mohammad. »

Donc, Kesra avait régné quarante ans complets lors de la naissance de Mohammad; or, ce monarque avait commencé à régner en 531 de Jésus-Christ; donc Mohammad est né dans le courant de l'année 571 de Jésus-Christ.

6° L'auteur de *Moukhtassar-el-Tawarikh,* Gergès [1], qui était fils d'Abi-Élyas......., etc., nous affirme (supplément manuscrit arabe n° 751) que Mohammad était âgé de huit ans lors de la mort de Kesra-nou-Cherwan. Or, nous trouvons dans l'*Art de vérifier les dates* (page 408) le passage suivant :

« L'an 579, il (Kesra) meurt à Ctésiphon, vers le mois de mars. »

Donc, Mohammad avait huit ans vers le mois de mars; il était né, par conséquent, vers la même époque de l'année 571 de Jésus-Christ.

7° L'illustre astronome royal de Berlin, M. Idler, cite, dans son *Traité de chronologie mathématique,* t. II, p. 498, le passage suivant :

« Mohammad est né, suivant Almakin, le 22 *nisan* de l'année 882, de » l'ère des Séleucides. »

Ce mois de *nisan* syriaque correspond au mois d'avril; ce serait donc le 22 avril 571 de Jésus-Christ que Mohammad est venu au monde.

8° M. Silvestre de Sacy donne (*Mémoire de l'Académie des inscriptions,* t. XLVIII, p. 530), sur la foi de Gagnier, le passage suivant :

« La naissance du prophète avait eu lieu à la sixième heure de la nuit du » lundi, le 20 *nisan* de l'année 882 d'Alexandre. »

Ce jour-là correspond au 20 avril 571 de Jésus-Christ.

Les astronomes orientaux paraissent être d'accord pour placer également la naissance de Mohammad vers le mois d'avril de l'année 571 de Jésus-Christ. Ils la fixent presque immédiatement après une conjonction de Jupiter et de Saturne, qui eut lieu dans la constellation du Scorpion.

J'ai calculé la position de ces deux astres, en me servant des tables de Bou-

[1] Cet auteur est connu en Europe sous le nom d'*Almakin,* comme le dit M. Reinaud, dans le catalogue du supplément des manuscrits arabes de la Bibliothèque impériale de Paris.

vard, et j'ai trouvé que, pour le 1er avril 571 de Jésus-Christ, Jupiter se trouvait dans 15° 2′ [1] du Scorpion, et Saturne dans 15° 17′ de la même constellation. Le mouvement de ces deux planètes était rétrograde. La conjonction doit avoir eu lieu le 29 ou le 30 mars 571 de Jésus-Christ. Cette conjonction est appelée par les astronomes orientaux : *la conjonction de la religion musulmane*, ou simplement : *la conjonction de la religion.*

Nous allons donner quelques-uns des témoignages qui s'y rapportent.

9° Le manuscrit arabe [2] n° 1161, ancien fonds, p. 88, contient :

« Je dis que la naissance du prophète eut lieu l'année de l'éléphant, la-
» quelle année est celle de 882 d'Alexandre; une conjonction de Saturne et
» Jupiter eut lieu dans la constellation du Scorpion cette année-là, peu de
» temps avant la naissance. »

D'après ce témoignage, Mohammad serait né peu de temps après le 30 mars 571 de Jésus-Christ.

10° Le témoignage suivant, que j'ai puisé dans l'ouvrage intitulé : *Mountaha-al-Idrak,* n° 1115, manuscrit arabe, ancien fonds, 8me chapitre, nous donne le même résultat, par ce passage :

« Le prophète naquit la première année de la conjonction qui fut comme
» le précurseur de la religion musulmane. »

Nous savons déjà que cette conjonction eut lieu le 29 ou le 30 mars de l'année 571; donc le prophète est né la même année.

11° Enfin, on trouve dans les manuscrits n° 1129 [3], supplément, fol. 15, et n° 1131 [4], supplément, 3me feuille de la fin de l'ouvrage, de pareils témoi-

[1] Voici les résultats exacts de mes calculs pour le 1er avril 571 de Jésus-Christ :

| PLANÈTES. | LONGIT. héliocentrique. | LATIT. héliocentrique. | LONGIT. géocentrique. | LATIT. géocentrique. |
|---|---|---|---|---|
| Jupiter . . . . . . . | 210°57′21″ | 1° 9′4″ B. | 215° 2′25″ | 1°23′50″ B. |
| Saturne. . . . . . . | 213° 4′ 4″ | 2°22′3″ B. | 215°16′47″ | 2°36′40″ B. |

[2] L'auteur de cet ouvrage s'appelle Jahya, fils de Mohammad, fils d'Abi Choukr, al Andalousie.

[3] Cet ouvrage s'appelle *Alkamil dans le secret des astres.*

[4] L'auteur est Ahmed, fils d'Abdoul-Djalil, et le nom de l'ouvrage: *Le livre des conjonctions.*

gnages qui prouvent que la naissance de Mohammad a eu lieu dans l'année 571 de Jésus-Christ, peu de temps après le 29 mars, époque du phénomène céleste déjà mentionné.

12° On peut ajouter, comme un douzième et dernier témoignage, les opinions des historiens qui placent cette naissance dans la quarantième [1] ou quarante et unième année [2] du règne de Kesra-nou-Cherwan. En effet, comme ces savants n'indiquent pas l'époque précise de l'année, on peut bien supposer que les premiers avaient en vue la fin de la quarantième année, et que les autres entendaient désigner le commencement de la quarante et unième année du règne du grand monarque persan. Par là, ces sentiments se trouvent rapprochés les uns des autres, et ils ne différeraient entre eux que de un ou deux mois; ils s'accorderaient alors pour placer la naissance du prophète dans l'année 571 de Jésus-Christ.

J'ajoute qu'Aboul-Féda place la naissance de Mohammad dans la 881me année d'Alexandre, et dans la 1316me de l'ère de Nabonassar; il la fait correspondre aussi à la 42me année du règne de Kesra-nou-Cherwan. Or, la 881me année d'Alexandre commence le 1er octobre 569 de Jésus-Christ, tandis que la 1316me de Nabonassar finit le 2 avril 569. Cette concordance est donc impossible. Nous devons, par conséquent, rejeter comme absurde et sans valeur ce témoignage d'Aboul-Féda, qui se contredit, du reste, lui-même.

En effet, à la page 14, édition de Gagnier, de la vie de Mohammad, par Aboul-Féda, cet historien dit que Mohammad a reçu sa mission à l'âge de quarante ans, l'année 922 d'Alexandre. D'après ce passage, Mohammad serait né en 882 de l'ère d'Alexandre ou en 571 de Jésus-Christ.

L'accord que l'on remarque dans cette multitude de traditions et de témoignages divers équivaut pour moi à une certitude; aussi je n'hésite pas un instant à admettre que Mohammad est né au printemps de l'année 571 de Jésus-Christ. Le mois d'avril étant désigné formellement dans quelques-uns de ces témoignages et par déduction dans d'autres, je l'admets également pour cet événement.

[1] Masoudi et l'auteur de *Moudjmil-al-Tawarikh*, etc.
[2] *Hamza-Isphahani*, etc.

Mais dans quel jour du mois d'avril la naissance du prophète a-t-elle eu lieu? C'est ce que nous allons voir.

La conjonction vraie de la lune a eu lieu (d'après les tables abrégées de Largeteau) dans le mois d'avril 571, le 10, à 9 heures 41 minutes environ après minuit, temps moyen de la Mekke [1]. Le croissant ne put être visible à l'œil nu que le 11 au soir. Donc le mois lunaire arabe correspondant a dû commencer le dimanche 12 avril. Mohammad est né (suivant les opinions les plus accréditées) le 8 ou le 10, ou enfin le 12 du mois lunaire *rabi I*. Le jour de sa naissance était un lundi, de l'aveu unanime de tous les écrivains. Et comme il n'y a, du 8 au 12 de ce mois lunaire, que le 9 qui fût un lundi, on ne peut admettre que ce jour pour celui de la naissance de Mohammad.

Je conclus donc, en terminant, que le prophète Mohammad est né le lundi 9 *rabi I,* ou le 20 avril 571 après Jésus-Christ.

[1] J'ai pris pour longitude de cette ville 37° 54′ 45″ à l'est du méridien de Paris, et pour latitude, 21° 28′ 17″ nord.

# SECONDE PARTIE.

## DU GENRE DE CALENDRIER ANTÉ-ISLAMIQUE ET DE L'AGE DU PROPHÈTE MOHAMMAD.

### *Calendrier anté-islamique.*

La connaissance du système de calendrier qui était en usage dans le Hidjaz (Arabie Pétrée) et particulièrement à la Mekke, ainsi qu'à Jathrib (Médine), est excessivement facile, d'après les trois époques dont les déterminations, indépendantes les unes des autres, ont fait le sujet de la première partie de ce travail. En effet, ces époques étant :

1° Le 27 janvier 632 de Jésus-Christ, qui tombe le 29 d'un mois arabe, *chawal;*

2° Le 20 septembre 622 de Jésus-Christ, qui tombe le lundi 8 d'un mois arabe *rabi I;*

3° Le 20 avril 571 de Jésus-Christ, qui correspond au lundi 9 d'un mois de *rabi I,* chez les Arabes de la Mekke.

Si l'on compare la troisième époque à la deuxième, on voit que les Mekkois ont dû compter du 9 *rabi I,* ou 20 avril 571, au 8 *rabi I,* ou 20 septembre 622, un nombre entier d'années (moins un jour), quel que soit le système de calendrier dont ils se servaient alors. Le laps de temps entre ces deux époques est de 18780 jours. Les Arabes réglaient leurs mois, avant comme après l'islamisme, sur la marche de la lune; le mois était tantôt de 29, tantôt de 30 jours. L'année ordinaire était de 12 lunaisons, et de temps en temps ils intercalaient, au dire des historiens, une treizième lunaison pour rendre l'année solaire. On intercalait 9 mois dans une période de 24 ans; 7 mois

dans 19 ans; 1 mois tous les trois ans; ou, enfin, un mois tous les deux ans, suivant les diverses opinions.

Les commentateurs du Coran, les lexicographes et les biographes autorisent à croire que les Arabes païens se servaient d'un calendrier purement lunaire. C'est donc l'un de ces cinq systèmes qui se trouvait en usage à la Mekke, quand le prophète Mohammad quitta cette ville pour se réfugier à Médine.

Or, nous avons déjà remarqué que 18780 jours doivent former, à un jour près, un nombre entier d'années du système de calendrier anté-islamique.

En divisant donc 18780 jours par le nombre [1] des jours de l'année moyenne de chacun des cinq systèmes, on doit reconnaître lequel de ces systèmes était réellement en usage, par le seul fait d'avoir un nombre entier dans le quotient de la division correspondante. L'opération faite, on voit que c'est le dernier système (année purement lunaire) qui satisfait seul et rigoureusement à cette condition; car 18780 divisé par 354$^{j}$,367, donne 53 ans moins un jour.

Je conclus donc que les Mekkois se servaient, dans les cinquante années antérieures à l'hégire, d'un calendrier purement lunaire.

Voyons à présent si nous ne pouvons pas obtenir le même résultat par la comparaison de la troisième époque avec la première. Ces deux époques sont:

1° Le 20 avril 571, qui est un neuvième jour d'un mois arabe *rabi I;*

2° Le 27 janvier 632, qui tombe un vingt-neuvième jour d'un mois arabe, *chawâl.*

La durée du temps comprise entre elles est de 22197 jours; or, du 9 *rabi I* jusqu'au 29 *chawâl,* il y a 226 jours; il faut donc que 22197 jours donnent un nombre entier d'années plus 226 jours. En effet, 22197 divisé par 354$^{j}$,367 (durée moyenne de l'année lunaire vague) donne pour quotient 62 ans, et pour reste, 226 jours. L'année qui était en usage à la Mekke et

[1] La durée de l'année moyenne dans le premier système (en intercalant 9 mois dans 24 ans) est de 365$^{j}$,441; celle de l'année du deuxième système (en intercalant 7 mois dans 17 ans) est de 365$^{j}$,246; pour le troisième, on a pour durée de l'année moyenne 364$^{j}$,211; dans le quatrième, on a 369$^{j}$,132; enfin, dans le cinquième système, la longueur de l'année purement lunaire est de 354$^{j}$,367.

à Médine, pendant les 62 ans qui précédèrent le pèlerinage d'adieu, fut donc l'année lunaire vague.

L'identité de ces deux résultats ne justifie-t-elle pas à la fois, et l'exactitude des trois époques, et celle du résultat lui-même? Il me semble que oui. Tout paraît, du reste, nous le confirmer. Nous avons déjà donné, dans le second document, une tradition rapportée par Thabarani au sujet du mot de *âchoura;* si on l'examine attentivement, l'on y verra un témoignage direct de l'usage du calendrier purement lunaire chez les Mekkois avant l'hégire; en effet, cette tradition porte :

« Kharidja, fils de Zaïd, raconte que son père (le compagnon du pro-
» phète) dit : Le jour de *âchoura* n'est pas ce que le peuple veut dire. C'était
» un jour où l'on couvrait la *câba,* et où les Éthiopiens venaient jouer chez
» le prophète. Ce jour se transportait (de mois en mois successivement) dans
» l'année. La détermination de l'époque de ce jour était confiée à un certain
» Juif, et après sa mort, elle fut confiée à Zaïd, fils de Thabit. »

Le véritable jour de *âchoura,* dont la détermination était confiée à un Juif, est sans doute le *âchoura* des Juifs (10^me^ du mois de *ticheri*), qui avait été, à ce qu'il paraît, adopté par les Arabes païens de la Mekke. Or, pour que le dixième jour du mois de *ticheri* (de l'année juive luni-solaire) se transportât de mois en mois successivement dans une autre année, il faut que celle-ci ait été purement lunaire.

Pour ceux qui conserveraient encore quelque doute sur ce point important, malgré les preuves évidentes que je viens de donner, je vais encore en présenter d'autres astronomiquement démontrées.

Le manuscrit n° 213 du supplément des manuscrits arabes de la Bibliothèque impériale de Paris, nous apprend, dans la 2^me^ feuille, à partir de la fin du volume, que :

« L'auteur de l'ouvrage intitulé : *Djema-al-Eddah,* dit qu'une éclipse de
» lune eut lieu dans le mois de *djoumada II* de l'an 4 de l'hégire. »

On voit sans peine que cette éclipse ne peut être que celle du 20 novembre 625 [1] de Jésus-Christ. Le 14 du mois arabe *djoumada II* correspond donc

[1] Le calcul nous montre que la lune s'éclipsa vers 3 heures après minuit de Médine, le 20 novembre 625 de Jésus-Christ.

au 20 novembre 625. Voilà une époque astronomiquement déterminée.

Nous lisons aussi dans le *Journal asiatique*, cahier d'avril 1843, ce qui suit :

« Procope [1] nous apprend que, dans une assemblée de généraux romains,
» convoquée à Dara par Bélisaire, en 541 de Jésus-Christ, pour délibérer
» sur un plan de campagne, deux officiers qui commandaient un corps formé
» des garnisons de Syrie, déclarèrent qu'ils ne pouvaient suivre l'armée dans
» sa marche contre la ville de Nisibe, donnant pour raison que leur absence
» laisserait la Syrie et la Phénicie exposées aux incursions du roi des Arabes,
» Alamondar (Almoundhir III). Bélisaire démontra à ces officiers que leur
» crainte était mal fondée, parce que l'on approchait du solstice d'été, temps
» auquel les Arabes païens devaient consacrer deux mois entiers aux pra-
» tiques de leur religion, sans faire aucun usage de leurs armes. »

Or, les Arabes avaient dans l'année deux époques consacrées à leur culte, et dans lesquelles ils ne faisaient aucun usage de leurs armes. Ces deux époques étaient, l'une d'un mois de durée (le mois de *radjab*), l'autre de deux ou trois mois (*dhoul-câda*, *dhoul-hedja* et *moharram*). Laquelle de ces deux époques Procope avait-il en vue? La teneur du passage précédent semblerait indiquer que c'est la seconde, et que les deux mois dont il s'agit sont *dhoul-câda* et *dhoul-hedja;* mais un examen très-rigoureux nous démontre que cela ne peut pas être; et voici comment : si les deux mois de *dhoul-cada* et *dhoul-hedja* se sont réellement présentés à l'époque du solstice d'été, ils ont dû s'écouler, ou tous deux avant, ou l'un avant et l'autre après, ou, enfin, tous deux après le 20 juin 541, qui est l'époque de ce solstice; de sorte que la nouvelle lune, qui eut lieu le 10 juin 541 de Jésus-Christ, serait celle du mois de *dhoul-hedja*, de *dhoul-câda*, ou, enfin, celle du mois de *chawâl*.

Or, d'une part, le système de calendrier qui était alors en usage est l'un des cinq systèmes suivantes : intercalation de 9 mois dans une période de 24 années; intercalation de 7 mois dans 19 ans; celle d'un mois dans 3 ans; un mois dans 2 ans, ou, enfin, le système purement lunaire.

D'autre part, nous avons deux époques physiquement déterminées, savoir :

[1] Procope, *De Bello persico*, lib. II, cap. XVI.

1° le 27 janvier 632, date d'une éclipse solaire, qui correspond à la fin d'un mois arabe *chawâl*, ou, ce qui revient au même, le 28 janvier 632, qui était la nouvelle lune du mois de *dhoul-cada;* 2° le 20 novembre 625, date d'une éclipse lunaire, qui tombait dans un mois arabe *djoumada II*, ou bien le 6 novembre 625, qui était la nouvelle lune du mois de *djoumada II*. Il faut donc, pour que le passage précédent de Procope soit vrai, qu'en rétrogradant, soit à partir de la nouvelle lune de *dhoul-câda*, le 28 janvier 632, soit à partir de celle de *djoumada II*, 6 novembre 625, on tombe, dans les deux cas, et dans un des cinq systèmes déjà mentionnés, sur un même mois, *dhoul-hedja*, *dhoul-câda* ou *chawâl*. Or, le calcul nous montre que cette condition n'est remplie par aucun des cinq systèmes. En effet, si l'on part des deux époques certaines, la nouvelle lune du mois de *dhoul-câda* correspondant au 28 janvier 632, et celle du mois de *djoumada II* ou 6 novembre 625, et si l'on rétrograde jusqu'au 10 juin 541, qui correspond à un mois arabe incertain (considérant de plus que ces deux laps de temps font successivement 33104 jours ou 1121 lunaisons, et 30830 jours ou 1044 lunaisons), on compte, dans le premier système intercalaire, d'une part, 90 années et 8 ou 7 lunaisons, de l'autre 84 années et 5 ou 4 lunaisons; ce qui nous fait tomber sur *rabi I* ou *rabi II*, dans le premier cas, et sur *moharram* ou *safar* dans le second.

Dans le deuxième système intercalaire, on compte également 90 années et 8 lunaisons, d'une part, et 84 et 5 mois de l'autre; ce qui nous fait tomber sur le mois de *rabi I* dans le premier cas, et sur celui de *moharram* dans le second.

Dans le troisième système intercalaire, on trouve 90 ans et 11 mois, d'une part, et 84 et 8 mois de l'autre; de sorte qu'on tombe sur le mois de *dhoul-hedja* dans le premier cas, et sur le mois de *chawâl* dans le second.

Dans le quatrième système intercalaire, on a 89 années et 9 mois, d'une part, et 83 et 7 mois de l'autre; et l'on tombe, par conséquent, sur les deux mois de *safar* et *dhoul-cada*.

Enfin, en suivant le système purement lunaire, on compte 93 années et 5 mois dans le premier cas, et 87 années justes dans le second; de sorte que l'on tombe, dans les deux cas, sur le mois de *djoumada II*.

Le 10 juin 541 n'a donc pu être ni la nouvelle lune de *dhoul-hedja*, ni celle de *dhoul-câda*, ni enfin celle de *chawâl*, ou, ce qui revient au même, les deux mois de *dhoul-hedja* et *dhoul-câda* ne se sont pas présentés, en 541, à l'époque du solstice d'été.

Voyons à présent si Procope ne s'est pas trompé, et s'il n'a pas pris l'une des deux époques (*dhoul-câda* et *dhoul-hedja*) pour l'autre (le mois de *radjab*); ou du moins, si ses copistes n'ont pas défiguré le passage précédent, en copiant δύο μάλιστα μῆνας, deux mois entiers, à la place de ἕνα μάλιστα μῆνα, un mois entier. Dans ce cas, la nouvelle lune du mois de *radjab* aurait eu lieu en 541, ou immédiatement avant le solstice d'été, ou immédiatement après; de sorte que le 10 juin 541, époque d'une nouvelle lune, serait, ou celle du mois de *radjab*, ou bien celle du mois de *djoumada II*. Or, pour que cela ait eu réellement lieu, il faut qu'en partant des deux époques certaines déjà mentionnées, et qu'en remontant jusqu'au 10 juin 541, l'on tombe, dans les deux cas, en suivant l'un des cinq systèmes, sur un même mois arabe, *radjab* ou *djoumada II*.

Le calcul nous montre, en effet, que cette condition se trouve rigoureusement remplie (le tableau de ce calcul est déjà donné plus haut). Il est donc certain que Procope prit l'époque des deux mois *dhoul-câda* et *dhoul-hedja* pour celle du mois de *radjab*, si ses copistes ne l'ont pas toutefois mal copié.

Quelle est la conséquence de cela? La voici :

La nouvelle lune qui suit immédiatement le solstice d'été de l'année 541, étant celle du mois de *radjab*, et le temps écoulé entre cette époque, et chacune des deux autres déterminées par les éclipses, étant exclusivement compatible avec le système purement lunaire, c'est donc ce même et unique système qui était certainement alors en usage parmi les Arabes, un siècle environ avant que le législateur de l'islamisme abolit le *naci*.

L'existence du mois de *radjab* immédiatement après le solstice d'été de 541, se vérifie également par les deux époques qui font l'objet des 2me et 3me documents.

Ainsi, nous avons cinq époques déterminées chacune d'une manière indépendante des autres, et qui, combinées deux à deux, donnent dix résul-

tats ou laps de temps dont l'écoulement se trouve exclusivement conforme au système purement lunaire. L'accord parfait de tous ces résultats est assurément une preuve certaine de l'erreur de ceux qui ont admis l'usage d'un calendrier luni-solaire chez les Arabes païens. Sans aller même plus loin, la comparaison seule de l'époque de l'éclipse solaire avec celle de l'éclipse lunaire est une preuve mathématique de l'usage du calendrier lunaire vague chez ce peuple.

Je conclus donc, en résumant, que les Arabes, avant comme après l'islamisme, ne se sont servis que d'un calendrier purement lunaire.

### *Age du prophète Mohammad.*

Mohammad est mort le 12 du mois de *rabi I* de l'an 11 de l'hégire, d'après l'opinion la plus accréditée et généralement admise. Ce jour tombe au commencement du mois de juin 632 de Jésus-Christ; c'était, dit-on, un lundi; or, la nouvelle lune ou la conjonction vraie eut lieu le dimanche 24 mai, 9 heures environ après midi moyen de Médine; de sorte qu'on ne put voir la nouvelle lune à l'œil nu que le mardi au soir; donc le mois arabe *rabi I* commença le mercredi 27 mai. Le 12 de ce mois tombe un dimanche 7 juin. Mohammad mourut donc ou le dimanche 12 *rabi I* (7 juin 632), ou le lundi 13 *rabi I* (8 juin 632). Et comme la naissance du législateur eut lieu, d'après le troisième document, le 20 avril 571, et que du 20 avril 571 au 7 juin 632, on compte 22329 jours, Mohammad a donc vécu ce nombre de jours, ce qui fait 61 années solaires, plus 48 jours, ou bien 63 années lunaires vagues et 3 jours.

Les traditions que Boukhari et Mouslim rapportent sur ce sujet font vivre le prophète 60, 63 ou 65 années. Le chiffre de 63 a été adopté par la majorité des écrivains anciens et par l'unanimité des modernes. Almasoudi, après avoir donné toutes les traditions qui ont été rapportées sur l'âge de Mohammad, dit [1] :

« Nous avons trouvé que la postérité de Mohammad et de ses parents ne » lui donnait que 63 années d'existence. »

[1] *Mouzoudj-el-Dhahad*, n° 715, supplément arabe, fol. 179 et suiv.

Cet accord que l'on remarque entre les traditions généralement adoptées et le résultat précédent ne justifie-t-il pas encore notre conclusion sur l'usage d'une année purement lunaire avant l'islamisme?

Avant de terminer, disons quelques mots sur l'époque de la mission prophétique de Mohammad.

Les traditions de Boukhari et de Mouslim, ainsi que les témoignages des historiens s'accordent (sauf quelques rares exceptions) à fixer le commencement de la mission prophétique de Mohammad 40 ans après sa naissance; or, Mohammad est né, d'après mes calculs, le 20 avril 571; si l'on compte 40 années lunaires ou 14174 jours à partir de cette époque, on tombe dans le commencement du mois de février de l'année 610 de Jésus-Christ. Ce fut donc en février, c'est-à-dire dans l'hiver de l'année 610 que Mohammad reçut sa mission. Le 1er verset de la 74me surah : « O toi qui es enveloppé dans » tes vêtements, lève-toi et va prêcher les hommes, » qui lui avait annoncé sa mission divine, ne montre-t-il pas, par son énoncé même, qu'il lui a été révélé dans les rigueurs de l'hiver [1] ?

S'il en est ainsi, ce serait un autre témoignage pour justifier l'usage du calendrier purement lunaire parmi les Arabes païens.

[1] Les commentateurs du Coran disent, les uns que Mohammad s'était enveloppé dans son manteau, à la suite d'une nouvelle fâcheuse que ses ennemis les Coraïchites avaient fait courir; les autres, qu'il s'était endormi enveloppé dans son manteau. Mohie-el-Dine Ebn-al-Arabi dit : c'est à cause du froid que le prophète éprouvait après la révélation qu'il s'enveloppa dans ses vêtements.

# APPENDICE.

Les noms des mois qui étaient en usage parmi les Arabes païens, lors de l'apparition de l'islamisme, sont encore les mêmes aujourd'hui, savoir :

| | |
|---|---|
| *Moharram* . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1er mois |
| *Safar*. . . . . . . . . . . . . . . . . . | 2me » |
| *Rabi I* . . . . . . . . . . . . . . . . . | 3me » |
| *Rabi II* . . . . . . . . . . . . . . . . . | 4me » |
| *Djoumada I* . . . . . . . . . . . . . . . | 5me » |
| *Djoumada II* . . . . . . . . . . . . . . . | 6me » |
| *Radjab* . . . . . . . . . . . . . . . . . | 7me » |
| *Chabân* . . . . . . . . . . . . . . . . . | 8me » |
| *Ramadhan* . . . . . . . . . . . . . . . . | 9me » |
| *Chawâl* . . . . . . . . . . . . . . . . . | 10me » |
| *Dhoul-câda*. . . . . . . . . . . . . . . . | 11me » |
| *Dhoul-hedja* . . . . . . . . . . . . . . . | 12me » |

Quatre de ces mois, *radjab*, *dhoul-câda*, *dhoul-hedja* et *moharram* étaient considérés, depuis un temps immémorial, comme sacrés ou inviolables; de sorte que toute espèce d'hostilité devait cesser pendant ce laps de temps de l'année. « C'était, comme le dit M. Caussin de Perceval, une espèce de trêve de Dieu, sagement instituée chez un peuple avide de guerre, de pillage et de vengeance. Elle contribuait à empêcher les diverses tribus de s'entre-détruire, et donnait au commerce quelques moments fixes de sécurité. »

Il y avait donc deux époques différentes dans l'année arabe où toute hostilité devait cesser : c'étaient le mois de *radjab*, d'une part, et ceux de *dhoul-câda*, *dhoul-hedja* et *moharram* de l'autre. Or, l'inaction, pendant trois mois consécutifs, parut pénible à ce peuple actif, qui ne vivait, pour ainsi dire, que de pillage.

Pour satisfaire à ses instincts belliqueux et à son ambition, on établit ce qu'on appelle le *naci*, c'est-à-dire l'ajournement de l'observance d'un mois sacré à un autre mois non sacré.

De temps en temps, on remettait le privilége sacré du mois de *moharram* au mois suivant, *safar;* de sorte que l'on avait seulement deux mois consécutifs sacrés au lieu de trois. Voici ce qu'Almasoudi nous dit à ce sujet (*voir* Mouroudj-Aldhahab [1], chapitre de l'histoire de la Mekke) :

« Les Naçaa [2] étaient de la tribu des enfants de Mâlik, fils de Kinânah; le
» premier était Hodhaïfah, fils d'Obaïd, et ensuite son fils Kal, fils de Hod-
» haïfah; celui-ci a vu naître l'islamisme. Le dernier des Naçaa est Abou-
» Temâmah.

» Quand les Arabes avaient accompli la cérémonie du pèlerinage, ils se
» rassemblaient, avant de s'en aller, autour du *nâci*. Celui-ci se levait, et
» il disait : Mon Dieu, je déclare non sacré l'un des deux *safars*, et je
» remets l'autre à l'année prochaine.

» L'islamisme parut lorsque les mois sacrés avaient repris leur place
» primitive dans l'année; c'est là le sens de la parole du prophète : Le
» temps est redevenu tel qu'il était le jour où Dieu créa les cieux et la terre.
» Ce que dit le législateur dans ce hadith fut révélé par Dieu même dans
» ce verset du Coran : Le *naci* est un surcroît d'infidélité. Umaïr, fils de
» Kaïs, dit, en se glorifiant : N'est-ce pas nous qui autorisions la remise
» des mois parmi les enfants de Maadd, qui leur ordonnions de tenir pour
» sacrés les mois qui étaient profanes ? »

Les noms que nous avons déjà cités ont été, dit-on, donnés aux mois arabes dans le temps de Kilab, fils de Morra, un des aïeux de Mohammad, deux siècles environ avant l'islamisme. Les noms que ces mois avaient anciennement ne nous sont pas connus d'une manière positive; Almasoudi nous en donne, dans le *Mouroudj-el-Dhahab*, les dénominations suivantes, qui sont, en commençant par *moharram : natik*, 1<sup>er</sup> mois; *thakil*, 2<sup>me</sup> mois, *talik*, 3<sup>me</sup> mois; *nadjir*, 4<sup>me</sup> mois, *aslakh* ou *asmâkh*, suivant les différents manuscrits, 5<sup>me</sup> mois; *amnah*, 6<sup>me</sup> mois; *ahlak*, 7<sup>me</sup> mois; *kasa*, 8<sup>me</sup> mois;

[1] Manuscrit arabe n° 715, fol. 116 verso du supplément.

[2] *Naçaa* est le pluriel de *nâci;* le *nâci* est l'homme qui pratique le *naci*.

*zaher*, 9me mois; *bart* ou *mart*, 10me mois; *harf* ou *na-ïs*, 11me mois; *naas* ou *meris*, 12me mois.

Albirouny paraît avoir été plus instruit qu'Almasoudi dans cette matière : voici ce qu'il en dit dans le *Kitab-el-Athar :*

« Les mois arabes avaient eu d'autres noms par lesquels les anciens les » désignaient, ce sont : *moutamer*, *nadjir*, *khawan*, *ssawan*, *hennin*, » *ronna*, *assamm*, *adel*, *natik*, *waghel*, *hewah* et *barak*. »

Cet auteur ajoute ensuite :

« Quelquefois on rencontre ces noms avec un peu de changement, soit » dans les dénominations elles-mêmes, soit dans leur ordre propre, comme » on le voit dans ces vers anciens :

» Par *moutamer* et *nadjir* nous commençons notre année.
» Nous faisons suivre au mois de *kawan* celui de *ssawan*.
» Ensuite viennent *robba*, *baïdah* et *assamm* dans lequel on n'entend point le bruit
» des armes.
» *Waghel*, *natel* et *adhel*, ensuite *rannah* et *barack*, complètent le nombre des mois
» de l'année qui sont faciles à retenir. »

Le même auteur donne une troisième série de dénominations qui ne diffère de la première que par le changement du nom du onzième mois, *hewah* en celui de *rannah*.

Enfin, en consultant, de plus, les dictionnaires arabes pour ces noms, on conclut que les Arabes païens appelaient le mois de moharram, *moutamer;* celui de safar, *nadjir;* rabi I, *khawan;* rabi II, *ssawan;* djoumada I, *hennin* ou *robba* [1]; djoumada II, *ronna* ou *baïdah;* radjab, *assamm;* chabân, *waghel* ou *waïl*, ou enfin *adhel;* ramadhan, *natik* ou *nattel;* chawâl, *wool* ou *woghl*, ou *adhel;* dhoul-câda, *hewah* ou *rannah;* enfin, le mois de dhoulhedja s'appelait *barak*.

Parmi ces noms on en distingue quatre qui ont des rapports avec la nature des quatre saisons. On a, en première ligne, le mot *nadjir*, donné par Masoudi pour le quatrième mois de sa série, et par Albirouny pour le second.

[1] *Robba* était également le nom commun des deux *djoumada*.

*Nadjir* veut dire *excessivement chaud;* Albirouny cite à l'appui de cela, une tradition très-ancienne faite en vers de deux hémistiches. La voici : « L'homme altéré dans le mois de *nadjir* trouverait si agréable l'eau crou- » pissante et corrompue qu'il n'osait naguère aborder [1]. »

Le mois de *nadjir*, à l'époque où il a reçu son nom, devait donc tomber en plein été; de sorte que *moutamer, nadjir* et *khawan* ont dû être les trois mois de l'été.

Les trois mois suivants, *ssawann, robba* et *baïdach*, seront ceux de l'automne. En effet, on distingue le caractère de cette saison par la signification du mot *robba*, qui dérive ou de *rabab*, qui veut dire grande quantité d'eau, ou bien de *rabâbah*, qui signifie nuage qui change de nuance, qui paraît tour à tour blanc ou noir.

Les septième, huitième et neuvième mois, savoir : *assamm, waghel* et *nattel*, qui doivent avoir été ceux de l'hiver, ont également, dans le mois de *nattel*, quelque chose qui caractérise l'hiver; car *nattel* signifie celui qui puise de l'eau d'une rivière, d'un puits ou autre source, pour le verser ailleurs, dans l'intention d'arroser la terre, ou pour une autre destination.

Enfin, le printemps se trouve caractérisé par le premier des trois derniers mois, *adel, hewah* et *barak;* car *adel* est celui qui égalise, qui observe l'égalité, qui met autant d'un côté que de l'autre. C'est donc parce que ce mois-là tombait, lors de la nomenclature, à l'époque de l'équinoxe du printemps, où les jours égalent les nuits, qu'on l'a nommé *adel*, ou égalisateur.

On remarque également des rapports entre les saisons et les noms de quelques-uns des mois modernes, *moharram, safar, rabi*, etc. : car *ramadhan* signifie grande chaleur; *rabi*, pluie printanière, végétation printanière, etc.; et enfin *djoumada* veut dire sec, et *djamâd*, desséché, à cause du manque de pluie. La racine *djamada* veut dire geler, et *djoumadi*, froid glacial.

Ces rapports frappants entre les noms des mois, soit anciens, soit nouveaux, et les saisons indiquent-ils que les mêmes mois appartiennent à une année luni-solaire? Pour les mois anciens, les témoignages unanimes de tous

[1] Cette traduction est un peu libre; je ne sais même pas si j'en ai bien saisi le sens. Voici, du reste, la traduction littérale : « L'homme se cache la figure à l'aspect d'une eau croupissante et corrompue; mais si l'homme altéré, dans le mois de *nadjir*, goûtait cette même eau....! »

les écrivains (historiens ou autres), l'absence complète de toute tradition affirmative, et le caractère nomade des Arabes de cette époque, qui connaissaient à peine l'agriculture, tout enfin porte à croire que ce peuple ne se servait que d'une année purement lunaire. Ces rapports ne peuvent donc pas prouver que les mois *nadjir... robba... nattel...* et *adel...* appartiennent à une année luni-solaire ou agronomique. Les Arabes auraient simplement lié ces mois avec les circonstances atmosphériques ou autres, pour l'année de la nomenclature, sans porter leur vue plus loin, et sans remarquer qu'après dix-sept ans, les mois d'été passeraient en hiver, et *vice versâ*. Cela étant, les nouveaux mois, *rabi, djoumada* et *ramadhan,* etc., peuvent-ils avoir été à leur tour institués pour former une année agronomique? Il me semble que non; car nous venons de voir que les mois anciens, malgré leur intime relation avec l'année agronomique, ne se rapportent qu'à une année lunaire vague. Il n'y a donc point de raison d'attribuer le nouveau système des mois à une année luni-solaire. Cependant, nos meilleurs historiens prétendent le contraire. Ici on peut se demander sur quoi ces historiens fondent leur prétention, et s'ils ne se sont point copiés les uns les autres : ceci est une question importante.

Je réponds affirmativement à ce dernier point. La preuve en est très-simple; elle consiste dans la comparaison des passages que ces historiens donnent sur ce sujet. M. Caussin de Perceval a déjà remarqué [1] que Makrisi avait copié Albirouny presque textuellement. Albirouny à son tour, ainsi que Mohammad-al-Charcaci, a copié l'auteur de *Kitab-el-Oulouf,* Abou Mâchar [2], le plus ancien des écrivains qui ont parlé de cette matière, et dont l'écrit nous est parvenu. Aboul-Féda copia Masoudi.

Les passages de Makrisi, de Mohammad-al-Charcaci et d'Aboul-Féda sont insérés dans le mémoire de M. Silvestre de Sacy, tome XLVIII des *Mémoires de l'Académie des inscriptions et belles-lettres;* celui d'Albirouny est en partie dans le mémoire de M. Caussin de Perceval, *Journal asiatique,* 1843,

[1] Voir le mémoire de M. Caussin de Perceval, sur le calendrier arabe avant l'islamisme, *Journal asiatique,* 1843, cahier d'avril.

[2] Masoudi parle d'Abou-Mâchar dans le *Mouroudj-el-Dhahab,* composé l'an 334 de l'hégire. Abou-Mâchar mourut, d'après Ebn-Kallicân, en l'an 272 de l'hégire.

cahier d'avril. Quant au passage d'Abou-Mâchar, il n'est inséré nulle part, du moins à ma connaissance; aussi je m'empresse de le donner, parce qu'il est le plus ancien écrit sur le sujet qui nous occupe, et pour pouvoir le comparer aux autres, qui n'en sont, à la vérité, que des reproductions.

Je n'ai pas copié ce passage du *Kitab-el-Oulouf* même, mais je le donne d'après l'ouvrage intitulé : *Kitab Montaha-el-Idrak*. L'auteur dit l'avoir copié du *Kitab-el-Oulouf*, par Abou-Mâchar. Ce manuscrit porte le n° 1115, ancien fonds de la Bibliothèque impériale de Paris. (Le passage est dans le VIII$^{me}$ chapitre, dans lequel on parle de l'ère de l'hégire.)

En voici la traduction :

« Les Arabes païens se servaient de l'année lunaire; ils comptaient leurs » mois d'après l'apparition du croissant, comme le font les Musulmans. Leur » pèlerinage était fixé dans le dixième jour du mois de *dhoul-hedja :* cette » époque ne tombait pas toujours dans la même saison. Quelquefois c'était » en été, d'autres fois en hiver et dans les deux autres saisons. La raison » en est la différence qui existe entre l'année solaire et l'année lunaire. Vou- » lant que l'époque du pèlerinage tombât au moment où ils faisaient leur » commerce, que l'air fut tempéré, choisissant l'époque même où poussent » les feuilles des arbres et où le fourrage est abondant pour se faciliter le » voyage à la Mekke, et afin qu'ils y fissent leur commerce, tout en s'ac- » quittant de leur acte de dévotion, les Arabes apprirent l'embolisme des » Juifs, et ils le nommèrent *alnaci* ou *le retard*. Cependant ils ne suivaient » pas exactement la computation des Juifs : ceux-ci intercalaient sept mois » lunaires dans dix-neuf années lunaires pour avoir dix-neuf années solaires, » tandis que les Arabes intercalaient douze mois lunaires dans vingt-quatre » années lunaires. Ils avaient choisi pour cette opération un homme des en- » fants de Kinânah; on l'appelait *alkalammas :* ses enfants, investis de ce » privilége, se nommaient *kalâmesah ;* ils étaient également appelés *nasaa*. » *Kalammas* veut dire *grosse mer*. Le dernier de ses enfants qui avait exercé » cette fonction est Abou-Temâmah Djenâdah, fils de Auf, fils de Omaiah, » fils de Kala, fils de Abbâd, fils de Kala, fils de Hodhaïfah. Le *kalammas* » haranguait le peuple rassemblé à Arafat, après la cérémonie du pèlerinage. » Il commence quand le pèlerinage tombe dans le mois de *dhoul-hedja*,

» et il ajourne *moharram,* sans le compter parmi les douze mois de l'année;
» de sorte que *safar* devient le premier mois de l'année et *moharram* le
» dernier; celui-ci prend alors la place de *dhoul-hedja,* et l'on y célèbre le
» pèlerinage deux années consécutives. La troisième année, après le pèle-
» rinage, le *kalammas* harangue le peuple, et il ajourne *safar,* dont il
» avait fait le premier mois des deux années précédentes. Le mois de *rabi I*
» devient ainsi le premier mois de la troisième et de la quatrième année;
» de sorte que le pèlerinage tombe, pour ces deux années, dans le mois de
» *safar,* qui devient le dernier de leurs mois. Le *kalammas* continue cette
» œuvre tous les deux ans, jusqu'à ce que *dhoul-hedja* tombe, dans les vingt-
» troisième et vingt-quatrième années, le premier mois de l'année, et qu'il
» porte le nom de *moharram.* Le pèlerinage tombe, dans ces deux années,
» au mois de *dhoul-câda,* qui en est le dernier. Ensuite, dans la vingt-cin-
» quième année, *moharram* redevient le premier mois, le pèlerinage retombe
» dans *dhoul-hedja,* et le tour recommence de la même manière. Les Arabes
» comptaient tous les deux ans, vingt-cinq mois.

» L'année de l'hégire se trouvait la seizième année de la dernière pé-
» riode. Cette année-là commençait par *châban* et finissait par *radjab;* et
» c'est pendant ce dernier mois que le pèlerinage eut lieu; car les Arabes
» observaient cela. La vingt-troisième année de cette période commença
» par *dhoul-hedja;* elle était l'an 8 de l'hégire, et ce fut cette année que la
» Mekke fut prise par les Musulmans, le 13 ou le 17 du mois de *ramadhan.*
» Le prophète n'a pas fait le pèlerinage cette année, parce qu'il tomba dans
» *dhoul-câda;* mais dans la vingt-cinquième année, dixième de l'hégire,
» *moharram* redevenant le premier mois, le législateur a accompli son pèle-
» rinage le 10 du mois de *dhoul-hedja,* suivant l'ordre des noms des mois.
» Ce pèlerinage fut nommé *le pèlerinage d'adieu.* Le prophète harangua le
» peuple et lui ordonna ce que Dieu voulut. Il dit dans cette harangue : Le
» temps est redevenu tel qu'il était lors de la création des cieux et de la terre,
» voulant dire par là que les noms des mois sont redevenus tels qu'ils étaient
» au commencement du temps. Il leur défendit de se servir du *naci* dans leur
» année. Par là leurs années et leurs mois sont devenus, jusqu'à nos jours,
» mobiles dans les quatre saisons, savoir : le printemps, l'été, l'automne et

» l'hiver. Voilà ce que nous avons copié de *Kitab-el-Oulouf*, d'après le récit » d'Abou-Mâchar. »

» Abou-Mâchar ajoute encore dans le même ouvrage que, selon quelques » narrateurs, les Arabes païens intercalaient 9 mois lunaires dans 24 années » lunaires; ils portaient leur vue sur la différence de 10 jours, 21 heures et » une cinquième partie environ de 1 heure, qui existe entre leur année et » l'année solaire, pour ajouter à leur année un mois entier, chaque fois qu'il » s'accumulait de cette différence de quoi faire un mois; cependant ils » opéraient, d'après la considération que cette différence n'était que de 10 » jours et 20 heures : leurs mois étaient conséquemment immobiles dans les » saisons, indiquant toujours les mêmes époques dans l'année, jusqu'à ce que » le prophète fit son pèlerinage d'adieu. Alors, les significations de leurs noms » devinrent inapplicables; car ces noms dérivaient (dans l'origine) des cir- » constances relatives aux époques de ces mois qui, devenant mobiles, ne » pouvaient plus s'accorder avec les mêmes circonstances. Le premier mois » est *moharram*, qui veut dire *sacré ;* il fut ainsi nommé, parce qu'il est un » des quatre mois sacrés chez les Arabes. Ces quatre mois, dont un est isolé » et les trois autres consécutifs, sont *dhoul-câda, dhoul-hedja, moharram* et » *radjab*. La guerre était interdite pendant ces quatre mois; il n'était permis » à personne de lever les armes contre quelqu'un, fût-il même l'assassin de » ses parents. *Safar* (qui veut dire *jaune*, selon cet auteur) fut ainsi nommé, » parce qu'une maladie qui jaunissait le teint venait frapper les Arabes à » cette époque de l'année. *Rabi I* et *rabi II* (qui veut dire *printemps*) furent » ainsi nommés, parce qu'ils arrivaient en automne et que les Arabes appe- » laient l'automne printemps. Quant aux *djoumada I* et *djoumada II* (gelée), » ils furent ainsi nommés, parce qu'ils venaient en hiver, quand l'eau gèle. » *Radjab* (abstinence, selon cet auteur [1]) fut ainsi nommé, parce que les » Arabes disaient en ce mois : *erdjebou*, c'est-à-dire abstenez-vous de faire » la guerre. *Châban* (dispersion) fut ainsi nommé, parce que les tribus se » dispersaient dans ce mois pour aller chercher les eaux et pour faire des » incursions. *Ramadhan* (grande chaleur) fut ainsi nommé, parce qu'il tom-

[1] Le sens qu'on trouve dans les dictionnaires est *crainte*, avec l'idée de respect et de vénération.

» bait quand la chaleur commençait et que la terre se réchauffait. *Chawâl*
» (départ ou accouplement), fut ainsi nommé, parce que les Arabes disaient
» *choulou*, voulant dire *partez;* ou parce que c'était l'époque de l'accou-
» plement des chameaux ; c'est là la cause pour laquelle les Arabes n'auto-
» risaient pas le mariage à cette époque. Quant à *dhoul-câda* (repos), il a été
» ainsi nommé parce que les Arabes, dans ce mois, se reposaient des fatigues
» de la guerre; *dhoul-hedja* (pèlerinage), parce qu'il était le mois du pèle-
» rinage.

» Les mois étaient ainsi partagés suivant les quatre saisons; leurs noms
» dérivaient des circonstances propres à chacun d'eux. Les Arabes commen-
» çaient par l'automne ; ils l'appelaient *printemps*. Venaient ensuite l'hiver et
» le printemps; le printemps était appelé *été ;* quelques-uns l'appelaient *second*
» *printemps*. L'été était appelé *kaïdh* (été rigoureux).

» Quand le *naci* fut aboli, les mois ne pouvaient plus tomber aux mêmes
» époques dans les saisons; leurs noms restèrent seuls en usage dans l'isla-
» misme. »

Avant d'examiner ce long passage d'Abou-Mâchar, et pour pouvoir en tirer parti, j'ai cru devoir donner ce que Albirouny dit sur ce sujet. Cet auteur est également très-ancien; il mourut, d'après la biographie de Hadj-Khalifah, en l'an 330 de l'hégire. Il paraît avoir fait beaucoup de recherches : tout en reproduisant les idées d'Abou-mâchar, il donne les traditions anciennes sur lesquelles le système intercalaire paraît avoir été basé. Albirouny parle de ce sujet dans deux endroits de son ouvrage intitulé : *Kitab-el-Athar*. Dans le premier il dit :

« Les Arabes païens réglaient leurs années comme les Juifs; ils portaient
» leur vue sur la différence de 10 jours, 21 heures et $\frac{1}{5}$ d'heure, existant
» entre leur année et l'année solaire; ils ajoutaient à leur année un mois,
» chaque fois qu'il s'accumulait de cette différence de quoi faire un mois
» complet; cependant ils faisaient leur calcul comme si la différence de deux
» années n'était que de 10 jours et 20 heures seulement. Ceux qui étaient
» chargés de cette opération étaient les *naçaa,* choisis parmi les enfants de
» Kinânah; ils s'appelaient *kalames,* dont l'un est *kalammas*, ou *grosse mer;*
» ils sont : Aboutemâmah, Djenâdah, fils de Auf, fils d'Omeïah, fils de Kala,

» fils de Abbâd, fils de Kala, fils de Hodheïfah; ils étaient tous des *naçaa*.

» Le premier qui ait exercé cette fonction, était Hodheïfah, qui est Ebn-
» Abd-Fokaïm, fils d'Adi, fils de Amer, fils de Thalabah, fils de Malik, fils
» de Kinânah. Le dernier fut Abou-Temâmah. Un de leurs poëtes dit :
» Fokaïm était appelé *kalammas ;* il réglait les affaires religieuses; il était chef
» obéi. Un autre poëte dit: C'est lui, parmi les enfants de Kinânah, qui réglait
» les mois; il était respecté et honoré dans sa dignité; il a passé ainsi tout son
» temps. Un autre dit: Quand la différence entre l'année solaire et l'année
» lunaire s'accumulait, il l'additionnait pour en faire un mois complet.

» Il avait appris cela des Juifs, deux siècles environ avant l'islamisme.
» Cependant les Arabes intercalaient 9 mois dans chaque période de 24 ans.
» Leurs mois étaient immobiles dans les saisons; ils ne retardaient ni n'avan-
» çaient sur leurs époques, jusqu'à ce que le prophète fit son pèlerinage
» d'adieu, et qu'il reçût du ciel le verset suivant : Le *naci* est un surcroît
» d'infidélité, etc. Alors il harangua le peuple et dit : Le temps est redevenu
» tel qu'il était lorsque Dieu créa les cieux et la terre. Il leur lut le verset
» précédent pour abolir le *naci,* qui est l'embolisme. Ils l'ont abandonné
» ainsi, et leurs mois cessèrent de correspondre aux mêmes époques : leur
» signification devint fautive. »

Le second passage d'Albirouny est le suivant:

« Anciennement, les Arabes païens se servaient de leurs mois de la même
» manière que les Musulmans. Leur pèlerinage était mobile; il se transpor-
» tait d'une saison à une autre. Voulant faire leur pèlerinage à l'époque de la
» maturité de leurs denrées et de leurs produits, tels que les cuirs, les peaux,
» les fruits...., etc.; voulant qu'il restât invariable dans la meilleure et la plus
» abondante saison, les Arabes empruntèrent l'intercalation, deux siècles
» environ avant l'hégire, des Juifs qui les avoisinaient. Ils se servirent de
» l'embolisme de la même manière que les Juifs, c'est-à-dire qu'ils interca-
» laient un mois chaque fois qu'il y avait de quoi ajouter un mois par suite
» de l'accumulation de la différence existant entre leur année et l'année
» solaire [1]. Les *kalames,* parmi les enfants de Kinânah, avaient seuls le pri-

[1] Je crois que c'est ce passage qui a suggéré à Hadj-khalifa l'idée que les Arabes païens intercalaient, comme les Juifs, 7 mois dans 19 ans.

» vilége de régler et d'exercer cet ordre; ils haranguaient le peuple, après
» la cérémonie du pèlerinage, et ils intercalaient le mois en donnant son
» nom au mois suivant. Les Arabes l'admettaient alors. Cette opération a été
» appelée le *naci* (l'intercalation); car ils intercalaient un mois au com-
» mencement de l'année, tous les deux ou trois ans, selon ce qu'exigeait
» l'avance. Un ancien poëte dit : Nous avons un *naci* sous l'ordre duquel nous
» marchons; il déclare profanes les mois sacrés, et il sanctifie les profanes,
» quand il le veut.

» Le premier *naci* était pour *moharram; safar* fut alors appelé *mohar-*
» *ram; rabi I, safar*, et ainsi de suite pour tous les mois.

» Le second *naci* était pour *safar;* de sorte que le mois suivant, *rabi I,*
» fut appelé *safar,* et ainsi de suite. Le mois du *naci* se transportait donc de
» mois en mois dans les douze mois de l'année, jusqu'à ce qu'il revînt au
» mois de *moharram* (après douze intercalations); alors ils recommençaient
» la même opération. Les Arabes comptaient les périodes du *naci,* et ils
» s'en servaient dans leur chronologie; ils disaient, par exemple : Les an-
» nées firent une période, ou une révolution, de telle époque à telle époque.

» Si les Arabes s'apercevaient que, malgré l'embolisme pratiqué, ils allaient
» se trouver en avance d'un mois sur une saison quelconque par suite de
» l'accumulation des fractions [1] de l'année solaire et du restant [2] de la diffé-
» rence entre cette année et l'année lunaire à laquelle cette différence était
» ajoutée, ils faisaient une seconde intercalation; le lever ou le coucher des
» étoiles qui occupent les mansions de la lune leur permettaient de connaître
» cet écart. Les Arabes continuèrent ce mode d'embolisme; le tour du mois
» intercalaire tomba, l'année de l'hégire, sur *châban.* Ce mois fut nommé
» alors *moharram; ramadhan* fut appelé *safar.* Le prophète dut donc atten-
» dre la fin de la période pour accomplir le pèlerinage d'adieu dans lequel
» il harangua le peuple, et dit : Le temps est redevenu tel qu'il était lorsque

[1] La fraction dont il s'agit ici ne peut être que celle qui reste d'une intercalation régulière d'un mois toutes les trois années. Ce passage paraît, au reste, comme l'a déjà fait remarquer M. Caussin de Perceval, en contradiction avec le reste.

[2] Ce restant est sans doute la petite fraction d'une heure et un cinquième qu'on avait négligée.

» Dieu créa les cieux et la terre, voulant dire par là que les mois reprirent
» chacun leur place primitive, et qu'ils ne sont plus affectés des altérations
» que les Arabes leur faisaient subir. »

La seule comparaison des passages de Makrisi et de Mohammad-Charcaci, dont nous avons déjà parlé, avec ceux d'Abou-Mâchar et d'Albirouny que nous venons de donner, montre clairement que ces auteurs se sont copiés les uns les autres. De plus, en jetant les yeux sur le passage suivant de Masoudi, on verra facilement qu'Aboul-Féda a copié cet auteur :

« Les Arabes païens intercalaient un mois toutes les trois années; ils appe-
» laient ce mois-là le *naci*, ou retard. Dieu blâme cette action lorsqu'il dit :
» Le *naci* est un surcroit d'infidélité [1]. »

Masoudi me parait avoir puisé cette idée dans la phrase suivante du passage d'Albirouny que nous venons de rapporter :

« Si les Arabes s'apercevaient que, malgré l'embolisme pratiqué, ils allaient
» se trouver en avance d'un mois sur une saison quelconque, par suite de
» l'accumulation des fractions de l'année solaire et du restant de la différence
» entre cette année et l'année lunaire à laquelle cette différence était ajoutée,
» ils faisaient une seconde intercalation. » Car ce passage ne peut se rapporter qu'à une intercalation régulière d'un mois tous les trois années.

On voit par là que tous les historiens ont puisé leurs idées sur l'embolisme, et leur mode d'intercalation dans Albirouny ou dans Abou-Mâchar. L'autorité de l'usage d'une année luni-solaire parmi les Arabes païens se trouve donc réduite à celle d'Abou-Mâchar et d'Albirouny. Or, en lisant avec un peu d'attention les passages de ces deux écrivains, l'on voit que ni l'un ni l'autre n'étaient sûrs de ce qu'ils avançaient; les paragraphes qui touchent de près au sujet principal sont empreints du cachet de l'incertitude : Abou-Mâchar prétend d'abord, sans dire sur quoi cette prétention est basée, que les Arabes païens intercalaient un mois tous les deux ans, et plus loin, il dit : « Selon
» quelques narrateurs, les Arabes païens intercalaient 9 mois dans chaque
» période de 24 années..., etc. » Albirouny, à son tour, admet d'abord une intercalation de 9 mois en 24 ans. Plus loin, il donne deux paragraphes

[1] Voir *Mouroudj-el-Dhahab*, n° 715, fol. 154, supplément arabe.

(que j'ai annotés), dont le premier exige une intercalation identique à celle des Juifs, savoir, 7 mois dans chaque période de 19 ans; le second, l'admission d'une intercalation régulière d'un mois dans chaque période de 3 ans.

L'embarras de ces deux écrivains, pour le choix du mode d'intercalation, doit affaiblir, pour ne pas dire annuler leur autorité, quant à l'attribution aux Arabes païens de l'usage d'une année embolismique.

Quoi qu'il en soit, voyons quelles sont les traditions sur lesquelles ces deux anciens écrivains basèrent ce système de calendrier embolismique. Ces traditions se trouvent renfermées dans le premier passage d'Albirouny. Elles sont au nombre de trois, savoir :

1° « Quand la différence entre l'année solaire et l'année lunaire s'accu-
» mulait, il l'additionnait pour en faire un mois complet.

2° » Le temps est redevenu tel qu'il était le jour où Dieu créa les cieux
» et la terre.

3° » Le *naci* est un surcroît d'infidélité..... »

On a, à l'appui de ces trois traditions, les rapports existant entre les noms des mois et les saisons.

Or, par ces rapports, les Arabes pourraient bien n'avoir eu en vue que l'année de la dénomination, sans regarder plus loin, comme cela eut lieu à l'égard des mois anciens.

Le troisième point : « Le *naci* est un surcroît d'infidélité, » n'est pas non plus une preuve de l'emploi d'une année embolismique parmi les Arabes païens; car le mot *naci* signifie la remise de l'observance d'un mois sacré à un mois profane, de l'aveu de tous les commentateurs du Coran et des lexicographes, lesquels sont les plus compétents [1].

Pour le second point : « Le temps est redevenu tel qu'il était le jour où
» Dieu créa les cieux et la terre, » il faut chercher s'il n'y avait pas, à l'époque du pèlerinage d'adieu, une certaine circonstance chronologique qui puisse nous être utile pour bien saisir le sens que le prophète a voulu attacher au passage susdit.

[1] Le mot *naci*, d'après les démonstrations que j'ai données de l'usage du calendrier purement lunaire chez les Arabes païens, ne peut, en effet, signifier autre chose que la remise de l'observance d'un mois sacré à un autre.

Le calcul nous fait connaître la particularité suivante, qui a une intime liaison avec la tradition dont il s'agit. Le dernier mois de l'an 10 de l'hégire, le mois de *dhoul-hedja,* coïncida, à cette époque, avec le dernier mois de l'année religieuse chez les Juifs, de sorte que le mois de *moharram,* qui allait ouvrir l'an 11 de l'hégire, a été le même que le mois de *nisan,* par lequel a dû commencer l'année religieuse juive.

Les pères des Israélites et des Arabes, Isaak et Ismaïl, fils du patriarche Abraham, se servaient, ainsi que leur père, selon toute probabilité, de l'année lunaire vague. Le cours des mois de cette année fut interrompu par l'intercalation introduite par le peuple de Dieu; mais il n'a cessé d'être religieusement suivi par les descendants d'Abraham issus d'Ismaïl. Le nombre total des mois intercalés depuis le commencement des choses, aurait fait, à l'époque du pèlerinage d'adieu, un nombre entier de périodes de douze mois chacune, de sorte que le commencement de l'an 11 de l'hégire coïncidait avec celui de l'an juif, comme le démontre le calcul; l'année d'Isaak, Ismaïl et Abraham redevenait donc, à l'époque du pèlerinage d'adieu, telle qu'elle était primitivement, et comme si elle n'avait jamais été interrompue par aucune espèce d'intercalation apportée par les enfants d'Isaak. Cela étant, si l'on réfléchit attentivement, on verra que tel est le sens voulu par les mots : « Le » temps est redevenu tel qu'il était, etc..... »

Enfin, le premier point : « Quand la différence entre l'année solaire et » l'année lunaire s'accumulait, il l'additionnait pour en faire un mois com- » plet, » ne peut pas indiquer non plus, d'une manière positive, l'usage de l'embolisme parmi les Arabes païens; car, outre l'obscurité de l'origine de cette tradition, le nom de celui dont on parlait (Fokaïm) n'y étant pas mentionné, elle pourrait bien se rapporter à un Juif arabe, qui calculait et réglait pour les Juifs leur année luni-solaire.

On voit par ce rapide examen que nos premiers écrivains n'ont émis que des conjectures sur l'usage de l'année luni-solaire parmi les Arabes païens, et qu'il est excessivement difficile de donner son dernier mot, en se basant exclusivement sur les témoignages des historiens. Aussi ne suis-je arrivé, dans ce mémoire, à une solution définitive, qu'en me guidant par plusieurs phénomènes célestes et en me basant sur des calculs astronomiques.

Disons deux mots, en terminant, sur la semaine chez les Arabes.

Les Arabes païens se servaient anciennement des noms suivants pour indiquer les sept jours de la semaine, savoir :

| | |
|---|---|
| *Awal.* . . . . . . . . . . . . . . | Dimanche. |
| *Ahwan* . . . . . . . . . . . . . . | Lundi. |
| *Djabar* . . . . . . . . . . . . . . | Mardi. |
| *Dabar* . . . . . . . . . . . . . . | Mercredi. |
| *Mounis* . . . . . . . . . . . . . . | Jeudi. |
| *Aroubah.* . . . . . . . . . . . . . | Vendredi. |
| *Chabar* . . . . . . . . . . . . . . | Samedi. |

Masoudi et Albirouny donnent, à l'appui de cela, la tradition suivante :

« J'espère vivre; cependant, mon dernier jour sera, ou *awal,* ou *ahwan,* » ou *djabar;* enfin, si je ne meurs pas dans le fatal *dabar,* ce sera dans » *mounis, aroubah* ou *chabar.* »

Pour la division du jour en vingt-quatre heures, je remarque, avec M. Caussin de Perceval, que les Arabes du paganisme l'ignoraient complétement.

FIN.

# INSCRIPTIONS GRECQUES

RECUEILLIES

# EN ASIE MINEURE

PAR

M. A. WAGENER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND.

---

(Présenté le 4 mai 1859.)

# INSCRIPTIONS

## RECUEILLIES EN ASIE MINEURE PAR M. WAGENER.

RAPPORTS PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE SUR CE MÉMOIRE.

### *Rapport de M. Roulez.*

« La classe a reçu, en 1855, de M. Wagener, et a fait insérer dans ses *Mémoires,* une notice sur un monument métrologique découvert à Ushak. L'honorable professeur de Gand lui adresse maintenant une première série d'inscriptions grecques inédites qu'il a rapportées également de son voyage dans l'Asie Mineure. Ces inscriptions, au nombre de quinze, proviennent de Koula, de Goerdis et d'Akhissar. Sans offrir toutes un égal intérêt, elles méritent d'être publiées; trois d'entre elles ont même une véritable importance. La géographie comparée de l'Asie Mineure présente encore beaucoup d'obscurité, à cause de l'état incomplet des renseignements que contiennent les ouvrages historiques et géographiques parvenus jusqu'à nous. Ce sont les médailles et les inscriptions qui nous viennent en aide pour combler ces lacunes; elles ont déjà révélé l'existence de plusieurs villes que ne mentionnent pas les auteurs et les itinéraires anciens. Les inscriptions sont surtout précieuses pour fixer la position géographique des lieux. La première des inscriptions de M. Wagener nous fait connaître une cité ancienne du nom de Coloé, et, par la raison qu'elle est une dédicace, elle nous apprend que Coloé occupait l'emplacement de la ville moderne de Koula. La huitième et la neuvième, recueillies toutes deux à Goerdis, changent en fait certain l'hypothèse des savants, qui placent dans cet endroit la *Julia Gordos* des médailles.

Voici en quelques mots le plan du travail de M. Wagener. Huit planches, placées à la fin, reproduisent en fac-simile la copie des inscriptions. Dans le corps du mémoire, l'auteur en donne la transcription en caractères courants, en y joignant les restitutions qu'il propose. Puis il fait suivre chaque inscription d'une traduction française et d'un commentaire. Ses explications sont des plus complètes : aucun point n'est resté sans éclaircissement, aucune difficulté n'a été éludée. M. Wagener a fait preuve dans cet ouvrage de beaucoup de sagacité, d'un excellent esprit critique et d'une connaissance approfondie de la langue et de l'antiquité. Par la multiplicité et la variété des observations dont il se

compose, un commentaire épigraphique échappe à l'analyse. Je me bornerai donc à indiquer la nature et les faits saillants de chaque inscription; je me permettrai aussi de glisser ici et là une remarque ou d'exposer les motifs de mon dissentiment avec l'auteur sur quelques points à l'égard desquels il ne me semble pas avoir rencontré aussi juste que sur le reste.

Le n° 1 est une inscription commémorative de la consécration, par la cité de Coloé, d'une statue à Jupiter Sabazius. La stèle de marbre qui la porte est ornée à sa partie supérieure de figures en bas-relief distribuées sur deux plans. M. Wagener, n'ayant pu se procurer un dessin de cette représentation figurée, a dû se borner à la décrire. La description qu'il donne, d'après son journal de voyage, peut, combinée avec son explication, improvisée sans doute sur les lieux, lui paraître suffisamment détaillée. Pour moi, certains détails me manquent pour me former une idée nette et précise, et pour me rendre complétement compte de cette représentation curieuse et intéressante.

Au centre de la composition du premier plan s'élève, sur un piédestal, la statue d'un dieu que le docte voyageur a pris, certainement bien à tort, pour un sacrificateur monté sur un autel. A droite se voient trois personnages dans l'attitude de suppliants. A gauche, sur un char attelé de deux chevaux, est assis Jupiter Sabazius, caractérisé par l'aigle posé sur l'un des chevaux et par le serpent qui se roule à leurs pieds; le dieu Mên ou Lunus, reconnaissable au bonnet asiatique dont il est coiffé et au croissant placé près de lui, se tient à côté des chevaux qu'il conduit de la main gauche. Dans la main droite il porte le caducée. M. Wagener a savamment établi les rapports de Lunus, personnification mâle de la lune, avec Sabazius, dieu du soleil. Ce dernier, s'identifiant ici avec Jupiter, il n'est pas surprenant de voir le caducée de Mercure attribué à son acolyte.

Le milieu de la composition du plan inférieur est occupé par un autel chargé de gâteaux derrière lequel s'élève un arbre, probablement un cyprès. Des deux côtés se tiennent debout treize personnages, sept à gauche, six à droite. Le savant voyageur les regarde comme des prêtres de Jupiter Sabazius, et attribue le même caractère aux trois suppliants du plan supérieur. Quoique ce nombre de seize prêtres me paraisse un peu considérable, je ne contredirai pas son interprétation, parce que j'ignore si, en l'absence de tout autre indice, il n'y a pas dans la taille, l'attitude, le vêtement de ces figures des différences qui devraient faire distinguer diverses catégories de personnes. D'après l'opinion de M. Wagener, l'ensemble du bas-relief représenterait l'installation de Jupiter Sabazius à Coloé; on le verrait conduit dans son temple par Lunus. Ce dernier point me semble au moins douteux. La présence d'un char ne fait pas nécessairement allusion à l'arrivée du dieu dans l'endroit; elle pourrait servir seulement à caractériser la divinité solaire. Aux termes de l'inscription, la cité de Coloé a consacré une statue à Jupiter Sabazius (*καθιέρωσαν Δία Σαβάζιον*) [1]. Je suis disposé à croire qu'elle se trouve figurée sur le bas-relief; et comme elle n'a, paraît-il, aucun attribut, on aura placé à côté, pour la

[1] *Καθιέρωσαν* me parait avoir ici la même signification que *ἀνέστησαν*, plus généralement usité. Quelquefois on rencontre les deux verbes réunis, *Corp. Inscr. Gr.*, 2697. 2761 : *καθιέρωσε καὶ ἀνέστησεν*.

déterminer, la représentation bien caractérisée du dieu sur son char. L'autel qui se voit en avant de la statue, quoique sur un plan différent, doit probablement être mis en rapport avec elle. Cet essai d'explication peut se concilier, du reste, avec l'idée que le monument rappellerait la mémoire de l'établissement à Coloé du culte de Jupiter Sabazius.

Le rapprochement du bas-relief de Koula d'une médaille de la ville de Mostène, en Lydie, a permis à M. Wagener de rectifier l'interprétation donnée jusqu'ici à ce monument numismatique. Coloé, comme il a été observé ci-dessus, était une cité inconnue avant la découverte de notre inscription; l'auteur du mémoire n'a pas seulement établi qu'il fallait la placer à Koula, mais il a avancé sur son origine une hypothèse savante et ingénieuse. Aux observations faites sur les noms des prêtres du dieu de la lumière mentionnés dans l'inscription, on me pardonnera d'ajouter cette remarque : ces noms, au nombre de six, nous offrent trois Apollonius et un Artémidore, et le septième, dont il ne reste plus que la lettre initiale A, était probablement encore l'un de ces deux noms. Cette circonstance prouve non-seulement qu'ils étaient communs dans la localité, mais encore qu'on choisissait de préférence, pour le service du culte du dieu, ceux qui les portaient.

Le n° 2 est une inscription à la fois honorifique et sépulcrale, où il y a principalement à remarquer le verbe *καθιερῶσαι*, employé dans le sens de *ἀφηρωΐζειν*, et *ἥρωα τιμᾷν*, qui se rencontrent dans d'autres inscriptions.

Le n° 3 se compose seulement de ces deux lignes : Αὐ[ρ]ήλιος Ἀρτεμίδωρος | ὁ ἀρχίατρος καὶ ἱεροφάντης εἱδρύσατο. M. Wagener traduit le dernier mot par *s'est érigé* (ce monument funéraire). L'emploi de la forme moyenne avec sa valeur propre dans les formules funéraires n'aurait rien que de très-régulier, mais je ne me souviens pas de l'avoir jamais rencontré. Les Grecs se servaient de préférence de la forme active avec *ἑαυτῷ*. Quant au mot *ἱδρύειν* lui-même, en sous-entendant un mot comme *τὸ μνῆμα*, il n'est pas sans exemple dans les inscriptions sépulcrales[1]. Mais, lorsque je considère la qualité d'hiérophante attribuée à Artémidore, je suis porté à croire que l'inscription ci-dessus est une dédicace plutôt qu'une épitaphe. Elle était placée sans doute près de l'objet consacré, et c'est la raison pour laquelle cet objet n'est pas nommé. On connaît, pour m'en tenir à cette seule citation, l'inscription Πολυκρατες ανεθεκε, gravée sur la base de la célèbre figurine de bronze du cabinet Pourtalès. Ἱδρύσατο est d'ailleurs le mot usité pour la consécration d'autels et d'autres objets relatifs au culte.

Les inscriptions funéraires des n°s 4 et 5 n'ont pu donner lieu qu'à des remarques sur l'étymologie et la désinence de quelques noms propres.

Le n° 6 a déjà été publié par M. Lebas; M. Wagener a placé la copie du savant français en regard de la sienne, qui en diffère. La restitution partielle qu'il a tentée à l'aide de ces deux documents pourrait provoquer une ou deux objections; mais je juge inutile de m'arrêter à une inscription à laquelle son état de mutilation enlève toute espèce d'importance.

Dans le numéro suivant, M. Wagener doute s'il ne faudrait pas, au lieu d'Ἀσκληπιόδωρος, lire Ἀσκλεπιοδώρου ou Ἀσκληπιόδωρου. Le mot Γαίος qui précède étant un prénom,

[1] Voyez Welcker, *Sylloge epigrammat. graec.*, p. 32, n° 28.

il n'y a, selon moi, aucune nécessité et, par conséquent, aucune raison de faire un changement quelconque.

Les inscriptions funéraires nos 8 et 9, qui paraissent appartenir à une même famille, ont fourni la matière d'observations intéressantes. Je n'ai qu'une remarque à faire sur les tables généalogiques des défunts dressées par M. Wagener. Le savant professeur pense qu'Apfias, au n° 8, est l'épouse de Thynitès. Si le fait était réel, le nom de celui-ci aurait été placé immédiatement après le nom de sa femme. En effet, il semble de règle dans cette sorte d'inscriptions de ne pas séparer les noms des époux. C'est ainsi que, dans le n° 9, nous voyons Paula suivre Théotime, et dans le n° 13, Hermogène venir après Faustine. Il faut donc supposer que la femme de Thynitès, dont le nom manque sur l'inscription n° 8, était déjà décédée. Si ma supposition est fondée, elle donne un nouveau degré de probabilité à une autre conjecture de M. Wagener, suivant laquelle, le Thynitès du n° 9 serait le même personnage reparaissant là avec la qualité d'époux en secondes noces d'Ammion, fille d'Aristoclès. Dans ce système d'interprétation, Apfias ne doit plus nécessairement être pris pour un nom de femme.

Des trois inscriptions funéraires suivantes, la dernière présente la particularité que le nom de la fille du défunt est placé avant celui de sa femme. Cette interversion de l'ordre suivi généralement a sans doute une raison. Serait-ce que la fille portait le nom de Faustine, qui était celui de la femme de l'empereur régnant, morte, à la vérité, deux ans avant l'érection du monument?

Le n° 13 est une inscription consacrée par le sénat et le peuple de Thyatire à M. Pollianus, archonte éponyme. M. Wagener a établi d'une manière fort plausible que ce personnage est probablement le stratége du même nom mentionné sur plusieurs médailles de cette ville. Afin de rehausser l'honneur qu'ils font à Pollianus, les Thyatiréens rappellent que leur cité a reçu les titres de *très-illustre, très-distinguée, très-grande,* tant dans des rescrits impériaux que dans des décrets votés par la nation la plus illustre de l'Asie (ὑπὸ τοῦ λαμπροτάτου τῆς Ἀσίας ἔθνους). Quelle est cette nation? La question n'est pas peu embarrassante. Le docte professeur, après avoir songé d'abord à Éphèse, s'est décidé ensuite pour le κοινὸν Ἀσίας, c'est-à-dire la commission chargée de l'organisation des fêtes célébrées en commun par les villes grecques de l'Asie. Dans une autre inscription (*Corp. Ins. Gr.* 3487), la même commission est appelée : οἱ ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλληνες. Mais, dans l'un comme dans l'autre cas, le mot ἔθνος a, me paraît-il, quelque chose de choquant; il s'appliquerait certainement mieux à un κοινὸν, tel que celui des treize villes ioniennes (κοινὸν γί πόλεων), dont Milet était la métropole (*Ioniæ caput*).

Le n° 14 contient la dénomination chrétienne Θεὸς ὕψιστος, appliquée, selon toute apparence, aux maître des dieux du paganisme.

La quinzième et dernière inscription se trouve déjà dans le *Corpus inscriptionum Graecarum,* mais elle est donnée d'après une copie offrant des différences si grandes avec celle de M. Wagener, qu'il faut savoir gré à celui-ci de la publier de nouveau. Le commencement en est très-mutilé, et malgré quelques restitutions spécieuses, il n'est possible d'en tirer un sens qu'à partir de la dixième ligne. Il s'agit, dans cette inscription

d'un projet de décret en vertu duquel un monument honorifique serait élevé à un certain Claudius Amphimachus pour ce motif, entre autres, qu'il s'était joint volontairement aux députés envoyés à l'empereur par la province d'Asie dans un moment de détresse. L'objet de la députation était, suivant la leçon de M. Böckh, de se plaindre de cet état de misère; d'après la leçon de M. Wagener, de réclamer contre l'impôt du vingtième. On connaît pour le temps de l'empire deux impôts de ce nom, la *vicesima hereditatium* et la *vicesima manumissionum*. Mais, outre que ce dernier était un impôt de luxe, comme le fait observer très-bien l'auteur, il était le plus souvent supporté par les esclaves affranchis eux-mêmes. D'une autre part, l'inscription, chose assez étrange, ne contenant point de spécification, il devrait y être question de l'impôt du vingtième le plus renommé, qui était sans contredit la *vicesima hereditatium*. Mais il se présente à son égard une difficulté presque insoluble. Si, à une époque calamiteuse, les habitants de la province d'Asie avaient voulu solliciter de l'empereur l'exemption ou une diminution d'un des impôts qui pesaient sur eux, le bon sens dit qu'ils n'auraient pas fait choix de la *vicesima hereditatium*, payée par une catégorie seulement de contribuables et précisément au moment où ils s'enrichissaient. Une réclamation contre un pareil impôt ne paraît vraisemblable qu'à l'époque de son établissement pour la localité, c'est-à-dire quand Caracalla y soumit tous les habitants de l'empire en leur accordant le droit de cité romaine: or l'impôt, ayant été doublé alors, s'appela *decima* et non plus *vicesima hereditatium*.

Une autre explication proposée par M. Wagener consiste à rapporter ce vingtième aux *portoria*. Cette contribution, il est bien vrai, était du quarantième (*quadragesima*), mais il suppose qu'elle était, par exception, du vingtième en Asie sous l'empire, de même qu'en Sicile sous la république, et, comme des témoignages positifs[1] attestent le contraire, il tourne cet obstacle par une seconde supposition, en n'attribuant à ce vingtième qu'une existence temporaire : c'est là, à mon avis, s'aventurer trop loin dans le champ des conjectures.

La quatrième hypothèse mise en avant par M. Wagener me paraît la moins probable de toutes. En rapportant à τῆς εἰκοστῆς les mots καθ' ἑκούσιον αἵρεσιν, il trouve dans l'inscription la mention d'une *contribution volontaire* votée, suppose-t-il, par les membres du κοινὸν pour l'érection d'un temple ou de quelque autre construction importante. Mais si la contribution était volontaire, comment expliquer un recours à l'empereur? Ensuite l'inscription aurait dû de toute nécessité mentionner l'objet sur lequel elle serait prélevée.

Pour conclusion, je dirai que le mémoire de M. Wagener me paraît digne à tous égards des suffrages de la classe, et j'ai l'honneur de proposer à la compagnie d'en voter l'impression dans le recueil des *Mémoires des savants étrangers*. »

[1] Sueton., *Vespas.*, 1; inscript., chez Spon., *Misc. antiq.*, p. 148.

## *Rapport de M. le baron de Witte.*

—

« C'est avec un vif intérêt que j'ai lu le travail de M. Wagener sur quelques inscriptions grecques recueillies en Asie. Mon savant confrère et ami, M. Roulez, a fait valoir l'importance au point de vue géographique et archéologique de plusieurs de ces inscriptions. Je n'ajouterai que quelques réflexions sommaires au rapport qui a été présenté à l'Académie.

Les quinze inscriptions communiquées à la classe des lettres par le savant professeur de Gand appartiennent à trois localités de l'Asie Mineure : sept de ces inscriptions sont de Koula, nom moderne d'une bourgade qui, dans l'antiquité, portait le nom de Coloé. L'auteur, par des raisonnements solides, a non-seulement déterminé d'une manière exacte le nom ancien, mais encore il a cherché à remonter à l'origine de ce nom; son hypothèse est des plus ingénieuses et mérite l'attention des savants.

Cinq autres inscriptions ont été recueillies à Goerdis, l'antique *Julia Gordos*, dont on possède des médailles.

Les trois derniers monuments épigraphiques sont d'Akhissar, Thyatire, ville célèbre de Lydie.

Dans la plupart des inscriptions recueillies par M. Wagener, on trouve des noms de mois, *Daesius*, *Audnaeus*, *Hyperbertaeus*, *Gorpiaeus*, *Panemus*, *Oloüs* : ce sont tous des noms de mois macédoniens.

A l'occasion du n° 1, M. Wagener a écrit un savant commentaire sur le bas-relief qui décore ce marbre. L'auteur a cherché à réunir quelques découvertes sur le culte du dieu Lunus; mais ces recherches me semblent incomplètes, malgré le soin avec lequel elles ont été faites et malgré les efforts d'érudition de l'ingénieux professeur. Les rapports de Sabazius, dieu solaire, avec Lunus sont très-bien établis, comme l'a d'ailleurs fait remarquer M. Roulez.

Dans la seconde inscription, le mot Διακτησιον, que M Wagener prend pour un nom de femme au neutre, me semble désigner *Jupiter Ctésius*, dont le culte est connu. *Athén*. XI, p. 473; Paus., I, 31, 2.

La troisième inscription a fourni au savant voyageur l'occasion de faire quelques observations curieuses sur les médecins.

En parlant de la quatrième inscription, l'auteur cite des exemples de noms de femmes, ayant une terminaison en ας au nominatif : Ἀμμίας, Τατίας, Ἀπφίας. On peut ajouter Ἀφύας, qui est le nom de la femme de Cécrops sur la célèbre amphore de l'enlèvement d'Orithyie, à la Pinacothèque de Munich. Voir mon *Catalogue de Canino*, n° 105; *Mon. inéd. de l'Inst. arch.*, *sect. française*, pl. XXII et XXIII; Welcker, *Nouv. Annales de l'Inst. arch.*, tom. II, pp. 358 et suiv., et *Alt. Denkm.*, Bd. III, pp. 144. folg.; Otto Jahn, *Beschreibung der Vasensammlung zu München* (1854), n° 376.

Dans la douzième inscription, le mot γάμβρος est écrit γάβρος. Voir, pour l'omission de lettres prononcées dans le langage, Adr. de Longpérier, *Mémoires de la Société des Antiquaires de France,* 1852, t. XXI, pp. 370 et suiv.; *Bull. de l'Académie royale de Belgique,* t. XIX, 2[me] partie, 1852, p. 397; de Witte, *Revue numism.,* 1858, pp. 22 et 23.

C'est une idée féconde et ingénieuse de fixer la date d'une inscription en faisant attention aux noms en usage à telle ou telle époque. Pollianus, nommé dans la treizième inscription, est le nom d'un stratége du temps d'Alexandre Sévère. On rencontre ce nom sur les médailles de Thyatire aux effigies de ce prince et de sa mère Julie Mamée.

Dans la quatorzième inscription Θεῷ Ὑψιστῷ désigne sans aucun doute Jupiter, et on aurait tort de penser à une formule chrétienne. L'aigle vient à l'appui de cette explication.

Je conclus en m'unissant à l'avis de mon savant confrère, M. Roulez, et, en conséquence, j'ai l'honneur de proposer à l'Académie de voter l'impression du travail plein d'intérêt et d'érudition de M. le professeur Wagener. »

# INSCRIPTIONS GRECQUES

RECUEILLIES

# EN ASIE MINEURE.

Lors du voyage que je fis en Orient, il y a quelques années, j'eus la bonne fortune de pouvoir m'associer à une expédition fort intéressante, organisée par les soins du gouvernement prussien et dirigée par le consul de Prusse à Smyrne, M. Spiegelthal. Il s'agissait de pénétrer les secrets de la fabrication des tapis dits de Smyrne; or, comme ce n'est pas à Smyrne même que se font ces tapis, mais qu'on les confectionne dans quelques villes de l'intérieur de l'Asie, notamment à Goerdis, à Koula et à Ushak, on reconnut qu'il serait indispensable de se transporter dans ces localités, tout en ne se bornant pas à visiter seulement ces endroits. Quelque éclairées, en effet, que soient à beaucoup d'égards les vues du gouvernement ottoman, on sait que les populations turques nourrissent à l'endroit des Européens certaines préventions qu'il eût été dangereux de heurter trop ouvertement. La Turquie redoute, et non pas tout à fait sans raison, les envahissements de l'industrie européenne. L'expédition prussienne, pour atteindre son but, se trouvait, par conséquent, dans la nécessité de le masquer. Même aux yeux des *cavass* qui formaient son escorte, elle ne se composait que de touristes ordinaires, se donnant la satisfaction, inexplicable aux Orientaux, de voyager pour visiter *de vieilles pierres.*

C'est pourquoi il fut résolu qu'avant de se rendre à Goerdis, on se transporterait d'abord dans les villes de Magnésie (*ad Sipylum*), de Pergame et de Thyatire, et qu'après avoir visité ensuite Goerdis, Koula et Ushak, on reviendrait par Hiérapolis, Philadelphie et Sardes. Comme ce plan de voyage ne contrariait en rien mes goûts archéologiques, je résolus de m'ad-

joindre à l'expédition prussienne, non pas dans l'espoir de faire des découvertes importantes, mais afin de voir l'emplacement de quelques-unes de ces grandes cités helléniques dont les débris jonchent le sol de l'Asie.

D'ailleurs je ne négligeai pas de recueillir avec soin tous les monuments écrits relatifs à l'antiquité, qu'une combinaison du hasard et de recherches incessantes me fit de temps en temps découvrir sur la route. C'est ainsi que je réussis peu à peu à rassembler un certain nombre d'inscriptions inédites, qui, sans offrir un égal intérêt, me paraissent néanmoins assez remarquables pour être soumises à l'appréciation de l'Académie.

Par une singulière coïncidence, les trois villes qui, au point de vue industriel, formaient le but principal de notre expédition furent aussi précisément celles où je rencontrai les plus curieux monuments.

J'ai déjà eu l'honneur, le 5 mars 1855, de présenter à la classe des lettres une notice sur un monument métrologique que je découvris, pendant cette même excursion, à Ushak[1].

Je me propose de lui faire connaître maintenant quelques autres parties de mon recueil, en commençant par les inscriptions inédites que j'ai copiées à Koula et à Goerdis.

[1] Cette notice a été insérée dans le tome XXVII des *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers*. Le monument d'Ushak a donné lieu depuis à des conjectures fort ingénieuses consignées dans une dissertation de M. Ludwig-Ferdinand Fenner von Fenneberg (*Ueber die Verschiedenheit der griechischen Stadien und Fussmasse.* Berlin, 1858). Je me réserve de faire connaître plus tard mon opinion sur les théories du savant docteur allemand.

## INSCRIPTIONS DE KOULA.

Parmi les monuments épigraphiques de l'Asie Mineure, les plus importants sont sans contredit ceux qui fixent l'emplacement de quelque ville inconnue ou d'une cité mentionnée par les anciens géographes.

C'est dans cette catégorie qu'il faut ranger l'inscription suivante [1] :

### I.

*Ἔτους ρπε, μηνὸς Δαισίου α, ἐπὶ στεφανη-*
*φόρου Γλύκωνος, ἡ Κολοηνῶν κατοικία κα-*
*θιέρωσαν Δία Σαβάζιον. Ἐπὶ ἱερέων Ἀπολ-*
*λωνίου τοῦ Ἰόλλα καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Δαΐπ-*
*που Αἰσώπου καὶ Μητρᾶ Ἀσκληπιάδου καὶ*
*[Ἀρτε]μιδώρου Κλέωνος καὶ Κλέωνος Με-*
*[νεκράτους καὶ Ἀπ]ολλωνίου Δίωνος καὶ Α..*

« En l'année 185, le premier du mois de Daesius, Glycon étant stépha-
» néphore, la ville de Coloé consacra Jupiter Sabazius. Étaient prêtres :
» Apollonius, fils d'Iollas, et Apollonius, fils de Daïppus Ésope, et Métras,
» fils d'Asclépiade, et [Arté]midore, fils de Cléon, et Cléon, fils de Mé[né-
» crate, et Ap]ollonius, fils de Dion et A.... »

Cette inscription se trouve dans la cour d'une maison particulière, habitée par un Grec. Elle est gravée sur une stèle de marbre blanc, dont la hauteur est d'environ un mètre et demi et la longueur de près de soixante-quinze centimètres.

La partie supérieure est ornée d'un bas-relief à propos duquel j'ai consigné, dans mes notes, les renseignements suivants :

« Ce bas-relief se compose de deux rangées de personnes superposées.

[1] Voyez planche A, n° I.

» Dans la première, on voit d'abord, en partant de la gauche, un homme
» debout, coiffé du bonnet phrygien et tenant de la droite un caducée.
» Entre le bonnet phrygien et le caducée on aperçoit un croissant. De la
» main gauche il guide deux chevaux, traînant un char sur lequel est assis
» un dieu. Sur l'un de ces chevaux est placé un aigle; à leurs pieds se roule
» un serpent. Derrière le char se trouve un autel, et sur cet autel se tient
» un sacrificateur. Puis viennent trois personnages dans l'attitude de sup-
» pliants.

» Dans la seconde rangée sont groupés treize suppliants, sept à gauche,
» six à droite. Ils ont tous la face tournée vers un autel situé au milieu.
» Sur l'autel se dresse un arbre, au pied duquel sont placés, les uns sur les
» autres, quelques petits corps ronds qui ressemblent à des pains. »

Grâce à l'inscription qui accompagne cette sculpture, l'explication n'en saurait être douteuse. Le dieu assis sur le char est sans contredit Jupiter Sabazius. Il est conduit vers son temple par le dieu *Mên* ou *Lunus*, qu'il est facile de reconnaître à ses attributs. Le sacrificateur placé sur l'autel est très-probablement le stéphanéphore Glycon. Les seize suppliants sont les prêtres du dieu, dont la liste ne nous est parvenue qu'imparfaitement, vu qu'à sa partie inférieure le monument de Koula est brisé.

Justifions les détails de cette explication. J'ai donné au premier personnage à gauche le nom de *Mên* ou de *Lunus*. En effet, nous savons que la lune, envisagée comme divinité masculine, était adorée dans la plus grande partie de l'Asie Mineure, et que son culte était surtout répandu en Phrygie. Strabon (l. XII, ch. VIII) mentionne comme extrêmement célèbre le temple de Mên, auquel il donne le surnom de *Carus*. Or ce temple n'était situé qu'à une vingtaine de lieues de Koula, dans la partie sud-ouest de la Phrygie, entre Laodicée et Caroura. D'autre part, les attributs du dieu Mên nous sont révélés par un grand nombre de médailles[1], où l'on voit cette divinité, soit à pied, soit à cheval, avec un croissant et le bonnet phrygien. Ce qui sert

[1] Voyez Mionnet, *Descr. des méd. ant. gr. et rom.*, t. IV, p. 300, n° 603 et n° 604 (médailles d'Hiérapolis); p. 375, n° 2 et n° 4; p. 376, n° 12 et n° 13; p. 397, n° 142 (médailles de la Galatie). Les médailles asiatiques relatives à Lunus ont fait l'objet d'une étude spéciale de la part de Streber (*Numis. gr.*, pp. 169 et suiv.), dont je regrette vivement de ne pas avoir l'ou-

enfin à lever tous les doutes, ce sont deux autres bas-reliefs que j'ai vus également à Koula [1], et qui représentent le dieu de la lune avec des attributs analogues. Les inscriptions qui accompagnent ces sculptures et qui ont été publiées en dernier lieu par M. Ph. Lebas [2], nous font voir qu'on adorait à Koula le dieu du soleil sous le nom de *Zeus Masphalaténos* et celui de la lune sous le titre de Mên [3]. Sur d'autres monuments, recueillis dans la même ville, le dieu Mên est appelé Ἀζιοττηνός, Πετραείτης [4] et Ἀρτεμιδωρος [5]. Il résulte clairement de tous ces faits réunis une circonstance importante et sur laquelle je reviendrai plus loin, savoir, que le dieu de la lune était tout particulièrement honoré à Koula.

Ce qui distingue le dieu Mên, tel qu'il est représenté sur le monument dont nous nous occupons, c'est que de la main droite il tient un caducée. Cette particularité nous fait voir que, dans le cas actuel, Lunus occupe les fonctions de Mercure, qu'on voit chargé très-souvent, sur les monuments figurés, d'escorter dans leurs voyages les divinités de l'Olympe. Mais pourquoi Mercure est-il ici remplacé par Lunus? Voici, si je ne me trompe, l'explication de ce fait. Sabazius, ainsi que nous le verrons plus tard, était représenté très-souvent comme dieu du soleil. De là un premier rapport qui l'unissait au dieu Mên. Toutefois ces deux divinités, bien qu'unies par une affinité naturelle, n'occupaient pas le même rang dans la hiérarchie céleste. Lunus était regardé comme inférieur au dieu du soleil. Je ne citerai pour le prouver que les deux

vrage sous les yeux. M. Gerhard (*Arch. Zeitg.*, ann. 1854, pp. 210 et suiv.), à qui j'emprunte cette indication, a démontré que la prétendue amazone à cheval, qu'on rencontre sur un grand nombre de médailles de l'Asie, n'est en général autre chose qu'une image de Lunus, armé d'un marteau ou plutôt d'une bipenne.

[1] Ils sont dessinés dans Keppel, *Narrative af a Journey across the Balcan*, t. II, pp. 273-281, 346 et suiv.

[2] *Voyage en Grèce et en Asie Mineure*, 5me partie, p. 212, n° 667, et p. 213, n° 668.

[3] Le nom de Zeus Masphalaténos est accompagné sur ces deux monuments des épithètes de *Ménitiamos* et de *Ménityrannos*. Ne pourrait-on pas expliquer le premier de ces titres en supposant que le mot τιαμος doive être dérivé de la racine τίω avec la terminaison αμος, que nous rencontrons assez souvent en Asie (Πέργαμα, Πρίαμος, Τεύταμος, Τύρταμος); de sorte que τίαμος serait à peu près la même chose que σεμνός. Les mots Ménitiamos et Ménityrannos devraient alors être traduits en latin par *Luno venerabilis*, *Luno imperans*.

[4] Voyez Lebas, *l. l.*, p. 215, n° 680, et p. 214, n. 678.

[5] Voyez Böckh, *Corpus inscriptionum graecarum*, n° 3442 et n° 3448.

inscriptions mentionnées plus haut, où l'on voit que Zeus Masphalaténos (c'est-à-dire le dieu du soleil) porte le titre de Ménityrannos. Or, dans plusieurs inscriptions latines rapportées par Orelli [1], nous trouvons le nom à peu près identique de Ménotyrannus. Cette fois c'est une épithète donnée à Attis, dont le culte, comme on sait, était intimement lié à celui de Cybèle. Maintenant comme Cybèle est appelée parfois mère de Sabazius [2], celui-ci pouvait, au même titre qu'Attis, porter le surnom de Ménotyrannus [3]. Ce qui démontre de plus qu'il y avait beaucoup de rapports entre le culte de Mên et celui de Sabazius, c'est un passage fort remarquable de Proclus [4], où il est dit que, chez les Phrygiens, le dieu Mên était vénéré (*ὑμνούμενος*) sous le nom de Sabazius et invoqué au milieu des cérémonies accomplies en l'honneur de ce dieu.

Si de cette manière nous avons établi, d'une part, l'affinité qui existait entre Sabazius et Mên, d'autre part, la supériorité du premier sur le second, il n'y a plus rien de surprenant à voir le dieu de la lune conduire les chevaux du char de Jupiter Sabazius.

Mais vers quel endroit se dirige ce dieu? L'inscription doit nous éclairer sur ce point. Voici, en effet, ce qu'elle porte : *ἡ Κολοηνῶν κατοικία καθιέρωσαν Δία Σαβάζιον*.

Notons d'abord que le pluriel *καθιέρωσαν*, se rapportant au singulier *κατοικία*, n'est autre chose qu'une construction *κατὰ σύνεσιν*. Mais que signifie proprement *καθιεροῦν*? Comme le prouvent les exemples cités au bas de cette page [5], ce mot veut dire *diviniser, sanctifier, consacrer*. Il n'a nulle part le sens de *vénérer*. En effet, quelque fréquent que soit son emploi dans les inscriptions,

[1] Orelli, *Inscriptionum latinarum amplissima collectio*, nos 1900, 1901, 2264, 2353.

[2] Voyez Strab., *Geogr.*, X, pp. 470 et 471, et l'article de Pfau, dans *Real Encyclopädie d. klass. Alterth.*, VI, p. 405.

[3] Je regrette de ne pas avoir pu me procurer la dissertation de M. Ed. Müller, intitulée : *De Attide et Sabazio*.

[4] *Ad Tim.*, IV, 251.

[5] Plutarq. *Mar.* c. 26. Ηὔξατο δὲ καὶ Κάτλος ὁμοίως ἀνασχὼν τὰς χεῖρας, καθιερώσειν τὴν τύχην τῆς ἡμέρας ἐκείνης.

Plutarq., *Camil.*, c. 21, ὡς ἑαυτοὺς ὑπὲρ τῆς πατρίδος τῷ δαίμονι καθιεροῦντες.

Dion Cass., l. 43, 22, τὸν νεὼν τῆς Ἀφροδίτης καθιέρωσε.

Photius : καθιεροῖ, θεῷ ἀνατίθησιν.

je ne crois pas qu'on puisse citer un seul exemple où il indique autre chose qu'un acte de consécration solennelle et, par conséquent, unique. Il résulte de là que le monument de Koula n'est pas destiné à éterniser la mémoire d'une cérémonie ordinaire, accomplie en l'honneur de Zeus Sabazius, mais qu'il rappelle le souvenir du jour où cette divinité fut consacrée à Koula, c'est-à-dire où elle fut officiellement installée dans son temple. Cette installation se rattachait très-probablement à l'inauguration de la statue, où la divinité allait désormais établir son siége (ἕδος) [1].

Zeus Sabazius n'est, à proprement parler, ni Jupiter, ni Sabazius; c'est, à certains égards, une divinité nouvelle, issue de ce syncrétisme mythologique, si commun dans les derniers siècles du paganisme [2].

Le dieu Sabazius, qui appartenait primitivement aux Phrygiens [3] et aux Thraces [4], doit être rangé dans la catégorie de ces divinités multiformes dont il est fort difficile de saisir la véritable nature. En effet, les auteurs anciens qui nous parlent de lui sont très-loin de s'accorder entre eux; car tandis que les uns l'identifient avec le soleil [5], il en est d'autres qui l'assimilent à Lunus [6]. Tour à tour père [7] ou fils [8] de Bacchus, il est quelquefois aussi Bacchus lui-même [9] ou bien Jupiter [10]. Quoi qu'il en soit de cette diversité d'opinions, il résulte cependant assez clairement de toutes ces données que Sabazius était un dieu de la lumière présidant à la fécondité de la terre. C'est pour cette raison qu'on a pu y voir une personnification du soleil. Or, comme dans plusieurs cultes de l'Asie septentrionale, le dieu de la lune était à peu près identique avec celui du soleil [11], il n'est pas étonnant qu'on ait pu trouver dans Lunus une des formes de Sabazius. D'autre part, comme les mystères de

[1] Voyez Welcker, *Kleine Schriften*, v. III, pp. 520 et 524.
[2] Voyez Becker-Marquardt, *Roemische Alterthümer*, t. IV, pp. 95 et 129.
[3] Strabon, X, 470.
[4] Macrob., *Sat.*, I, 18. *Schol. ad Aristoph. Avv.* 875.
[5] Macrob., *l. l.*
[6] Voyez plus haut.
[7] *Hym. Orph.*, v. 47.
[8] Hesych., s. v.
[9] Macrob., *l. l.*
[10] *Hymn. Orph.*, *l. l.*
[11] Voyez *Archæolog. Zeitg.* de M. Gerhard, 1854, p. 210.

Bacchus se rapprochaient singulièrement de ceux de Sabazius [1], on comprend qu'on se soit efforcé d'établir entre ces dieux eux-mêmes un rapprochement analogue, soit en les identifiant complétement, soit en les considérant tour à tour comme le père l'un de l'autre. Enfin, vu que la fécondation du sol se produit au moyen de la pluie, il est assez naturel que le nom de Ὕης ait été employé pour désigner tantôt Sabazius, tantôt Jupiter [2].

Le culte de Sabazius paraît avoir été introduit en Grèce vers l'époque de la guerre du Péloponèse, et, au milieu du deuxième siècle avant J. C., on tâcha de le faire pénétrer à Rome. Valère Maxime, qui rapporte [3] que le préteur des étrangers, C. Cornelius Hispallus (an. 614 de Rome), ordonna aux sectateurs de ce dieu de regagner leur pays, désigne la divinité nouvelle sous le nom de *Sabazius Jupiter,* et nous retrouvons la même dénomination dans une inscription rapportée par Orelli [4]. Ceci nous ramène directement au monument de Koula. Je ne doute nullement que le culte de Sabazius n'ait été de bonne heure introduit en Lydie, notamment dans cette partie de la Lydie où se trouve Koula et qui touche à la Phrygie. Ce qui le prouve, c'est que, dans les hymnes attribués à Orphée [5], il est dit que Sabazius, fils de Saturne, déposa *sur le mont Tmolus,* le jeune Bacchus. De plus, Jean le Lydien (*De Menss.,* p. 96) prétend que sur le sommet du Tmolus se trouvait jadis un endroit appelé : Γοναὶ Διὸς ὑετίου. Or, ce Ζεὺς ὑέτιος n'est guère différent de Ὕης, qui, comme nous l'avons vu plus haut, se confond avec Sabazius [6].

C'est donc à tort que Bernhardy [7] a mis en doute que Sabazius fût vénéré en Lydie, et l'on comprend pourquoi Cicéron, en faisant l'énumération des différents Bacchus [8], a prétendu que celui d'entre eux en l'honneur duquel avaient été instituées les *Sabazies,* était considéré comme *roi de l'Asie,* ce qui revient à dire que le culte de Sabazius était répandu dans une très-grande

[1] Diod. Sic., IV, 15; Valer. Max., 1, 3. 2.
[2] Voyez Lobeck, *Aglaophamus,* pp. 1046 et 1048.
[3] *Sat.,* I, 3, 2.
[4] *Jovi Sabazio. Inscr. lat.,* n. 1259.
[5] *Hymn. Orph.,* 47, vv. 3 et 4.
[6] Voyez Lobeck, *Aglaoph.,* p. 1047.
[7] *Ad Dionys. Perieg.,* p. 757.
[8] *De Nat. Deor.,* III, 23.

partie de l'Asie. Je ne crois donc pas que le monument qui nous occupe marque la date de l'introduction à Koula du culte de Sabazius, mais celle de la consécration de cette forme du dieu qui est désignée comme une combinaison de Sabazius et de Zeus. Si nous ajoutons ce double nom à celui de *Zeus Masphalaténos,* surnommé également *Ménitiamos* et *Ménityrannos,* nous verrons dans ces nombreuses épithètes une preuve de plus de cette tendance dont j'ai parlé plus haut, et qui consistait à ramener peu à peu tous les dieux particuliers à un dieu souverain et unique, représenté sous ses aspects divers par des dénominations différentes.

Quant au serpent qui se trouve sur notre monument, nous ferons observer que cet animal était consacré à Sabazius, ainsi que le prouvent des passages de Théophraste [1] et d'Artémidore [2]. L'aigle placé sur un des chevaux du char de Zeus Sabazius est l'attribut bien connu de Jupiter. Il convient d'autant mieux au dieu de Koula, qu'on peut envisager celui-ci comme dieu du soleil, et que l'aigle — F. Lajard [3] l'a démontré — est un des symboles du dieu solaire asiatique.

J'ai identifié le personnage qui vient à la suite du dieu avec le stéphanophore *Glycon,* que mentionne l'inscription. En effet, le mot στεφανηφόρος ou *porte-couronne,* est le titre d'un magistrat éponyme qui exerçait dans beaucoup de villes de l'Asie [4] des fonctions à la fois civiles et sacerdotales [5]; de sorte que Denys d'Halicarnasse a pu à juste titre le comparer aux flamines [6]. Il n'y a, par conséquent, rien d'étonnant à ce que le stéphanophore Glycon préside à une cérémonie religieuse.

Le nom de Glycon paraît avoir été assez commun à Coloé. Nous le retrouverons plus bas [7] et on le rencontre encore dans cinq inscriptions de Koula [8],

[1] *Char.,* XVI.
[2] *Oneir.,* II, 13.
[3] *Mém. de l'Acad. des inscript. et belles-lettres,* t. XX, 2me partie, pp. 14 et 15.
[4] Voyez *Corp. inscr. graec.,* nos 2693, 2715, 2826, 2827, 2834, 2852, 2905, 3137.
[5] Voyez *Athén.,* 6, 215 B. (Lysias) ὑπὸ τῆς πατρίδος στεφανηφόρος αἱρεθεὶς, τούτεστιν ἱερεὺς Ἡρακλέους.
[6] *Arch.,* II, p. 64.
[7] Voyez planche B, no IV.
[8] Voyez Lebas, ouvr. cité, V, p. 212, no 667; p. 217, no 700; p. 218, no 709. Voyez aussi *Corp. inscr. graec.,* nos 3442 et 3447.

qui nous montrent entre autres Philippe, fils de Glycon, et Diogène, fils de Glycon, revêtus tous deux de fonctions sacerdotales. Nous voyons par là que la famille des Glycon devait jouir, à Coloé, d'une grande considération, et nous établirons plus bas qu'elle appartenait probablement à la classe des chevaliers.

Les noms des prêtres inscrits sur le monument de Koula n'offrent que fort peu de particularités remarquables. On rencontre assez souvent le nom d'Iolas [1]; celui d'Ésope paraît avoir été employé surtout en Asie. On le trouve, par exemple, dans une inscription de Sigée [2]. Le nom de Métras doit être fort rare : je ne le connais que par les grammairiens cités dans le *Thesaurus linguae Graecae* [3], où l'on voit que c'est un diminutif de *Métrodore*, et par les indications du dictionnaire de M. Pape [4]. La manière dont j'ai rempli la lacune de la sixième ligne se justifie d'elle-même, et je crois que je ne me suis pas trompé davantage en écrivant au commencement de la septième ligne : Με[*νεκράτους καὶ Ἀπ*]*ολλωνίου*. En effet, dans toutes les lignes précédentes, il y a constamment de trente à trente-deux lettres, et le nom de Ménécrate se rencontre deux fois dans l'inscription de Koula, mentionnée ci-dessus [5].

La date de $\overline{\rho\pi\varepsilon}$ ou de 185, inscrite sur notre monument, se rapporte à une ère qui, après avoir donné lieu à de nombreuses conjectures, a été enfin déterminée d'une manière incontestable par Frantz [6], dans le troisième volume du *Corp. ins. gr.*, p. 1103. Cette ère commence en l'année 84 avant J. C., d'où il résulte que le monument de Koula remonte à l'année 101 de l'ère chrétienne.

Quant au mois de Daesius, qui était le huitième de l'année macédonienne, je ne puis mieux faire que de m'en rapporter aux calculs de M. Ideler [7], qui fixe le commencement de ce mois au 24 avril. Si cette date, comme tout porte à le croire, est exacte, elle s'accorde parfaitement avec le caractère du dieu

[1] Voyez Pauly, *Real Encyclop. d. klass. Alterth.*, t. IV, p. 225.

[2] *Corp. inscr. graec.*, I, p. 869.

[3] Éd. de Paris, s. v.

[4] Éd. de 1850, 3me partie, s. vv. : Μήτρας et Μητρᾶς.

[5] Ph. Lebas, *l. l.*, p. 112, nº 667.

[6] Avant de connaître les conclusions de Frantz, j'étais arrivé moi-même à un résultat identique. Qu'il me soit permis de dire que cette coïncidence est, sinon un argument, du moins une probabilité de plus en faveur de la théorie déduite par Frantz.

[7] *Handb. d. Chronol.*, I, p. 419.

qui, au printemps, fait revivre la nature. Denys le Périégète[1] décrit longuement les fêtes de Bacchus qui, dans la saison printanière (εἴαρος ὥρῃ) avaient lieu en Méonie, au milieu des plaines du Caïstre, et M. Bernhardy, dans son commentaire sur ces vers[2], cite des passages d'Himérius[3] et de Claudien[4], où il est parlé des solennités bachiques célébrées au printemps en Lydie. Or, j'ai fait observer plus haut qu'il y a le plus grand rapport entre le culte de Sabazius et celui de Bacchus; de plus, quant à ce dernier, nous savons qu'il était honoré d'une façon toute particulière dans cette partie de la Phrygie ou de la Lydie qui porte le nom de Κατακεκαυμένη, et au milieu de laquelle est située la ville de Koula[5]. Il serait donc fort possible que la date de notre monument (le 1er Daesius) marquât l'époque précise à laquelle on célébrait habituellement, en Lydie, les fêtes de Bacchus ou de Sabazius.

C'est à cette circonstance qu'il faut peut-être aussi rapporter l'arbre symbolique sculpté sur le monument de Koula. Je suis assez disposé à considérer cet arbre comme un cyprès. Félix Lajard, dont on connaît les savantes recherches sur le culte du cyprès[6], a montré que cet arbre était regardé généralement en Asie comme un symbole de fécondité et de vie. Cela seul pourrait déjà nous autoriser à admettre que le cyprès devait être consacré à Sabazius. Mais il y a plus : F. Lajard a cité deux médaillons de bronze, frappés à Éphèse, en l'honneur d'Antonin le Pieux, et sur chacun desquels on voit *Jupiter Pluvius*, dont l'image est accompagnée d'un cyprès[7]. Or, nous avons montré plus haut que Jupiter Pluvius est une divinité peu différente de Sabazius. Ce qui prouve, d'autre part, que le culte du cyprès n'était nullement étranger aux Lydiens, ce sont plusieurs médailles de la ville de Mostène[8]. Une de ces médailles nous montre un personnage à cheval, brandissant de la droite un marteau

[1] V. 833 et suiv.

[2] Page 757.

[3] Page 436.

[4] *Rapt. Pros.*, II, 67 et suiv.

[5] Ce fait est démontré par plusieurs médailles frappées dans la ville de Maionia. Cf. Eckhel, *Doctrina numm.*, vol. III, p. 105.

[6] *Mém. de l'Inst. de France. — Acad. des inscript. et belles-lettres*, t. XX, 2me partie, 1854.

[7] *Ibid.*, p. 101.

[8] *Ibid.*, p. 109.

ou une bipenne. Un second personnage, tenant un caducée de la gauche, guide de la droite le cheval du premier. Entre ces deux personnes sont représentés un cyprès et un autel allumé. L'analogie qu'il y a entre cette médaille et le monument de Koula ne peut manquer de sauter aux yeux, et peut-être faudra-t-il, à cause même de cette analogie, expliquer la médaille de Mostène tout autrement que ne l'a fait F. Lajard.

En effet, le savant académicien français considère le personnage à cheval comme un portrait d'amazone, et il donne le nom de Mercure à l'homme au caducée. Mais d'abord, pour ce qui est de l'amazone, cette interprétation, qui ne se fonde que sur la présence de la bipenne, a été suffisamment réfutée par les observations de M. Gerhard[1]. Cette prétendue amazone sera-t-elle maintenant un Lunus, qu'on rencontre très-fréquemment sur les médailles de l'Asie? Cette conclusion ne me paraît nullement nécessaire.

Pourquoi la bipenne, qu'on a regardée à tort comme un attribut *distinctif* des amazones, serait-elle le signe caractéristique du dieu de la lune? M. Gerhard a publié[2] une plaque de bronze extrêmement curieuse, où l'on aperçoit entre autres un dieu à cheval, coiffé du bonnet phrygien et armé d'une bipenne. Or ce dieu, d'après MM. Gerhard et Lajard, n'est point celui de la lune, mais une divinité solaire à laquelle ces deux savants donnent, de commun accord, le nom de Sabazius. Si cette désignation, comme tout porte à le croire, est exacte, rien ne nous empêche de reconnaître également Sabazius sur la médaille de Mostène. Le dieu de la plaque de bronze est, à la vérité, *barbu*, particularité qui ne se retrouve pas dans la médaille prémentionnée. Mais ce détail ne doit pas nous arrêter. En effet, sur une médaille de la ville de Trébizonde, on voit un dieu *non barbu* à cheval, coiffé du bonnet phrygien et tourné du côté d'un autel allumé. Derrière le dieu on aperçoit un arbre; sous les pieds de son cheval se roule un serpent. De part et d'autre du dieu sont placés deux jeunes gens, coiffés, eux aussi, du bonnet phrygien et tenant, le premier, une torche baissée, le second, une torche levée. M. Gerhard[3] voit avec raison dans ce personnage à cheval, non pas Lunus, mais le

[1] Voyez plus haut.
[2] *Archeol. Zeitg.*, 1854, pl. 65, 3.
[3] *Ibid.*, n° 1, p. 210.

dieu du soleil, et je crois avec lui que les deux jeunes gens qui portent des torches et qui accompagnent ce dieu doivent être considérés comme des représentants de l'étoile du matin et de l'étoile du soir, de Phosphorus et d'Hespérus, symboles naturels du lever et du coucher du soleil. Or, s'il en est ainsi, rien ne s'oppose plus à ce que nous regardions le personnage à cheval de la médaille de Mostène comme un dieu solaire et notamment comme Sabazius; en outre, cela étant admis, la personne qui, sur la même médaille, tient la bride du cheval de Sabazius sera non pas Mercure, mais le dieu de la lune.

Si ces déductions ne sont pas trop hasardées, l'analogie que j'ai signalée plus haut entre la médaille de Mostène et le bas-relief de Koula s'explique par la quasi-identité du sujet, et la présence sur ces deux monuments d'un autel et d'un arbre sacré nous amène à conclure que le culte du cyprès se rattache de préférence, en Lydie comme ailleurs, aux dieux de la lumière et surtout au soleil.

Cette conclusion est encore confirmée par des médailles de Mastaura, autre ville de Lydie[1].

Pour ce qui regarde enfin les petits corps ronds qui, sur le monument de Koula, sont placés au pied du cyprès, je les considère comme des *gâteaux sacrés*, et je crois qu'il font allusion à la circonstance suivante. Démosthène nous rapporte[2] que l'orateur Eschine parcourait dans sa jeunesse les rues d'Athènes, à la tête des serviteurs de Sabazius[3], *couronnés de fenouil et de feuilles de peuplier*[4], et il ajoute que les vieilles femmes le récompensaient de ses services en l'appelant ἔξαρχος, προηγεμών, κιστοφόρος, et en lui donnant *toutes sortes de gâteaux*. Le mot κιστοφόρος a été expliqué par Clément d'Alexandrie[5], qui nous apprend que les cistes mystiques des serviteurs de Sabazius

[1] Voyez Lajard, ouvr. cité pp. 110 et suiv.

[2] *Pro Cor.*, p. 313.

[3] Démosthène ne cite pas, il est vrai, le nom de Sabazius, mais les cérémonies auxquelles il fait allusion ne peuvent se rapporter qu'aux *Sabazies* phrygiennes, ainsi que l'a démontré Lobeck, *Aglaoph.*, p. 647.

[4] Ce passage pourrait également servir à expliquer l'arbre sacré du monument de Koula, au cas que cet arbre ne fût point un cyprès.

[5] *Coh.*, p. 6. Dans le passage précité de Démosthène, le mot κιστοφόρος a été maintenu contrairement à l'opinion de plusieurs éditeurs, qui le remplacent par celui de κιττοφόρος. Voyez sur cette leçon la note *g* de la p. 647 de l'*Aglaophamus*.

(κίσται αἱ μυστικαί) contenaient différentes espèces de galettes (σησαμαῖ, πυραμίδες, τολύπαι). Ne seraient-ce pas là les gâteaux sacrés que je crois avoir reconnus sur le monument de Koula?

Je ne veux pas, d'ailleurs, insister trop fortement sur tous ces détails, pour ne pas donner prise aux justes sarcasmes du savant et spirituel auteur de l'*Aglaophamus,* qui a exposé avec autant de verve que d'érudition toute la théorie de la *Pemmatologia sacra* [1].

Il me reste encore à mettre en lumière la partie la plus intéressante de notre inscription, j'entends parler des mots ἡ Κολοηνῶν κατοικία, qui contiennent une révélation aussi inattendue que curieuse; car personne ne s'était douté jusqu'ici, que la ville de Koula cachât la dénomination d'une cité hellénique. Au contraire, dans le *Corpus inscriptionum graecarum,* M. Böckh insinue d'une façon assez claire que toutes les inscriptions trouvées à Koula doivent être rapportées à la ville de *Maeonia.* Cette supposition était assurément très-plausible, et je ne m'étonne pas qu'elle ait été adoptée également par M. Lebas. Voici, en effet, sur quoi elle se fonde.

Nous savons par le *Synecdème* d'Hiéroclès, par les recueils appelés *Notitiae Episcopatuum,* par les conciles et enfin par plusieurs médailles, qu'il existait dans la province de Lydie une ville du nom de *Maeonia.* Nous savons, en outre, qu'une partie de la Phrygie ou de la Lydie, désignée communément sous le nom de Κατακεκαυμένη, était quelquefois aussi appelée Μαιονία, et que dans cette contrée se trouvent les cratères de trois anciens volcans, auxquels Strabon donne le nom de φῦσαι. Or, ces trois volcans sont situés à quelque distance de Koula, et deux lieues plus loin, dans la direction du nord-ouest, il y a un village du nom de *Mennéh.* Il est donc fort probable que le village de Mennéh occupe l'emplacement de l'ancienne Méonie. Je dois toutefois faire observer que l'inscription 3440 (C. I. G.), sur laquelle M. Böckh, et avant lui M. Leake et le major Keppel ont cru pouvoir se fonder pour convertir cette probabilité en certitude complète, a été copiée par Keppel d'une façon inexacte. La copie que j'en ai prise moi-même coïncide de tout point (sauf un détail de peu d'importance), avec celle qu'a publiée M. Lebas [2], de sorte qu'il

[1] *Aglaoph. Epim.,* XIV, pp. 1050 et suiv.
[2] Ouvr. cité, sect. III, p. 213, n° 671.

est inutile que je la transcrive à mon tour. Qu'il me suffise de dire que cette inscription, qu'on prétend avoir été découverte à Mennéh, mais qui se trouve actuellement à Koula, est l'épitaphe d'une jeune fille où sont énumérés, comme cela se fait habituellement, les principaux membres de sa famille. Or, si nous nous en rapportons à la transcription de Keppel, on aurait compris dans cette liste, contrairement à toute analogie, deux habitants de Méonie qui n'auraient point été ses parents (Μηῖονες Μάρκος καὶ Νεῖκυς), mais que, d'après M. Leake [1], il faudrait considérer comme ayant été ses amants (*her lovers*).

Il y a dans cette conjecture, tout le monde en conviendra, quelque chose de singulièrement insolite. Aussi bien la copie de M. Lebas et la mienne portent-elles, l'une et l'autre, non pas Μηῖονες, mais μήτρωνες. Le nom de μήτρων ne se trouve pas encore, il est vrai, dans les dictionnaires, mais combien d'autres provincialismes n'a-t-on pas déjà recueillis dans les inscriptions de l'Asie! Néanmoins, si l'on voulait contester l'existence du mot μήτρων, en se fondant sur ce fait que l'on rencontre parfois, dans les monuments épigraphiques, des erreurs provenant de l'ignorance ou de l'incurie du graveur, je ferais observer que nous retrouvons le même terme dans une inscription copiée également à Koula et publiée par M. Hamilton [2].

Il me paraît donc établi, d'une part, que le mot μήτρων désignait, à Koula, un degré de parenté qu'il ne nous importe pas ici de déterminer d'une manière rigoureuse, d'autre part, que l'argument tiré du mot Μηῖονες n'a plus aujourd'hui la moindre valeur.

Ce n'est pas que je veuille nier l'identité de Méonie et de Mennéh; car M. Hamilton prétend avoir vu le mot Μαιώνων sur un des murs de la mosquée de Mennéh. Ce que je tiens à établir, c'est que toutes les inscriptions trouvées à Koula ne doivent pas nécessairement provenir de Mennéh, et qu'en l'absence de preuves du contraire, il convient de les attribuer à la ville de Coloé, dont l'existence est prouvée par la présente inscription et dont l'emplacement ne peut guère différer de celui de Koula; car il est pour moi hors de doute que le nom de la ville de Koula se rattache directement à celui de

[1] *Apud* Keppel, *Journal of a tour across the Balcan*, II, p. 353.

[2] *Researches in Asia Minor, Pontus and Armenia*, vol. II, p. 468, n° 343 : Ἐλπιδηφόρον τὸν ἴδιον μήτρωνα.

Coloé, d'autant plus que ce nom ne peut pas être expliqué par un radical turc. Cette dernière circonstance résulte d'une lettre qui m'a été adressée dans le temps par M. le professeur E. Curtius.

La ville de Coloé porte le titre de κατοικία, dénomination assez obscure; car Strabon l'applique quelquefois à des cités de peu d'importance[1], tandis qu'ailleurs le même auteur[2], Appien[3] et Plutarque[4] emploient ce mot dans le sens de ἀποικία, colonie. On le trouve encore dans l'inscription 3454 (C. I. G.), pour désigner la ville de Césarée Sébasté, située entre Smyrne et Sardes, à l'endroit qu'occupe aujourd'hui Cassabah.

S'il était démontré que, pour être présidée par un stéphanéphore, il fallait qu'une cité eût une certaine importance, le stéphanéphore Glycon de l'inscription de Coloé déterminerait, d'une façon approximative, le rang qu'il convient d'assigner à cette ville. Mais, comme cette question n'est point résolue, on peut dire seulement que la plupart des villes importantes de la Turquie occupent l'emplacement de cités également considérables dans l'antiquité, d'où il résulte que, selon toute probabilité, la κατοικία de Coloé était plus qu'une bourgade.

Je ne voudrais cependant pas trop fortement appuyer sur cette circonstance; car jusqu'à présent, on n'a pas, que je sache, trouvé de médailles frappées à Coloé, et c'est en vain que j'ai cherché le nom de cette ville dans les géographes anciens, dans les itinéraires et dans les *Notitiae episcopatuum* publiées par Goar. Il est bien vrai que, dans le *Synecdème* d'Hiéroclès, on trouve[5] le nom de Κολοάσις, et qu'il est parlé souvent dans l'histoire des conciles d'un évêque de Καλόη, ou de Καλπή, ou de Κολών, ou de Κολώνη, ou enfin de Κολόη[6]; mais il faut chercher cet évêché dans la province d'Asie (ἐπαρχία Ἀσίας), tandis que l'emplacement de Koula était compris dans l'*éparchie* lydienne.

[1] *Geogr.*, V, p. 249 : Νουκερία, Νῶλα, Ἀχέρραι, Ἀβέλλα καὶ ἄλλαι ἔτι τούτων ἐλάττους κατοικίαι. Voyez *ib.*, V, p. 237.

[2] *Ibid.*, p. 272.

[3] *Bell. Civ.*, 5, 19.

[4] *Anton.*, c. 16.

[5] Ed. Wessel., p. 660.

[6] Voyez sur ces différentes leçons la note de Wesseling, *l. l.*

Le nom de Coloé ne se trouve plus qu'une seule fois dans toute l'antiquité grecque. Il avait été donné à un lac salé situé à quelques lieues au nord de Sardes, dans le voisinage des célèbres tombeaux décrits par Hérodote et par Strabon. Sur les bords de ce lac, qui jadis s'appelait *Gygaea limné*[1], s'élevait un temple d'une grande célébrité consacré à *Artémis Coloéné*. La manière dont Strabon[2] nous parle de cette divinité fait voir clairement combien son culte devait avoir d'importance, et M. E. Müller a prouvé, dans le *Philologus*[3], que le lac de Coloé était le centre de toutes les traditions mythologiques appartenant en propre à la Lydie. Cela étant, on se résoudra difficilement à admettre que, si nous rencontrons le nom de Coloé aux deux extrémités de la Lydie et nulle part ailleurs, cette similitude de noms soit un pur effet du hasard. Je crois qu'on peut s'en rendre compte et l'expliquer de la manière suivante.

Jadis la plus grande partie de la Lydie était appelée *Maeonia*. Homère, en parlant des Méoniens *qui sont nés au pied du Tmolus* (ὑπὸ Τμώλῳ γεγαῶτας), nous dit qu'ils étaient commandés à la guerre de Troie par les fils de Pylémènès et du lac Gygée (τὼ Γυγαίη τέκε λίμνη)[4]. Plus tard, lorsque le peuple lydien se fut rendu maître de presque toute cette contrée, le nom de *Maeonia* fut réservé exclusivement à la portion de territoire appelée aussi Κατακεκαυμένη. Il me paraît résulter de ce fait que les habitants primitifs, expulsés des environs de Sardes et du Tmolus, réussirent à se maintenir, du moins en partie, à l'entour des volcans qui avoisinent la Phrygie. Il est, en outre, probable et conforme à ce qui se pratiquait habituellement dans l'antiquité[5] que ces Méoniens orientaux auront conservé avec soin leurs anciennes traditions, et s'il est vrai, comme on me l'a assuré à Koula, qu'il existe, à quelque distance de cette ville, un lac d'une certaine étendue, il est fort possible qu'on lui ait donné le nom de Coloé, pour rappeler le grand lac de la mère patrie, et qu'à ce lac aussi se soit rattaché le culte de la lune vénérée sous le nom d'Artémis Coloéné.

[1] Voyez Hom., *Il.*, II, v. 865-867.
[2] *Geogr.*, l. 13, 626.
[3] Année 1852, pp. 239-254.
[4] *Il.*, *l. l.*
[5] Voyez Welcker, *Griechische Goetterlehre*, p. 16.

J'ai insisté plus haut sur ce fait, démontré par les inscriptions, que la lune était adorée à Coloé sous une foule de noms différents. Cette circonstance me paraît être une preuve de plus en faveur de mon hypothèse relative à l'origine de Coloé. Nous n'y trouvons pas, il est vrai, Ἄρτεμις Κολοηνή, mais cette lacune est peut-être tout à fait accidentelle; d'ailleurs, en admettant même que son culte n'y existât pas au premier siècle de l'ère chrétienne, rien ne serait plus simple que de supposer qu'il y fut remplacé peu à peu par celui de Lunus ou de Μήν. Cette transformation s'expliquerait, en effet, très-facilement par le voisinage des cultes phrygiens.

J'ai dit précédemment que je ne prétendais nullement nier l'identité de Méonie et de Mennéh. Je vais maintenant plus loin et je crois pouvoir soutenir que cette identification est d'autant plus plausible, que nous pouvons désormais substituer Coloé à Koula. De même que, dans la plaine de Sardes, nous trouvons le lac Coloé et le culte de la lune à quelque distance de l'ancienne capitale des Méoniens, de même, dans le voisinage des volcans qui dominent la Catacécaumené, nous retrouvons une nouvelle Méonie et quelques lieues plus loin un nouveau Coloé.

Je ne sais ce qui a déterminé M. Kiepert à placer dans son *Atlas de l'Hellade* (pl. 19) la ville de Méonie sur la grande route royale qui unissait jadis la Lydie à l'Assyrie. La décadence complète de Méonie et l'accroissement considérable de Coloé me porteraient à croire que c'est plutôt cette dernière localité qui se trouvait dans le voisinage immédiat de la grande route assyrienne. Koula est actuellement un des principaux centres pour la fabrication des tapis dits de Smyrne. Or nous savons que les tapis de pied n'étaient tissés nulle part plus magnifiquement qu'à Babylone, et que de là ces tapis étaient exportés en très-grande quantité dans les parties occidentales de l'Asie [1]. Nous savons, en outre, par le témoignage d'Homère [2], que, dès les temps les plus anciens, les Méoniens étaient réputés pour leurs procédés de teinture et que, dans la ville de Troie, on fabriquait des étoffes en couleur d'une beauté remarquable [3]. Il ne serait donc nullement étonnant que les Méoniens établis

[1] Voyez Heeren, *Idées*, etc., trad. franç., t. II, pp. 233 et suiv.
[2] *Iliad.*, IV, 141.
[3] *Ibid.*, VI, 290 et suiv., XXIII, 740 et suiv.

à l'orient de la Lydie eussent tâché d'introduire chez eux la fabrication de ces tapis que leur fournissait le commerce babylonien. Maintenant, si la ville de Coloé était située sur la grande route royale, on comprend facilement comment, dans cette localité, dut se concentrer peu à peu la fabrication et l'exportation des tapis, dits de Smyrne. Des considérations d'une nature analogue expliquent l'importance de la ville d'Ushak.

## II.

*Διακτήσιον Τατία*
*Παπίαν τὸν ἑαυτῆ[ς]*
*ἄνδρα, Τειμοκράτη[ς]*
*τὸν πατέρα, Καρποφό-*
*ρος τὸν θρέψαντα*
*κατειέρωσαν.*
*Ἔτους $\overline{σοα}$, μη(νὸς)*
*Αὐδναίου $\bar{η}$* [1].

« Diactésium Tatia, Timocrate (et) Carpophore consacrèrent Papias » (leur) époux, père (et) père nourricier, en l'année 261, le 7 du mois d'Aud- » naeus. »

Cette inscription gravée sur une stèle de marbre blanc se trouve à Koula, dans la mosquée appelée Esky-Djamé.

Le mot *Diactésium*, qui ne se trouve pas dans le dictionnaire de Pape, n'a rien qui doive surprendre. On sait, en effet, que les noms de femmes, au neutre, abondent dans la comédie grecque, bien qu'ils soient de préférence appliqués aux esclaves. Le nom de *Tatia* est très-fréquent dans les inscriptions de l'Asie. La forme *κατειέρωσαν* au lieu de *καθιέρωσαν*, est un de ces barbarismes si fréquents dans les monuments asiatiques, surtout vers le deuxième et le troisième siècle de l'ère chrétienne. Cette expression implique

[1] Voyez pl. A, n° II.

que le défunt Papias a passé à l'état de demi-dieu : aux yeux de ses parents, il est maintenant un ἥρως [1], et c'est en cette qualité qu'il a été consacré.

L'année 261, mise en rapport avec l'ère de Sylla, dont j'ai parlé plus haut, correspond à l'an 175 après J. C.

Le 7 du mois d'Audnaeus est, d'après Ideler [2], le premier décembre. Le nom de ce mois est habituellement remplacé, dans les manuscrits, par celui d'*Audunaeus;* mais comme, jusqu'à présent, on n'a rencontré cette forme dans aucune des inscriptions, d'ailleurs assez nombreuses, où ce mois se trouve signalé, il faut en conclure qu'elle est inexacte.

## III.

Devant la même mosquée Esky-Djamé, sur une pierre assez fruste, on lit les mots suivants :

Αὐ[ρ]ήλι[ο]ς Ἀρτεμίδωρος
ὁ ἀρχίατρος καὶ ἱεροφάν-
της εἱδρύσατο [3].

« Aurélius Artémidore, médecin en chef et hiérophante, s'est érigé (ce monument). »

On sait que, depuis les temps les plus reculés, les médecins avaient habituellement, en Grèce, un caractère sacerdotal. Les médecins les plus renommés étaient des prêtres attachés au culte d'Esculape, comme, par exemple, ceux d'Épidaure et de Cos. Pendant des siècles, l'exercice de leur art ne fut que fort imparfaitement contrôlé par l'État [4]. Cette situation dura jusque sous les premiers empereurs romains. Ce n'est qu'alors que le gouvernement impérial, qui paraît s'être imposé la mission de mettre de l'ordre dans toutes les branches de l'activité humaine, organisa aussi d'une manière durable le service médical et créa l'institution des médecins de l'État, qui devaient passer

[1] Voyez Frantz, *Elementa epigraphices graecae*, p. 331.
[2] *Hand. d. Chronol.*, I, p. 419.
[3] Voyez pl. A, n° III.
[4] Voyez Hermann, *Griech. Alterth.*, III, p. 193.

un examen et s'appelaient *archiatri*. Ces médecins en chef, distribués dans toute l'étendue de l'empire, recevaient des appointements et avaient l'obligation de traiter gratuitement certaines catégories de malades et d'inspecter les médecins ordinaires.

C'est dans cette classe que nous devrons ranger Aurélius Artémidore. Son prénom d'Aurélius paraît indiquer qu'il n'est pas antérieur au siècle des Antonins [1]. En tout cas, on ne peut pas le faire remonter au delà de Néron, qui fut le créateur de l'organisation médicale sous l'empire.

Ce qu'il y a de remarquable dans notre inscription, c'est que le médecin Artémidore y porte aussi le titre d'*hiérophante*. Je crois que cette circonstance nous autorise à conclure que les médecins, même du temps de l'empire, ne cessèrent de conserver en partie leur ancien caractère sacerdotal. Il est probable que beaucoup d'entre eux étaient encore toujours considérés comme des Asclépiades. Il était donc naturel qu'ils fissent en commun des sacrifices à Esculape, et qu'à la tête de leur collége se trouvât l'*archiatrus*, qui occupait ainsi en même temps les fonctions d'hiérophante. Parmi les médailles de la ville d'Acmonie, il s'en trouve une [2] sur le revers de laquelle on voit Esculape, tandis que l'exergue porte les mots suivants : Ἀκμονέων Θεόδοτος ἱεροφάντης. On peut supposer, sans trop de témérité, que ce Théodote était médecin ou serviteur d'Esculape, et qu'à cause de cela même, il portait le titre d'hiérophante.

J'ai traduit le mot εἱδρύσατο par *s'est érigé* et non par *a érigé*, parce que rien ne nous autorise à admettre que la forme moyenne ne conserve pas ici toute sa valeur. — Maintenant quel est le monument que s'est érigé le médecin en chef Artémidore?

Ce ne peut être qu'une statue ou un monument funéraire. Or l'érection d'une statue était un honneur qu'on ne pouvait naturellement pas se décerner soi-même. Conséquemment, s'il avait existé un décret ou une décision quelconque autorisant ou engageant Artémidore à se faire élever une statue, cette décision serait à coup sûr mentionnée dans l'inscription. Comme il n'en

[1] Voyez sur ce point la fin de la note de M. Böckh, relative au n° 3420 du *Corp. insc. graec.*
[2] Voyez Mionnet, *Descr. des méd.*, etc., t. IV, p. 196, n° 6.

est pas ainsi, on ne peut songer raisonnablement qu'à un monument funéraire qu'Artémidore se sera fait construire de son vivant.

Toutefois il convient de faire observer que parmi toutes les formules de ce genre recueillies par Frantz, dans ses *Elementa epigraphices graecae* (p. 341), il n'en est aucune qui renferme le mot εἰδρύσατο, ou, pour parler plus correctement, ἱδρύσατο.

## IV.

Le monument suivant se trouve à Koula, dans la cour d'une maison particulière, habitée par un Grec. Au-dessous d'un bas-relief qui représente un jeune homme à cheval, on lit l'inscription que voici :

> Ἔτους σθ̄, μ[ηνὸς] Ὑπερβερταί-
> ου κ̄, Μηνογᾶς Γλύκωνος
> καὶ Τατίας ἐτείμησαν [Λεύ]-
> κιον τὸν ἑαυτ[ῶ]ν υἱὸν ἥρω[α].
> Χαῖρε [1].

« En l'année 209, le 20 du mois d'Hyperbertaeus, Ménogas (fils) de » Glycon, et Tatias, honorèrent leur fils [Lu]cius, décédé. Adieu. »

Pour ce qui concerne la figure de cavalier dont cette inscription est surmontée, il suffira de rappeler que le cheval est un attribut qu'on rencontre dans un très-grand nombre de monuments figurés, mais sur la signification duquel les maîtres de la science n'ont pas encore pu se mettre d'accord.

Ainsi, tandis que Raoul-Rochette et M. Ph. Lebas y voient la représentation du cheval de la Mort, Letronne et M. Welcker [2] prétendent que c'est l'indication du titre de chevalier que portait le défunt ou son père. Si, comme je suis porté à le croire, cette dernière manière de voir est exacte, Ménogas appartenait à une des premières familles de Coloé, et son père, Glycon, était

[1] Voyez pl. B, nº IV.
[2] *Alte Denkmäler*, II, pp. 233 et suiv.; 257, 261 et suiv.

probablement le stéphanéphore de l'inscription I, ainsi que cela résulte du rapprochement des dates 185 et 209.

Le nom de Ménogas est fort naturel dans une ville où le culte du dieu *Mén* avait une si grande importance. Aussi trouvons-nous les noms de Μηνογενίς et de Μηνόδοτος dans deux autres inscriptions de Koula [1]. La forme abrégée Μηνογᾶς au lieu de Μηνογένης [2] est analogue à celles de Νικομᾶς, de Διομᾶς [3], de Δημοσθᾶς [4] et surtout de Ἑρμογᾶς [5].

Τατίας est un nom de femme, ainsi que le démontre la teneur de l'inscription. La terminaison ιας (accusatif ιαν), comme signe d'un nominatif féminin, est assurément fort étrange; néanmoins, il ne faut pas y voir une erreur de graveur. En effet, on rencontre une terminaison analogue dans une inscription d'Aezani [6], et à propos de cette forme, Frantz rappelle les noms féminins Ἄππης, Τύχης, Τυχικής, Ζωτικής [7]. Il aurait pu y ajouter les nominatifs Τατίας [8] et Ἀμμίας [9].

C'est pour ne pas avoir tenu compte de cette forme, qui désormais ne peut plus être révoquée en doute, que M. Böckh a mal interprété l'inscription 3446 (C. I. G.), où il a pris le nominatif Ἀπφίας pour un génitif. Dans l'inscription 3447, Τατίας est très-probablement aussi un nominatif et non un génitif, comme le pense M. Böckh.

Dans la troisième ligne, j'ai écrit Λούκιον, parce que ce nom se trouve dans l'inscription de Koula, n° 3438, et que les lettres Δ et Ω, marquées comme douteuses dans ma copie, peuvent très-facilement avoir été confondues par moi avec un Λ et un Ο.

[1] *Corp. inscr. graec.*, n^os^ 3441 et 3443.

[2] *Ibid.*, n° 3827 *x*.

[3] *Ibid.*, n° 3827 *bb*.

[4] *Ibid.*, n° 3846 *v*.

[5] *Ibid.*, n° 3865 *o*.

[6] *Corp. inscr. graec.*, n° 3856 *v*. Νάνας [ἑ]αυτῇ.

[7] *Corp. inscr. graec.*, vol. II, p. 1086.

[8] Ce nom se trouve déjà dans le *Corp. inscr. graec.*, aux n^os^ 3827 *y*, 3827 *aa* (Τατίας νύνφη) et 3857 *t*. Frantz écrit Τατιάς avec l'accent sur la dernière syllabe, ce qui me paraît contraire à toute analogie, attendu qu'on ne rencontre nulle part l'accusatif Τατιάδα.

[9] *Corp. inscr. graec.*, n° 3445 *b*. La même forme se trouve encore dans une inscription inédite d'Ushak que je publierai plus tard.

La date de 209 correspond à l'année 125 de l'ère chrétienne; le mois d'Hyperbertaeus comprend, d'après M. Ideler, la fin du mois d'août (depuis le 24) et le commencement de septembre.

## V.

Ce monument se trouve dans la même maison que le précédent. Au-dessous d'un bas-relief qui représente un homme ayant à ses côtés deux figures de femme plus petites que le personnage du milieu, on lit l'inscription suivante [1] :

Νεικηφορὶς Ποσφόρον
τὸν ἄνδρα, Ἡλιοδώρα
τὸν ἀδελφὸν ἐτίμησα[ν].

« Nicéphoris et Héliodora honorèrent (leur) époux et frère. »

Ποσφόρος est probablement une variante barbare de Φωσφόρος. Ce nom, qui est assez souvent appliqué aux dieux et aux déesses de la lumière, n'est employé que très-rarement pour désigner un mortel [2]; mais il n'a rien d'étonnant dans une localité où le culte de la lune jouait un si grand rôle. Le nom d'Héliodora se rattache à la même circonstance.

## VI.

L'inscription suivante que j'ai copiée à Koula est extrêmement fruste. Elle a déjà été publiée par M. Ph. Lebas [3]. Comme ma transcription diffère assez notablement de la sienne, j'ai mis en regard les deux copies qui, comme on le verra, se complètent l'une l'autre [4].

Je renonce à rétablir en entier la première ligne, où je me borne à constater le mot Ἰουλίαν ou Ἰουλιαν[ήν].

[1] Voyez pl. B, n° V.
[2] Voyez *Corp. inscr. graec.*, nos 267 et 284.
[3] *Voyage, etc., inscr.* V, p. 218, n° 705.
[4] Voyez pl. B, n° VI.

La deuxième et la troisième ligne doivent être lues sans doute :

Οὐαλεντίλλαν Ὑπ[ατι]-
κὴν (θυ)γ(α)τ(έρα) Κρίσπ[ου].

Dans la quatrième ligne, je n'essayerai pas de restituer le commencement, qui paraît contenir la suite du nom de Crispus, tandis que la fin ne peut guère être autre chose que ὑπατικ[οῦ]. La cinquième ligne, enfin, me paraît avoir dit que Julia Valentilla, fille de Crispus, avait été de son vivant l'épouse (σύν[βιος]) de.... Le nom d'*Hypaticé* se trouve dans une inscription de Philadelphie [1].

## VII.

Dans la cour de l'école grecque à Koula, on lit :

[Ἔτους] τλγ, μ(ηνὸς) Γορ-
(πιαίου) αι, Γαίος
(Ασκ)ληπιόδω(ρος) [2].

« En l'année 333, le 11 du mois de Gorpiaeus, Gaïus Asclépiodore.... »

Peut-être au lieu de Ἀσκληπιόδωρος, faudrait-il écrire ὁ Ἀσκληπιοδώρου ou Ἀσκληπιόδωρον. L'année 333 correspond à l'an 249 de l'ère chrétienne, et le 11 du mois de Gorpiaeus, au 5 août de notre calendrier. La notation αι au lieu de ια, bien que contraire à l'usage généralement établi, n'est pas cependant sans analogie [3].

[1] Voyez Lebas, *l. l.*, III, p. 211, n° 657.
[2] Voyez pl. C, n° VII.
[3] Voyez Frantz, *Elem. epigr. graec.*, p. 350.

## INSCRIPTIONS DE GOERDIS.

La ville de Goerdis est très-rarement visitée par les touristes, et le seul voyageur qui en ait parlé jusqu'à présent paraît être le major Keppel[1].

M. le colonel Leake, guidé par cet admirable instinct géographique qui le caractérise, avait conclu à l'identité de Goerdis avec la ville de *Julia Gordus*[2] dont nous possédons un assez grand nombre de médailles et qui est mentionnée comme appartenant à l'*éparchie* lydienne par le synecdème d'Hiéroclès[3] et par l'historien Socrate[4].

Toutefois jusqu'ici aucun monument n'était venu confirmer la conjecture de M. Leake. Je suis le premier qui rapporte de Goerdis un certain nombre d'inscriptions, dont deux renferment le nom de *Julia Gordus*. Ainsi l'hypothèse de M. Leake, qui d'ailleurs n'avait point rencontré de contradicteurs, se trouve maintenant définitivement établie.

La ville de Goerdis est située sur le versant d'une colline qui se détache de la chaîne du Temnus et au pied de laquelle coule un des affluents de l'Hermus. C'est à cette rivière, qui jadis s'appelait probablement Hyllus et que lès Turcs distinguent aujourd'hui sous le nom de *Kum-Tchaï*[5], qu'il faut rapporter une des médailles de *Julia Gordus*[6]. Grâce surtout à cette situation, il paraît que la ville de *Julia Gordus* conserva son importance pendant tout le moyen âge. C'est aujourd'hui, je l'ai déjà dit, un des prin-

[1] *Narrative of a journey*, etc., t. II, pp. 273 et suiv.

[2] L. c., *ibid.*

[3] Ed. Wessel., p. 671.

[4] *Hist. eccles.*, VII, ch. 36.

[5] Ce nom ne se trouve pas encore sur les cartes. Je le tiens des habitants mêmes de Goerdis.

[6] Voyez Mionnet, *Descr. des méd.*, t. IV, p. 40, n° 209. Revers : Ἰουλιέων Γορδηνῶν. Fleuve couché, tenant un roseau dans la main droite et une corne d'abondance dans la gauche, appuyée sur une urne.

cipaux centres pour la fabrication des tapis dits de Smyrne. Mais c'est précisément à cause de cet état florissant qu'il ne faut pas s'attendre à trouver à Goerdis beaucoup de restes de l'antiquité. Là, comme ailleurs, on aura démoli peu à peu les anciens monuments, pour en faire des pavements, de la chaux, etc.

Je me suis soigneusement enquis de toutes les ruines qui auraient pu se trouver, soit dans la ville même de Goerdis, soit dans ses environs; mais tout ce que j'ai pu découvrir se borne aux inscriptions suivantes, dont quelques-unes ne manquent pas d'un certain intérêt.

## VIII.

Cette inscription est gravée sur une pierre encastrée dans le mur extérieur d'une mosquée.

[Ἔτ]ους ρ̄ καὶ κᾱ, μη[νὸς] Ξανδικοῦ ᾱ  
[ὁ] δῆμος ὁ Ἰουλιέων Γορ-  
[δη]νῶν καὶ ὁ Λορην[ῶ]ν δῆ-  
μος ἐτίμησαν Νέωνα Μη-  
5 τροφάνου.

—

Μητροφάνης Νέωνα τὸν  
υἱὸν, Ἀπφίας καὶ Μέναν-  
δρος τὸν ἀδελφὸν, Θυνεί-  
της τὸν πενθερίδη, Αλκ[ὴ]  
10 τὸν πρόγονον, Ἀρτεμίδω-  
ρος καὶ Ἀμμίας τὸν ἀδελ-  
φιδοῦν, οἱ συγγενεῖς καὶ  
οἰκέται χρυσῷ στεφάνῳ [1].

« En l'année 121, le 1er du mois de Xandicus, le peuple de *Julia Gordus* » et le peuple de Lora (?) honorèrent Néon, fils de Métrophane.

[1] Voyez pl. C, n° VIII.

» Métrophane à Néon (son) fils, Apfias et Ménandre à (leur) frère, Thy-
» nitès à (son) beau-frère, Alcé à (son) beau-fils, Artémidore et Ammias à
» (leur) cousin, les (autres) parents et les esclaves (à Néon), ont fait hom-
» mage d'une couronne d'or. »

On sait que c'était l'usage en Grèce de couronner les morts [1] et de placer des couronnes de fleurs sur leurs tombeaux [2]. A côté de cet usage, qui était pour ainsi dire général dans toutes les contrées habitées par des Grecs, il en existait un autre, dont nous trouvons surtout des exemples dans les monuments de l'Asie, et qui consistait en ce que le peuple portait un décret, en vertu duquel une couronne pouvait ou devait être placée sur la tête du défunt, lorsque celui-ci avait rendu à l'État des services éminents ou s'était distingué par ses talents et ses vertus. Cette couronne d'or était ensuite déposée sur sa tombe, et l'inscription rappelait cette distinction honorifique [3].

Quelquefois c'était le peuple lui-même qui fournissait la couronne, d'autres fois ce décret n'étant qu'une simple autorisation, les frais de la couronne étaient supportés par les parents ou par les amis du défunt. Ce dernier fait résulte à l'évidence de l'inscription 2814 du *Corp. inscr. graec.* [4]. C'est dans ce sens aussi qu'il faut interpréter la présente inscription.

Il paraît toutefois que ce décret honorifique n'était pas toujours porté immédiatement après le décès. Car il serait difficile d'expliquer comment, par exemple, dans l'inscription 3214 (*Corp. inscr. graec.*), il pourrait être parlé des six couronnes décernées à Nicandre, fils d'Apollonius, par les assemblées du peuple de Smyrne, de Mitylène, d'Érythrée, etc., à moins de supposer que cela ne se fût fait que quelque temps après la mort de Nicandre.

Je crois qu'il faut appliquer la même hypothèse au monument que nous expliquons. Le décret qui honore Néon, fils de Métrophane, a été porté en commun par les habitants de *Julia Gordus* et par les Loréniens, ce qui ne peut guère s'être passé entre l'époque de la mort de Néon et celle de ses funérailles.

[1] Hermann, *Griech. Alterth.*, III, p. 198, 8.
[2] *Ibid.*, p. 206, 34.
[3] Cf. Böckh, *Corp. inscr. graec.*, ad tit. 3216.
[4] Voyez Frantz, *Elem. epigr. graec.*, p. 331, et l'*inscr.* 3220 du *Corp. inscr. graec*

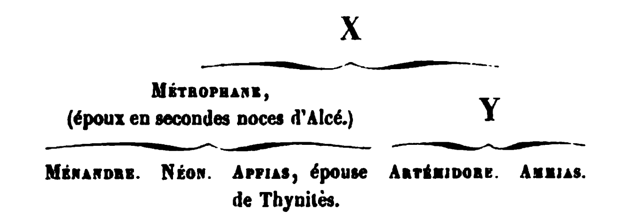
Le premier Xandicus de l'année 121 correspond au 22 février, an 37 de l'ère chrétienne.

Je ne me souviens pas d'avoir vu dans les monuments épigraphiques une forme autre que celle de Ξανδικός, bien qu'il semble que les manuscrits portent parfois Ξανθικός. Si l'on trouve Ζανδικός dans le *Corp. inscr. graec.*, sous les numéros 3443, 3445, 3447 et 3448, il ne faut attribuer cette forme qu'à la circonstance que le major Keppel, à qui nous devons ces inscriptions, ne savait point que le Ξ a très-souvent, sur les monuments de cette époque, une configuration qui le fait ressembler à un Z.

Le dème des Loréniens m'est tout à fait inconnu, et il m'est impossible de déterminer comment s'appelait la ville ou le village qu'ils habitaient.

Le monument porte distinctement Λορηνόν au lieu de Λορηνῶν, ce qui n'est évidemment qu'une faute du graveur.

La table généalogique de Néon me paraît être la suivante :




Apfias peut être un nom de femme[1], et je crois qu'il l'est en effet dans le cas présent. Je crois, en outre, que cette Apfias était l'épouse de Thynitès; car de cette manière on peut expliquer le plus facilement pourquoi celui-ci donne à Néon le titre de πενθερίδης. Bien qu'en effet, le *Thesaurus l. gr.* (éd. de Paris, s. v.) traduise ce mot par celui de *socer*, il résulte des exemples mêmes qu'on y trouve cités qu'en tout cas, cette désignation était aussi parfois appliquée au *beau-frère*. Or je ne doute pas que, pour le monument qui nous occupe, il ne faille également avoir recours à cette dernière signification. Dans l'inscription de Goerdis que nous étudierons ci-après[2], il est certain que πενθερίδης doit se traduire par *beau-frère;* il en est de même pour

[1] Voyez ce que j'ai dit plus haut au sujet de ces noms.

[2] Voyez pl. D, n° IX, *ll.* 12 et 13.

l'inscription 4079 du *Corp. inscr. graec.*, où la forme πενθεριδεύς est substituée à πενθερίδης. J'ajouterai qu'il me parait bien plus naturel de voir dans le mot πενθερίδης une forme patronymique de πενθερός que de considérer ces deux mots comme équivalents; je dirai enfin que la signification de *beau-père,* attribuée à ce mot par le *Thesaurus l. graec.,* me parait extrêmement douteuse. Si donc Thynitès est le beau-frère de Néon, et si Apfias est un nom de femme, n'est-il pas naturel de supposer que Thynitès est l'époux d'Apfias?

Quant à Alcé, elle doit être l'épouse en secondes noces de Métrophane, attendu qu'elle donne à Néon le titre de πρόγονος. Or πρόγονος est, comme le définissent les Grecs eux-mêmes, ὁ πρὸ τοῦ γάμου τῆς μητρυῖας ἐκ προτέρου γεννηθείς.

Le mot συγγενεῖς désigne évidemment les parents de Néon plus éloignés que ceux qui ont été spécifiés précédemment. Le terme οἰκέται, quoiqu'on l'applique parfois à la femme et aux enfants, ne peut signifier ici que les domestiques, les esclaves.

Χρυσῷ στεφάνῳ est dit pour χρ. στ. ἐτίμησαν. C'est une abréviation fort commune au sujet de laquelle il suffit de renvoyer à Frantz, *Elem. epigr. gr.*, p. 330.

Pour ce qui est du nom de Θυνείτης, je crois que jusqu'ici on ne l'a trouvé ni dans aucun auteur, ni dans aucune inscription. Cependant on ne peut pas douter de son existence, et cela d'autant moins qu'il se reproduit plusieurs fois dans l'inscription de Goerdis que je publierai plus loin. Il est d'ailleurs extrêmement difficile de le rattacher à un radical grec. Faudrait-il y voir un dérivé de la forme Θυνός? Cela ne serait point impossible; on sait, en effet, qu'il y avait dans le nord de l'Asie Mineure une peuplade de Thyniens dont le nom se confondit plus tard avec celui des Bithyniens.

## IX.

L'inscription suivante est gravée sur une pierre encastrée dans le mur extérieur d'une mosquée, différente de celle où se trouve le monument précédent.

Ἔτους ρ̄ καὶ ξ̄, μηνὸς Πανέμου δ̄, καὶ μηνὸς
Ὀλώου ια̅, ὁ δῆμος ὁ Ἰουλιέων Γορδηνῶν

ἐτείμησεν Θυνείτην Μητροφάνους
καὶ Μητροφάνην Θυνείτου.

---

5 Ἄμμιον Ἀριστοκλέος Θυνεί-
την τὸν ἄνδρα καὶ Μητροφά-
νην τὸν υἱὸν, Θεότειμος τὸν
πατέρα καὶ τὸν ἀδελφὸν, Παῦλα τὸν
[ἑκυ]ρὸν καὶ τὸν δαέρα, Θυνείτη[ς]
10 τὸν πάππον καὶ τὸν πάτρω[α], Ἀ[μ]
μίας τὸν θρέψαντα καὶ τὸν σύν-
τροφον, Ἀπολλώνιος τὸν πενθ[ε]
ρὸν καὶ τὸν πενθερίδη, καὶ οἱ συν-
γένεῖς ἐτείμησαν Θυνείτην καὶ Μητρο-
15 φάνην.

Χαῖρε [1]

« En l'année 160, le 4 du mois de Panemus et le 11 du mois d'Oloüs,
» le peuple de Julia Gordus honora Thynitès, fils de Métrophane, et Métro-
» phane, fils de Thynitès.

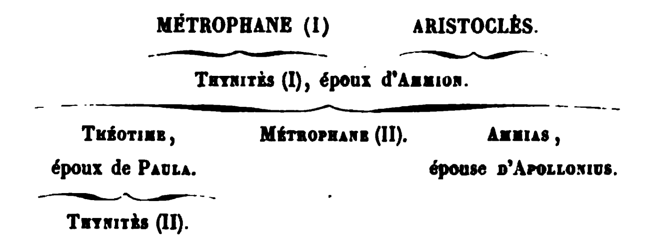
» Ammion, (fille) d'Aristoclès, (honora son) époux Thynitès et (son) fils
» Métrophane; Théotime, (son) père et (son) frère; Paula, (son) beau-père
» et (son) beau-frère; Thynitès, (son) grand-père et (son) oncle; Ammias,
» (son) père nourricier et (son) frère par adoption; Apollonius, (son) beau-
» père et (son) beau-frère; et les (autres) parents honorèrent Thynitès et
» Métrophane. Adieu. »

L'année 160 correspond à l'an 76 de l'ère chrétienne; le 4 du mois de Panemus = le 27 mai, le 11 du mois d'Oloüs = le 6 juillet.

Notre inscription porte clairement Ὀλώου, quoique toutes les autres sources donnent à ce mois le nom de Λῴος.

[1] Voyez pl. D.

La table généalogique de Thynitès et de Métrophane me parait devoir être construite de la manière suivante :




Lignes 8 et 9, au lieu de *τὸν ἑκυρόν*, notre inscription porte distinctement *τὸν υκερον* ou bien *τὸν νυκερον*, en supposant qu'à la fin de la ligne 8, il faille lire non pas *το* mais *τον*. Je ne crois pas cependant que *υκερος* ou *νυκερος* soit un provincialisme : ce n'est, selon toute apparence, qu'une erreur du graveur.

Il est très-probable que Paula a épousé Théotime et que de ce mariage est issu Thynitès (II).

Ligne 10, le mot *πάτρως* que porte ma copie, c'est-à-dire le nominatif pour l'accusatif, doit être attribué également à l'ignorance ou à l'incurie du graveur. Seulement il n'est pas clair s'il faut le remplacer par *πάτρωα* ou par *πάτρωνα*. En effet, comme le fait très-bien observer Frantz [1], le génitif de *πάτρως* est très-souvent *πάτρωνος* dans les inscriptions de cette partie de l'Asie.

Ammias est vraisemblablement la *fille* adoptive de Thynitès (I) et l'épouse d'Apollonius, qui peut donner, de ce chef, à Thynitès (I) et à Métrophane (II) le titre de *πενθερός* et de *πενθερίδης*.

On remarquera que les noms de Métrophane, de Thynitès et d'Ammias sont communs aux inscriptions VIII et IX. Ces deux inscriptions se rapportent donc probablement à des membres de la même famille, peut-être même en partie à des personnes identiques. Ainsi, par exemple, on peut supposer que l'Ammias de l'inscription VIII, dont le père était déjà mort en l'année 37 (après J. C.), a été adopté par le Thynitès (I) de l'inscription IX, et que ce Thynitès est le même que le Thynitès de l'inscription VIII, qui, dans cette hypothèse, après la mort de sa femme Apfias, doit avoir épousé en secondes noces Ammion, fille d'Aristoclès.

[1] *Corp. inscr. graec.*, n° 3850 *b*.

## X.

L'inscription suivante est gravée sur une pierre faisant partie d'une fontaine publique.

Ἔτους σλα, μη[νὸς] Αὐδναίου.

Ἐτείμησεν Ἐπαφρόδ-
ειτος Τοσαγάθην τὴν
ἑαυτοῦ σύμβιον, Ἀριάδνη, Ἐ-
5 παφρόδειτος, Ἀγαθήμερος
τὴν μητέρα. [1]
Χαῖρε.

« En l'année 231, au mois d'Audnaeus, Épaphrodite honora son épouse » Tosagathe; Ariadne, Épaphrodite et Agathémère (honorèrent leur) mère. » Adieu. »

Entre la date et le reste de l'inscription sont gravés : à gauche un panier à ouvrage, à droite un miroir, au milieu une couronne.

Le miroir et le panier sont des symboles très-fréquents de la femme, surtout dans les monuments de cette partie de l'Asie. Le miroir fait allusion au goût de la parure, le panier à l'activité domestique.

L'année 231 correspond à l'an 147 de l'ère chrétienne, le mois d'Audnaeus commence le 24 novembre. Dans la troisième ligne, l'article τήν a été répété par inadvertance. Le nom de Tosagathe ne se trouve pas dans le dictionnaire de Pape.

## XI.

Cette inscription se trouve à côté de la précédente.

Ἔτους τμς, μη[νὸς] Αὐδναί-
ου δ., Αυρ[ήλιος] Στέφανος

[1] Voyez pl. E, n° X.

Ζωσίμου ἐτείμησεν
τὴν ἑαυτοῦ γυναῖκα
5 Αὐρ[ηλίαν] Διονυ[τ]άδα. Πρὸς τὸ
τεθῆναι τὴν Εὐτυχίαν
τὴν ἑαυτῆς μητέρα [1].

« En l'année 346, le 4 du mois d'Audnaeus, Aurélius Stéphanus, (fils)
» de Zosime, honora son épouse Aurélie Dionytas, dont la mère Eutychie
» sera également déposée ici. »

Au-dessus de cette inscription on voit une couronne entre un miroir à droite et un peigne à gauche.

La date de ce monument correspond au 27 novembre de l'année 262 (après J. C.). Le mari et la femme portent l'un et l'autre, comme prénom, le nom de famille des Auréliens, conformément à un usage extrêmement fréquent à partir du siècle des Antonins. Au lieu de Dionytas, le monument porte *Dionyias*. Cette forme ne me paraît point admissible, mais je ne sais s'il la faut remplacer par *Dionysias*, en supposant que le *sigma* a été omis par le graveur, ou si, comme je l'ai fait, il convient de recourir à la forme Διονυτᾶς, gén. Διονυτάδος, qu'on rencontre plusieurs fois dans les inscriptions de Smyrne [2]. Cette dernière hypothèse est la plus simple au point de vue strictement épigraphique; car on peut supposer facilement que la partie supérieure du τ a été effacée; il convient cependant de faire observer que, dans les inscriptions prémentionnées de Smyrne, Διονυτᾶς est toujours un nom d'homme. La formule πρὸς τὸ τεθῆναι est assez insolite; mais le sens n'en saurait être douteux. Elle signifie qu'*après cela* (ensuite), *on placera* (l'infinitif pour le futur ou l'impératif) dans le même sarcophage Eutychie, la mère d'Aurélie. Habituellement πρός est remplacé par μετά [3].

Ἑαυτῆς, au lieu de αὐτῆς, est un barbarisme qui ne doit pas nous surprendre dans une inscription lydienne de l'année 262 après J. C.

[1] Voyez pl. E, n° XI.
[2] *Corp. inscr. graec.*, n° 3141, l. 55, n° 3242. Cf. n° 3137, l. 33.
[3] Voyez *ibid.*, n° 3865 *k*.

## XII.

Le monument suivant se trouve dans une maison particulière habitée par un Grec.

Ἔτους σοα μ[ηνὸς]
Παν- ήμου
Ἐτίμη- σαν Σ[έξτα]
[Φ]αυστῖνα Ἑρμογένη
τὸ[ν] πατέρα, καὶ Γλύκων
ὁ γα[μ]βρὸς, καὶ Νίκη τὸν ἄ[ν]
[δρα] καὶ Ἑρμογένης τὸ(ν) πα-
τέρα.
Χαῖρε [1].

« En l'année 261, au mois de Panémus, Sexta Faustina à (son) père » Hermogène, et Glycon, gendre (d'Hermogène à son beau-père), et Nicé à » (son) époux, et Hermogène à (son) père, rendirent des honneurs. Adieu. »

Entre la deuxième et la troisième ligne de ce monument, on voit un bas-relief représentant une femme voilée, assise dans un fauteuil et devant laquelle un homme se tient debout. Ceci nous prouve qu'il ne faut pas considérer comme absolue la règle établie par Müller [2], d'après laquelle, dans les bas-reliefs funéraires, où la mort est figurée sous la forme d'un adieu, le personnage assis est le défunt et l'autre le survivant. Évidemment la personne qui se tient debout est ici Hermogène.

Le Σ qui se trouve à la fin de la troisième ligne ne peut guère être autre chose qu'une abréviation de Σέξτα [3].

La dénomination de Faustine est empruntée à l'une des deux impératrices de ce nom. On trouve sur une médaille frappée à Goerdis la tête de Faustine mère [4].

[1] Voyez pl. F, n° XII.
[2] *Handbuch der Archaeologie*, 3me éd., p. 758.
[3] Voyez Orelli, *Inscr. lat.*, t. III, n° 6939.
[4] Voyez Mionnet, *Descr. des méd.*, IV, p. 41, n° 213.

Dans la cinquième ligne, τό pour τόν est une abréviation que nous retrouvons à la septième ligne et qui explique pourquoi, au lieu de γαμβρός, notre inscription porte γαβρός.

Les membres de la famille d'Hermogène sont énumérés dans notre monument d'une manière tout à fait insolite; car la femme et le fils du défunt ne sont nommés qu'après sa fille et son gendre.

L'année 261 correspond à l'an 177 après J. C. Le mois de Panémus commençait le 24 mai.

## INSCRIPTIONS D'AKHISSAR (THYATIRE).

### XIII.

L'inscription suivante se trouve dans la cour d'une maison particulière. J'en dois la copie à un de mes compagnons de voyage, M. le professeur Schlottmann.

Ἀγαθῇ τύχῃ.

Ἡ φιλοσέβαστος βουλὴ
καὶ ὁ ἱερώτατος δῆμος
τῆς λαμπροτάτης καὶ δια-
5 σημοτάτης καὶ μεγίστης,
κατὰ τὰς ἱερὰς ἀντιγραφὰς
καὶ κατὰ τὰ δόξαντα καὶ ψη-
φισθέντα ὑπὸ τοῦ λαμπροτά-
του τῆς Ἀσίας ἔθνους, Θυατει-
10 ρηνῶν πόλεως [Μάρκον]
Πωλλιανὸν ἐπώ[νυμον]
ἄρχοντα πρῶτον καὶ
[ἀγωνο]θέ[τ]η[ν] [1].

[1] Voyez pl. F et G, n° XIII.

A la bonne fortune.

« Le sénat ami de César et le très-saint peuple de la ville de Thyatire,
» très-illustre, très-distinguée et très-grande, — conformément aux rescrits
» sacrés et à ce qui a été statué et décrété par la plus illustre nation de l'Asie, —
» (ont honoré) M. Pollianus, premier archonte éponyme et (agonothète). »

La date approximative de ce monument nous est fournie, si je ne me trompe, par le nom de Pollianus, qu'on rencontre cinq fois sur les médailles de Thyatire [1], où il porte constamment le titre de *stratége*. Deux de ces médailles remontent au règne d'Alexandre Sévère, deux autres sont frappées à l'effigie de Julia Mammaea. Or, comme le règne d'Alexandre Sévère est compris entre les années 222-235 après J. C., c'est entre les mêmes limites qu'il convient de placer le monument qui nous occupe.

Il est bien vrai que notre inscription, du moins dans les parties qui nous en restent, ne donne pas à Pollianus le nom de *stratége;* mais, comme il y est désigné sous le titre de *premier archonte éponyme*, rien ne s'oppose à la supposition que la dignité de stratége lui fut accordée plus tôt ou plus tard. Peut-être même remplissait-il ces deux fonctions à la fois. En effet, sur une médaille de Cilbia [2], il est fait mention d'*Apollonidès*, *stratége* et *archonte*.

La coexistence de l'archonte et du stratége, éponymes tous deux, n'a rien qui nous doive étonner, attendu que du temps de l'empire, on rencontre la même chose, par exemple, à Athènes [3].

Qu'il y ait identité entre le Pollianus des médailles et celui de notre inscription, je n'oserais pas l'affirmer d'une manière absolue; mais cette identification me paraît très-plausible, eu égard aux nombreuses médailles de Thyatire qui contiennent des noms de magistrats.

Les mots ἀγαθῇ τύχῃ se trouvent très-fréquemment dans les inscriptions de Thyatire.

Le sénat (βουλή) porte sur notre monument le titre φιλοσέβαστος, comme

[1] Voyez Mionnet, *Descr. des méd.*, etc., t. IV, p. 154, nº 880; p. 172, nºˢ 993 et 994; p. 173, nºˢ 998 et 999.

[2] *Ibid.*, IV, p. 31, nº 159.

[3] Cf. les médailles de Daldis, Mionnet, IV, p. 33 et 34, nº 173; p. 34, nºˢ 174, 177 et 178. Ἐπὶ Ἡρακλείδου στρ. Δαλδιανῶν; — Ἐπ. Λ. Αὐρ. Ἡφαιστίωνος. ἄρχ. α. Δαλδιανῶν.

dans l'inscription de Magnésie, n° 2911 (*Corp. inscr. gr.*). La γερουσία de Tralles est décorée de la même épithète[1].

On remarquera qu'il y a en général dans notre monument un grand luxe de désignations honorifiques. Ainsi l'assemblée du peuple ou le δῆμος, y est qualifié de ἱερώτατος; ainsi encore, au lieu de se contenter de donner à la ville de Thyatire les titres déjà fort pompeux de λαμπροτάτη et de μεγίστη, qu'on remarque également dans d'autres inscriptions de la même cité[2], on s'est complu à y ajouter le mot διασημοτάτη.

Ce qui prouve d'ailleurs que c'est de propos délibéré qu'on insiste sur ces vaines distinctions, c'est la circonstance que, pour justifier le titre de μεγίστη, on s'appuie sur le témoignage des ἱεραὶ ἀντιγραφαί et sur un décret porté par le peuple le plus illustre de l'Asie.

Le mot ἀντιγραφαί n'est, selon toute probabilité, que la traduction du latin *rescripta*, et ces *rescrits sacrés* sont sans doute la réponse ou les différentes réponses officielles faites par l'empereur relativement aux titres dont pouvait se décorer la ville de Thyatire. On sait, par Dion Chrysostôme[3], combien était grande la rivalité des principales villes d'Asie, par rapport à la qualification de πρώτη, de μητρόπολις, etc.[4], et l'on comprend aisément que la politique romaine trouvait son profit à distribuer habilement ses *hochets*, comme les qualifie à juste titre l'écrivain précité.

Ces désignations pompeuses, ou du moins quelques-unes d'entre elles, avaient aussi été attribuées à la ville de Thyatire par les décrets *du peuple le plus illustre de l'Asie* (τοῦ λαμπροτάτου τῆς Ἀσίας ἔθνους). Ces derniers mots se rapportent-ils à l'assemblée du peuple d'une ville importante? et, s'il en est ainsi, quel est le nom de cette ville?

Le titre de πρώτη est donné, en Asie, aux villes de Pergame, d'Éphèse et de Smyrne[5], mais c'est notamment Éphèse qui paraît avoir été la véritable capitale de la province d'Asie[6].

[1] Voyez *Corp. inscr. graec.*, n° 2931.
[2] *Ibid.*, n$^{os}$ 3483, 3504 et 3505.
[3] *Orat.* 38, vol. II, pp. 141, 144 et 148 (édit. de Reiske).
[4] Voyez Becker-Marquardt, *Handb. der Roem. Alterth.*, t. III, p. 140.
[5] *Ibid.*, p. 139.
[6] *Ibid.*

D'après notre première hypothèse, c'est donc à un décret de cette ville que fait très-probablement allusion le monument de Thyatire.

Mais peut-être faut-il voir plutôt dans les termes dont nous cherchons l'explication la mention d'une décision officielle prise par le κοινὸν Ἀσίας, c'est-à-dire par cette commission qui était chargée de l'organisation des fêtes célébrées en commun par les villes grecques de l'Asie [1] et dont les membres paraissent avoir porté le titre de οἱ ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλληνες [2]. Dans cette seconde hypothèse, que je crois préférable à la première, le λαμπρότατον τῆς Ἀσίας ἔθνος représente les Grecs de l'Asie.

Le stratége Pollianus porte sur les médailles le prénom de Marcus : c'est ce qui justifie la manière dont j'ai rempli la lacune de la dixième ligne.

Dans la treizième ligne, j'ai écrit (ἀγωνο)θε(τ)η(ν), parce que la dignité d'agonothète paraît avoir été, à Thyatire, une espèce de charge officielle [3], et que ce supplément nous est en quelque sorte commandé par des considérations d'un ordre purement matériel qu'il serait trop long de développer.

## XIV.

L'inscription suivante a été copiée dans la maison d'un iman. Elle est gravée au-dessous de l'image d'un aigle.

Μοσχιανὸς Βασσιαν[ὸς]
Θεῷ ὑψίστῳ εὐχήν [4].

« Moschianus Bassianus au Dieu suprême (a consacré) cet *ex-voto.* »

On trouve plusieurs fois sur les médailles de Thyatire le nom d'un Moschianus qui remplissait les fonctions de stratége du temps de Commode [5]. Le surnom de Bassianus paraît avoir été emprunté à l'un des deux em-

[1] Cf. Becker-Marquardt, *Handb.*, p. 140.
[2] Ils sont mentionnés au n° 3487 du *Corp. inscr. graec.*
[3] Voyez *Corp. inscr. graec.*, n° 3478 : Ἡφαιστίων Ἀπολλοδώρου ἀγ[ω]νοθέτης Θυατειρηνῶν ἀνέθηκεν.
[4] Voyez pl. G, n° XIV.
[5] Voyez Mionnet, *Descr.*, etc., IV, p. 162, n°s 926, 927 et 928.

pereurs Caracalla et Héliogabale qui, comme on sait, portaient d'abord le même nom[1].

Les mots θεῷ ὑψίστῳ semblent difficilement pouvoir s'appliquer à un dieu du paganisme, tandis qu'il n'y aurait rien d'étonnant à ce que, dans une ville où le christianisme s'introduisit de bonne heure, on les eût employés pour désigner le Dieu des chrétiens. Néanmoins, comme l'inscription dont nous nous occupons est gravée au-dessous d'un aigle, nous sommes forcé d'y voir une désignation assez étrange, il est vrai, de Jupiter, qu'il faut rapporter probablement à cette tendance, déjà signalée plusieurs fois, du paganisme mourant de revenir peu à peu au culte d'un seul Dieu.

## XV.

L'inscription suivante a déjà été publiée par M. Böckh, sous le n° 3487 du *Corp. inscr. graec.;* mais comme ma copie est plus exacte que celles dont s'est servi le célèbre épigraphiste de Berlin, et comme c'est précisément le point capital que ma transcription rectifie, il me sera permis d'en remettre l'ensemble sous les yeux de l'Académie.

ον του

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

. . . . . . . . .

5 του

ως ἀναστρα-

[α]ὐτοῦ τὸ φιλότειμο[ν]

περὶ τὴν Ἀσίαν

[1] Il est curieux d'observer dans les inscriptions comment, à l'avénement d'un nouvel empereur, on voit tout à coup son nom devenir presque universel. Il ne m'est pas encore démontré jusqu'ici que toutes les personnes portant un nom d'empereur doivent être rangées nécessairement dans la classe des affranchis.

[2] On trouve quelquefois la dénomination de Ζεὺς ὕψιστος.

(δ)ασμὸν γενέσθαι λεια [1]
10 ἐν[α]νχο[ς] ὑφ' αὐτοῦ [πρ]εσ[βεία]
[ὑπὲρ] τῆς Ἀσίας τελεσθεῖσ[α]
[πρὸς τ]ὸ[ν] Αὐτοκράτορα — ψηφίσμα-
[:ι τῷ ὑπ]ογεγραμμένῳ — [2] Ἔδοξε
τοῖς ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλλησιν. Γ[νώ]-
15 μη Τι. Κλαυδίου [3] Λούππου αρχιερ-
[έω]ς [4]. Ἐπεὶ Κλαύδιος Ἀμφίμαχος ἀ[εὶ]
βίον ἐζηκὼς [5] ἀνεπίληπτον [καὶ] ἐ[ν]
[πᾶσι]ν ἐπίσημον, καὶ τὰς τῆς πατρίδος
ἐκ[τ]ενῶς πεπληρωκὼς λειτουργία[ς]
20 ἐν τῇ ἀναγκαιοτάτῃ χρείᾳ τῆς ἐπα[ρχί]
ας [6] ἑαυτὸν ἐπέδωκεν τοῖς ἀ[ρ]ίσ[τ]ο[ις]
συμπρεσβεύσαντα ὑπὲρ τῆς εικοσ-
τῆς [7] καθ' ἑκούσιον αἵρεσιν, δεδόχθαι [ἀν]-
ασταθῆναι [8] αὐτοῦ τειμὰς ἐν τῷ ἐπι-

[1] Voici le texte des dix premières lignes d'après M. Böckh :

. . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . .
. . . . . νεαι . . . . .
. . . . . α.. ει τον
5 . . . . . ως ανασ[τ]α . . . . . .
. . αὐτοῦ τὸ φ[ιλ]οτειμ[εῖσθαι
. . τῆς περὶ τὴν Ἀσίαν
. . ον [γ]ε[ν]έσθαι δικα[στήν...ε
10 . . να]νχος ἀφ' αὐτοῦ πρεσ[βεία.... ὑπ-

[2] Böckh : ψηφίσμα[τι τῷ οὑ]τω γεγραμμένῳ.

[3] *Ibid.* : Ἕλλησιν ἐν [κοινῷ, Κλαυ]δίου.

[4] *Ibid.* : ἀρχιερ[έως Ἀσία]ς.

[5] *Ibid.* : Ἐ[π]ει[δὴ] Κλαύδιος Ἀμφίμαχος ἀ[ρχὴ]ν ἠ[ρχ]ὼς.

[6] *Ibid.* : χρείᾳ τ[ῆ]ς [Ἀσίας].

[7] *Ibid.* : ὑπὲρ τῆς ἐν[δείας αὐ]τῆς.

[8] *Ibid.* : δεδόχθαι αὐ[τοῖς] ἀνασταθῆναι.

25 *σημοτάτω τῆς πατρίδος τόπῳ*
*πεμφθῆναι δὲ καὶ πρὸς Θυατειρη-*
*νοὺς τοῦδε τοῦ ψηφίσματος τὸ*
*ἀντίγραφον ἵνα γεινόσχῃ ἡ πόλις*
*ὅτι κατὰ κοινὸν οἶδεν ἡ Ἀσία τοὺς (εὖ)*
30 *ποιοῦντας αὐτὴν ἀμείβεσθαι. —*
*Δεδόχθαι τοῖς ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλλη-*
*σιν γενέσθαι κα(θ)ότι προγέγραπται. —*

Ligne 10. — « Immédiatement sous sa conduite, une ambassade relative à » l'Asie — députée vers l'empereur — par un décret conçu en ces termes : —

» Arrêté porté par les Grecs préposés à l'Asie :

» (Sur la) proposition du grand prêtre Tib. Claudius Luppus, (proposition » dont voici la teneur) :

» *Considérant que Claudius Amphimaque, après avoir mené une existence constamment irréprochable et à tous égards distinguée, et après s'être acquitté généreusement des charges que lui imposait sa patrie, s'est associé volontairement à la commission des notables, députés au sujet du vingtième, alors que la province se trouvait dans une très-grande détresse,*

» *Il est arrêté :*

» *Qu'un monument honorifique lui sera érigé à l'endroit le plus fréquenté de sa ville natale,*

» *Et qu'une copie de ce décret sera envoyée aux habitants de Thyatire, pour faire connaître à cette ville que l'Asie tout entière sait reconnaître les services qu'on lui rend.*

» Il est arrêté par les Grecs préposés à l'Asie qu'il en sera fait conformément à la proposition transcrite ci-dessus. »

Les deux signes supérieurs [1] ne paraissent être qu'une partie de l'orne-

[1] Voyez pl. G, n° XV.

mentation dont se composait l'encadrement du décret. Les syllabes *ον των* sont écrites en caractères plus grands que le reste de l'inscription, d'où il résulte que c'est une portion de l'en-tête[1], et qu'il n'y a que trois lignes qui aient complétement disparu[2].

Pas plus que M. Böckh, je ne me hasarderai à reconstruire le commencement de ce décret : ce n'est qu'à partir de la huitième ligne qu'on peut arriver à des résultats satisfaisants.

En effet, les lignes 8, 9, 10 et 11, mises en rapport avec les lignes 21, 22 et 23, nous autorisent à conclure qu'il s'agissait, pour la province d'Asie, de payer un certain impôt d'un *vingtième*, et qu'à propos de cet impôt, une commission, à laquelle s'associa spontanément Amphimaque de Thyatire, fut envoyée en députation à l'empereur.

Cela étant, il est fort possible que, dans la huitième ligne, la syllabe *της*[3] soit le reste de *τῆς εἰκοστῆς*.

Dans la neuvième ligne, il me paraît certain que *ασμον* doit être changé en *δασμόν*.

Quant à la fin de cette même ligne et au commencement de la dixième, je ne crois pas qu'il faille lire avec M. Böckh *δικαστήν*. On pourrait, avec une plus grande apparence de raison, substituer à ce mot celui de *δεκάτην* ou de *δεκαετῆ*, ou quelque chose de pareil; mais j'avoue que jusqu'ici, je n'ai trouvé aucune restitution qui me semble concluante.

Plus loin (ligne 10), *ὑφ' αὐτοῦ* doit être maintenu. La leçon *ἀφ' αὑτοῦ*, adoptée par M. Böckh, me paraît à peine défendable. Je ne crois pas non plus que ces mots doivent être expliqués, comme le pense le même savant, par *καθ' ἑκούσιον αἵρεσιν* (voy. ligne 23). Ils indiquent, d'après moi, que la députation envoyée à l'empereur fut *présidée* par Claudius Amphimaque[4].

Ligne 13, je lis, non pas avec M. Böckh : *τῷ οὕτω γεγραμμένῳ*, mais *τῷ ὑπογεγραμμένῳ*, ce qui se rapproche davantage et de ma copie et de l'usage habituel.

[1] Voyez Frantz, *Elem. epig. gr.*, p. 317, et *Corp. inscr. graec.*, n° 3067.
[2] Ou même seulement deux, en tenant compte des copies consultées par M. Böckh.
[3] Voyez les copies de M. Böckh.
[4] Cf. *Corp. inscr. graec.*, n° 3069, l. 7 : *τῶν ὑφ' ἑαυτοῦ συνηγμένων καὶ κειμένων*.

Lignes 14 et 15, ma copie fournit la véritable leçon : γνώμη Τι. Κλαυδίου, au lieu de ἐν κοινῷ Κλαυδίου, comme le porte le texte de M. Böckh[1].

Lignes 16 et 17, au lieu de ἀ[ρχὴ]ν ἡ[ρχ]ώς, c'est-à-dire au lieu de la conjecture de Franck, adoptée par M. Böckh, bien que celui-ci la considère comme fort douteuse, ma copie donne encore une fois la seule leçon admissible : ἀ [εἰ] βίον ἐζηκώς.

Ligne 20, il n'y a pas de doute qu'il ne faille lire ἐπαρχίας ou ἐπαρχείας au lieu de Ἀσίας.

Ligne 21, le mot ἀρίστοις, qui paraissait douteux à M. Böckh, est rendu certain par ma copie.

Lignes 22 et 23, ma transcription porte clairement ὑπὲρ τῆς εἰκοστῆς.

C'est ici le point capital de toute l'inscription, mais l'interprétation en est fort difficile.

Εἰκοστή est évidemment le nom d'un impôt ou d'une contribution. Mais de quel impôt d'un vingtième peut-il être question?

Nous connaissons la *vicesima haereditatium* et la *vicesima manumissionum*. Cette dernière, qui existait déjà en l'année 357 avant J. C. et qui fut prélevée plus tard dans toute l'étendue de l'empire[2], était un impôt qui ne frappait que le luxe. On conçoit difficilement que les membres du κοινόν[3] aient réclamé l'abolition ou la diminution de cet impôt en se fondant sur les malheurs de la province (ἐν τῇ ἀναγκαιοτάτῃ χρείᾳ τῆς ἐπαρχίας).

La même observation s'applique en partie à la *vicesima haereditatium*. En effet, cet impôt ne frappait que les héritages de cent mille sesterces au moins, et, en outre, les plus proches parents en étaient exemptés[4]. D'ailleurs cette contribution n'était applicable qu'aux seuls citoyens romains[5], et même, en admettant qu'il y en eût un grand nombre dans la province d'Asie, on a de la peine à comprendre comment une commission dont les membres s'appelaient οἱ ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλληνες et qui devait naturellement veiller avant tout

[1] Cf. *Corp. inscr. graec.*, n° 3957, col. II, l. 3 : Ἔδοξεν τοῖς ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλλησιν· γνώμη τοῦ ἀρ[γυροταμίου] κ. τ. λ.

[2] Voyez Becker-Marquardt, *Handb.*, etc., III, 2, p. 210.

[3] Cf. ce que j'ai dit plus haut au sujet de ce κοινόν.

[4] Voyez Becker-Marquardt, *l. l.*, III, 2, p. 195.

[5] Bachofen, *Ausgewählte Lehren des römischen Civilrechts*, p. 333.

aux intérêts des Grecs de l'Asie, aurait pu convenablement décerner des distinctions honorifiques à Claudius Amphimaque, si celui-ci s'était adjoint à une députation ayant en vue exclusivement les citoyens romains établis en Asie.

On peut toutefois échapper à cette dernière difficulté, en supposant notre inscription postérieure à l'édit de Caracalla, en vertu duquel le droit de cité romaine fut attribué indistinctement à tous les habitants de l'empire [1].

Cette supposition qui, comme telle, n'énonce qu'une simple possibilité, acquiert un certain degré de probabilité, si l'on prend en considération le fait suivant.

Le nom d'Amphimaque se trouve encore dans une autre inscription de Thyatire [2], où il est question de sa fille *Julia Severina Stratonice*. Or si c'est le même Amphimaque que mentionnent les deux monuments [3], et si, d'autre part, comme il est permis de le croire, *Severina* a été ainsi appelée d'après l'impératrice du même nom, c'est-à-dire d'après l'épouse d'Aurélien [4], nous sommes presque nécessairement amené à conclure que l'ambassade présidée par Amphimaque est postérieure à l'édit de Caracalla.

Si l'on admet cette série d'hypothèses et si l'on tient compte, en outre, de la circonstance que les formalités qui accompagnaient le payement de la *vicesima haereditatium* étaient parfois extrêmement vexatoires [5], on comprend qu'il se soit élevé de ce chef des plaintes et des réclamations.

Quoi qu'il en soit, il se pourrait aussi que l'impôt du vingtième, mentionné dans l'inscription de Thyatire, fût non pas la *vicesima haereditatium*, mais une contribution indirecte, telle, par exemple, que le *portorium*, qui frappait indistinctement toutes les classes de citoyens. On sait en effet que le *portorium* existait en Asie sous l'empire [6] et qu'il faut comprendre sous ce nom non-seulement les droits d'entrée et de sortie prélevés dans les ports, mais, d'une manière plus générale, les droits qu'on payait sur les ponts, les grandes

[1] Voyez Bachofen, *l. l.*, p. 394.
[2] *Corp. inscr. graec.*, n° 3488.
[3] Telle est l'opinion de M. Böckh.
[4] Cf. Orelli, *Inscr. lat.*, n° 1032.
[5] Cf. Bachofen, *l. l.*, pp. 342, 347 et 394.
[6] Becker-Marquardt, *Handb.*, etc., III, 2, 207.

routes, les canaux et les fleuves[1]. Il est vrai que cette taxe ne s'élevait en général qu'à 2 ½ % (*quadragesima*) et qu'elle ne s'appliquait qu'aux articles commerciaux; mais en Sicile, du temps de la république, elle était de 5 % (*vicesima*)[2]. Il se pourrait donc qu'en Asie, la *quadragesima* eût été changée passagèrement en *vicesima*, ce qui aurait certes entravé fortement les opérations commerciales, surtout à une époque de crise.

Je sais très-bien que tout cela est fort conjectural; mais en l'absence d'une solution claire et définitive, il faut du moins épuiser les différentes hypothèses qui pourraient conduire à des conclusions plus certaines.

C'est pourquoi je me permettrai d'appeler encore l'attention de la classe sur le point suivant. Ne se pourrait-il pas que les mots καθ' ἑκούσιον αἵρεσιν, au lieu de se rapporter à Amphimaque, qui se serait adjoint *volontairement* aux députés de l'Asie, ne fussent qu'une qualification de l'impôt du vingtième? Ce serait alors une *contribution volontaire*, votée, par exemple, par les membres du κοινόν pour l'érection d'un temple ou de quelque autre construction importante, et dont le payement, dans un moment de détresse générale, serait devenu une charge particulièrement onéreuse.

Lignes 23 et 24, il faut lire δεδόχθαι (ἀν)ασταθῆναι et non avec M. Böckh : δεδόχθαι (αὐτοῖς ἀν)ασταθῆναι. Car de cette manière il y aurait, d'abord, dans la ligne 23 un nombre de lettres beaucoup trop considérable, ensuite αὐτοῖς ne se rapporterait à rien. Cet αὐτοῖς ne serait admissible qu'au cas où les mots Ἐπεὶ Κλαύδιος jusqu'à ἀμείβεσθαι fussent les termes mêmes du décret. Mais comme, en vertu de ma restitution des lignes 14 et 15, nous voyons qu'ils ne contiennent que le projet de décret formulé par Tib. Claudius Luppus, il est impossible de mettre αὐτοῖς en rapport avec τοῖς ἐπὶ τῆς Ἀσίας Ἕλλησιν de la ligne 14.

Cette remarque suffit en même temps pour prouver que M. Böckh s'est trompé sur la manière dont ce décret est conçu : *Forma decreti*, dit-il, *paulo insolentior est*. En effet, il suppose qu'une personne dont le nom se trouvait dans les lignes qui manquent au commencement (*unus aliquis*) avait proposé aux membres du κοινόν de porter un décret commençant par ἔδοξε et finissant

[1] Voyez Becker-Marquardt, *Handb.*, pp. 157 et 158.
[2] Cf. *Cic. Verr.*, II, 75, 185.

par ἀμείβεσθαι, et que c'est là l'ensemble du décret ratifié par les mots δεδόχθαι-προγέγραπται (lignes 31 et 32.)

Il résulte de ce que j'ai dit précédemment que cet *unus aliquis* n'est autre que Tib. Claudius Luppus et que le δεδόχθαι de la ligne 31 n'est applicable qu'aux mots ἐπεὶ Κλαύδιος-ἀμείβεσθαι. Le décret relatif à Claudius Amphimaque est donc en parfaite harmonie avec le formulaire habituel.

FIN.

I

ΕΤΟΥΣ ΡΠΕ-ΜΗ-ΔΑΙΣΙΟΥ-Α-ΕΠΙΣΤΕΦΑΝΗ
ΦΟΡΟΥΓΛΥΚΩΝΟΣΗΚΟΛΟΗΝΩΝΚΑΤΟΙΚΙΑΚΑ
ΘΙΕΡΩΣΑΝΔΙΑΣΑΒΑΖΙΟΝΕΠΙΙΕΡΕΩΝΑΠΟΛ
ΛΩΝΙΟΥΤΟΥΙΟΛΛΑΚΑΙΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥΤΟΥΔΑΙΠ
5 ΠΟΥΑΙΣΩΠΟΥΚΑΙΜΗΤΡΑΑΣΚΛΗΠΙΑΔΟΥΚΑΙ
-ΜΙΔΩΡΟΥΚΛΕΩΝΟΣΚΑΙΚΛΕΩΝΟΣΜΕ
ΤΟΜΩΝΙΟΥΔΙΩΝΟΣΚΑΙΑ

II

ΔΙΑΚΤΗΣΙΟΝΤΑΤΙΑ
ΠΑΠΙΑΝΤΟΝΕΑΥΤΗΣ
ΑΝΔΡΑΤΕΙΜΟΚΡΑΤΗΝ
ΤΟΝΠΑΤΕΡΑΚΑΡΠΟΦΟ
5 ΡΟΣΤΟΝΟΘΡΕΨΑΝΤΑ
ΚΑΤΕΙΕΡΩΣΑΝϚ
ΕΤΟΥΣ ΣΟΑ ΜΗ
ΑΥΔΝΑΙΟΥ Η

III

ΑΥΡΗΛΙΟΣΑΡΤΕΜΙΔΩΡΟΣ
ΟΑΡΧΙΑΤΡΟΣΚΑΙΙΕΡΟΦΑΝ
ΤΗΣΕΙΔΡΥΣΑΤΟ

IV.

ΕΤΟΥΣ-ΣΘ-Μ-ΥΠΕΡΒΕΡΤΑΙ
ΟΥ-Κ-ΜΗΝΟΓΑΣΓΛΥΚΩΝΟΣ
ΚΑΙΤΑΤΙΑΣΕΤΕΙΜΗΣΑΝΔΩ[1]
ΚΙΟΝΙΟΝΕΑΥΤ ΝΥΙΟΝΗΡΩ
ΧΑΙΡΕ

[1] Ces deux lettres sont douteuses.

V.

ΝΕΙΚΗΦΟΡΙΣ ΠΟΣΦΟΡΟΝ
ΤΟΝΑΝΔΡΑΗΛΙΟΔΩΡΑ
ΤΟΝΑΔΕΛΦΟΝΕΤΕΙΜΗΣΑ

VI.

| Copie de M. Le Bas | | Ma copie. |
|---|---|---|
| ΚΟΥΡΙΟΝ Ι ΘΥΜΙΑΜ | 1 | ΚΟΥΡ ΙΟΥΛΙΑΝ |
| ΟΥΛΛΟΝ ΤΙΛΛΑ ΥΠ | 2 | ΟΥΑΛЄΝΤΙΛΛΑΝΥΠ |
| ΚΗΙ ΓΛΤΟΙΛΚΡΙΟΠ | 3 | ΚΗΝ ΓΛΤ Ι ΚΡΙϹΠ |
| ΚΑΙΜΝΟΥϹ ΥΠΑΤΗΝ | 4 | ΚΑ/ΝVϹ ΥΠΑΤΙΚ |
| ΛΛΟΥ | 5 | [2]ϹΥΝ ΛΟΥ |

[2] Cette lettre est douteuse.

ΤΛΓ Μ̊ ΓΟΡ
Α̅Ι ΓΑΙΟϹ
ΛΗΠΙΟΔω

VIII

ΟΥΣ Ρ̅ΚΑΙΚ̅Α̅ Μ̊ΞΑΝΔΙΚΟΥΑ̅
ΔΗΜΟΣΟΙΟΥΛΕΩΝΓΟΡ
ΙΩΝΚΑΙΟΛΟΡΗΝΟΝΔΗ
ΜΟΣΕΤΙΜΗΣΑΝΝΕΩΝΑΜΗ
5 ΤΡΟΦΑΝΟΥ

ΜΗΤΡΟΦΑΝΗΣΝΕΩΝΑΤΟΝ
ΥΙΟΝΑΠΦΙΑΣΚΑΙΜΕΝΑΝ
ΔΡΟΣΤΟΝΑΔΕΛΦΟΝΘΥΝΕΙ
ΤΗΣΤΟΝΠΕΝΘΕΡΙΔΗΑΛΚΗ
10 ΤΟΝΠΡΟΓΟΝΟΝΑΡΤΕΜΙΔΩ
ΡΟΣΚΑΙΑΜΜΙΑΣΤΟΝΑΔΕΛ
ΦΙΔΟΥΝΟΙΣΥΝΓΕΝΕΙΣΚΑΙ
ΟΙΚΕΤΑΙΧΡΥΣΩΣΤΕΦΑΝΩ

IX.

ΕΤΟΥΣ ΡΚΑΙ Ξ ΜΗΝΟΣ ΠΑΝΗΜΟΥ Δ ΚΑΙ ΜΗΝΟΣ
ΟΛΩΟΥ Γ ΑΟΔΗΜΟΣΟΙΟΥΛΕΩΝΓΟΡΔΗΝΩΝ
ΕΤΕΙΜΗΣΕΝΘΥΝΕΙΤΗΝΜΗΤΡΟΦΑΝΟΥΣ
ΚΑΙΜΗΤΡΟΦΑΝΗΝΘΥΝΕΙΤΟΥ

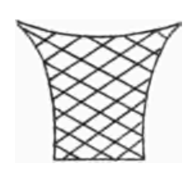


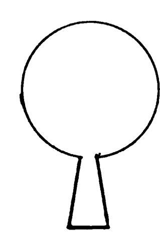
5 ΑΜΜΙΟΝΑΡΙΣΤΟΚΛΕΟΣΘΥΝΕΙ
ΤΗΝΤΟΝΑΝΔΡΑΚΑΙΜΗΤΡΟΦΑ
ΝΗΝΤΟΝΥΙΟΝΘΕΟΤΕΙΜΟΣΤΟΝ
ΠΑΤΕΡΑΚΑΙΤΟΝΑΔΕΛΦΟΝΠΑΥΛΑΤΟ
ΝΥΚΕΡΟΝΚΑΙΤΟΝΔΑΕΡΑΘΥΝΕΙΤΗ
10 ΤΟΝΠΑΠΠΟΝΚΑΙΤΟΝΠΑΤΡΩΣΑΛ
ΜΙΑΣΤΟΝΘΡΕΨΑΝΤΑΚΑΙΤΟΝΣΥΝ
ΤΡΟΦΟΝΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣΤΟΝΠΕΝΘΙ
ΡΟΝΚΑΙΤΟΝΠΕΝΘΕΡΙΔΗΚΑΙΟΙΣΥΝ
ΓΕΝΕΙΣΕΤΕΙΜΗΣΑΝΘΥΝΕΙΤΗΝΚΑΙΜΗ
15 ΤΡΟΦΑΝΗΝ

ΧΑΙΡΕ

X

ΕΤΟΥΣ ΣΛΑ Μ^Η ΑΥΔΝΑΙΟΥ

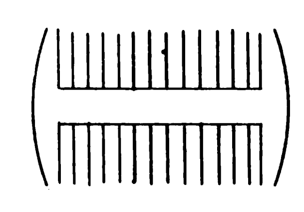
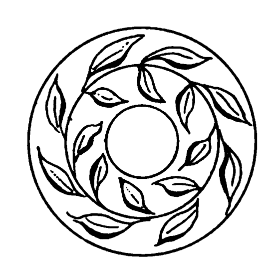
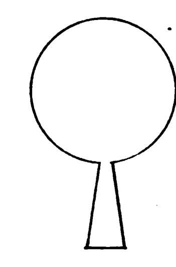




ΕΤΕΙΜΗΣΕΝΕΠΑΦΡΟΔ
ΕΙΤΟΣ ΤΟΣΑΓΑΘΗΝΤΗΝΤΗΝ
ΕΑΥΤΟΥΣΥΜΒΙΟΝΑΡΙΑΔΝΗΕ
5 ΠΑΦΡΟΔΕΙΤΟΣΑΓΑΘΗΜΕΡΟΣ
ΤΗΝΜΗΤΕΡΑ

ΧΑΙΡΕ

XI.

ΕΤΟΥϹ ΤΜϚ Μ^Η ΑΥΔΝΑΙ
ΟΥΔ ΑΥΡ' ϹΤΕΦΑΝΟϹ
ΖΩϹΙΜΟΥΕΤΕΙΜΗϹΕΝ
ΤΗΝΕΑΥΤΟΥΓΥΝΑΙΚΑ
5 ΑΥΡ' ΔΙΟΝΥΙΑΔΑΠΡΟϹΤΟ
ΤΕΘΗΝΑΙΤΗΝΕΥΤΥΧΙΑΝ
ΤΗΝΕΑΥΤΗϹΜΗΤΕΡΑ

XII

ΕΤΟΥΣ ΣΟΑΜ
ΠΑΝ ΗΜΟΥ

*BAS - RELIEF*

ΕΤΙΜΗ ΣΑΝΣ
ΙΑΥΣΤΙΝΑΕΡΜΟΓΕΝΗ
5 ΤΟΠΑΤΕΡΑΚΑΙΓΛΥΚΩΝ
ΟΓΑΒΡΟΣΚΑΙΝΙΚΗΤΟΝΑΝ
ΚΑΙΕΡΜΟΓΕΝΗΣΤΟΠΑ
ΤΕΡΑ

ΧΑΙΡΕ

XIII

ΑΓΑΘΗΙΤΥΧΗΙ

ΗΦΙΛΟΣΕΒΑΣΤΟΣΒΟΥΛΗ
ΚΑΙΟΙΕΡΩΤΑΤΟΣΔΗΜΟΣ
ΤΗΣΛΑΜΠΡΟΤΑΤΗΣΚΑΙΔΙΑ
5 ΣΗΜΟΤΑΤΗΣΚΑΙΜΕΓΙΣΤΗΣ
ΚΛΤΑΤΑΣΙΕΡΑΣΑΝΤΙΓΡΑΦΑΣ
ΚΑΙΚΑΤΑΤΑΔΟΞΑΝΤΑΚΑΙΨΗ

ΦΙΣΘΕΝΤΑΥΠΟΤΟΥΛΑΜΠΡΟΤΑ
ΤΟΥΤΗΣΑΣΙΑΣΕΘΝΟΥΣΘΥΑΤΕΙ
10 ΡΗΝΩΝΠΟΛΕΩΣΛ[1] ░░░░
ΠΩΛΛΙΑΝΟΝΕΠΩ[1]
ΑΡΧΟΝΤΑΠΡΩΤΟΝΚΑΙ
░░░░ΘΕΙΗ░

1) Ces lettres sont douteuses.

XIV

ΜΟCΧΙΑΝΟCΒΑCCΙΑΝ░░
ΘЄѠΥΨΙCΤѠЄΥΧΗΝ

XV.

Ο Ο
ΟΝΤΟΝ-

5 ΤΟΥ
ΩΣΑΝΑΣΤΡΑ-
ΛΥΤΟΥΤΟΦΙΛΟΤΕΙΜΟ░
ΠΕΡΙΤΗΝΑΣΙΑΝ
ΑΣΜΟΝΓΕΝΕΣΘΑΙΛΙΚΑ
10 ΕΝ░ΝΧΟ░ΥΦΑΥΤΟΥΙΙΙΕΣ

ΤΗΣΑΣΙΑΣΤΕΛΕΣΘΕΙΣΑ
ΟΑΥΤΟΚΡΑΤΟΡΑ-ΨΗΦΙΣΜΑ
ΟΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩ-ΕΔΟΞΕ
ΤΟΙΣΕΠΙΤΗΣΑΣΙΑΣΕΛΛΗΣΙΝΓΙΙΟ
15 ΜΗΤΙΚΛΑΥΔΙΟΥΛΟΥΠΠΟΥΑΡΧΙΕΡ
ΣΕΠΕΙΚΛΑΥΔΙΟΣΑΜΦΙΜΑΧΟΣΑ
ΒΙΟΝΕΖΗΚΩΣΑΝΕΠΙΛΗΠΤΟΝ Ε
ΝΕΠΙΣΗΜΟΝΚΑΙΤΑΣΤΗΣΠΑΤΡΙΔΟΣ
ΕΚΙΕΝΩΣΠΕΠΛΗΡΩΚΩΣΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
20 ΕΝΤΗΑΝΑΝΚΑΙΟΤΑΤΗΧΡΕΙΑΤΗΣΕΠΑΙ
ΑΣΕΑΥΤΟΝΕΠΕΔΩΚΕΝΤΟΙΣΑΙΙΣΙΟ
ΞΥΜΠΡΕΣΒΕΥΣΑΝΤΑΥΠΕΡΤΗΣΕΙΚΟΣ
ΤΗΣΚΑΘΕΚΟΥΣΙΟΝΑΙΡΕΣΙΝΔΕΔΟΧΟΑΙ
ΑΣΤΑΘΗΝΑΙΑΥΤΟΥΤΕΙΜΑΣΕΝΤΩΕΠΙ
25 ΣΗΜΟΤΑΤΩΤΗΣΠΑΤΡΙΔΟΣΤΟΠΩ
ΤΕΜΦΘΗΝΑΙΔΕΚΑΙΠΡΟΣΘΥΑΤΕΙΡΗ
ΝΟΥΣΤΟΥΔΕΤΟΥΨΗΦΙΣΜΑΤΟΣΤΟ
ΑΝΤΙΓΡΑΦΟΝΙΝΑΓΕΙΝΟΣΧΗΗΠΟΛΙΣ
ΟΤΙΚΑΤΑΚΟΙΝΟΝΟΙΔΕΝΗΑΣΙΑΤΟΥΣ
30 ΠΟΙΟΥΝΤΑΣΑΥΤΗΝΑΜΕΙΒΕΣΘΑΙ
ΔΕΔΟΧΘΑΙΤΟΙΣΕΠΙΤΗΣΑΣΙΑΣΕΛΛΗ
ΣΙΝΓΕΝΕΣΘΑΙΚΑΙΟΤΙΠΡΟΓΕΓΡΑΠΤΑΙΛ



